Интеграл от функции комплексного переменного.

Выполнил: студент группы
НГ15-04,Ю.А. Пестерев
Преподаватель: В. М. Киселёв

Красноярск 2017

План

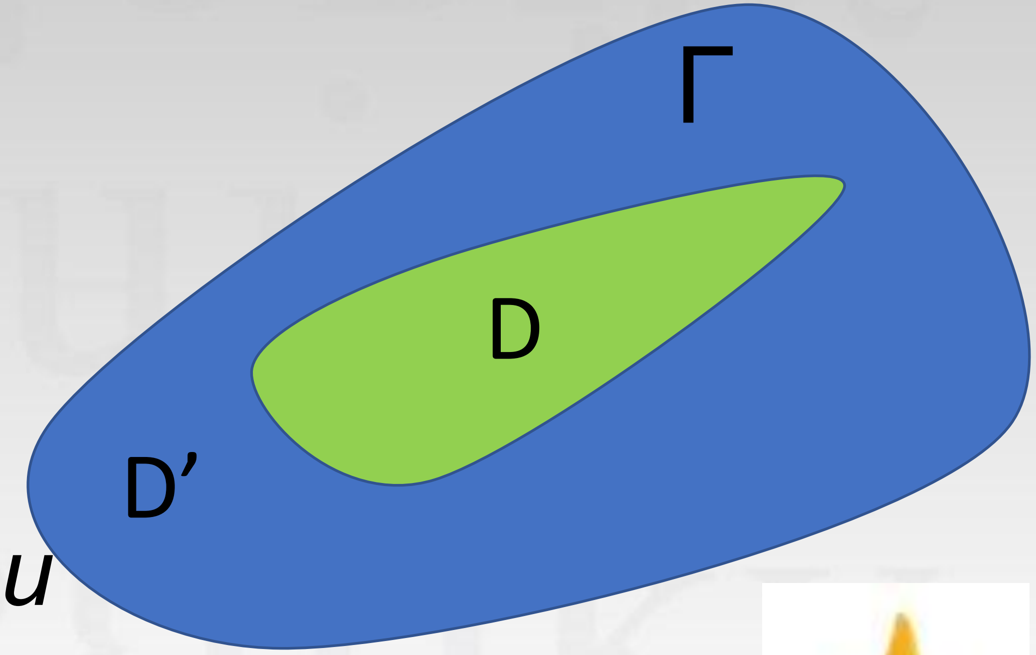
1. Теорема Коши
2. Неопределенный интеграл
3. Интегральная формула Коши
4. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции

.

Теорема Коши

Теорема. *Интеграл по замкнутой кривой Г равен нулю, если кривая ограничивает односвязную область D, а подынтегральная функция аналитическая не только внутри этой области, но и в области D', содержащей внутри себя область D и ее границу Г:*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$



Док-во. Используем формулу Грина:

$$\oint_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

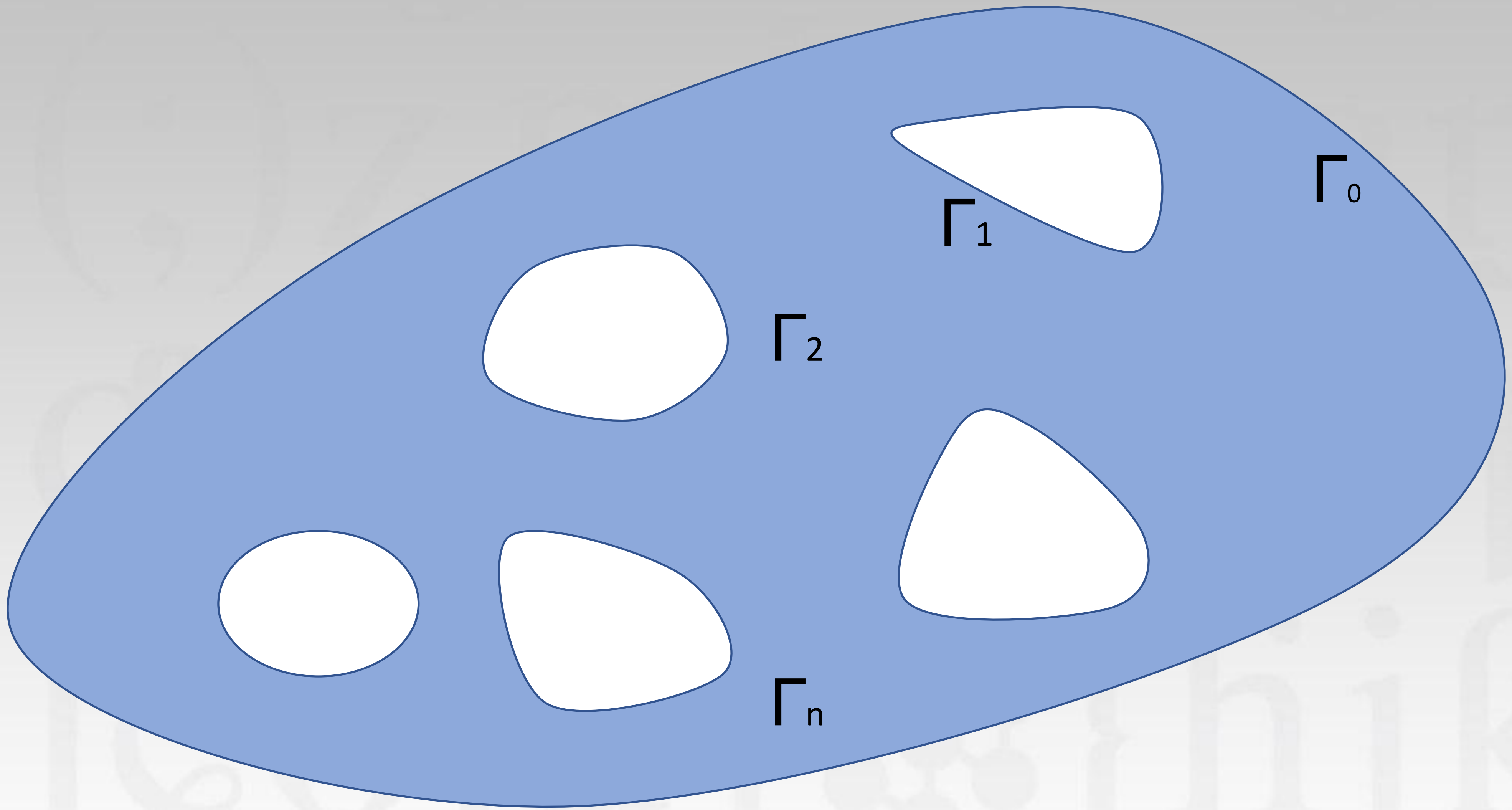
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

где D – область ограниченная замкнутым контуром Γ. тогда

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy +$$

$$+ i\oint_\Gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy =$$

$$\iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

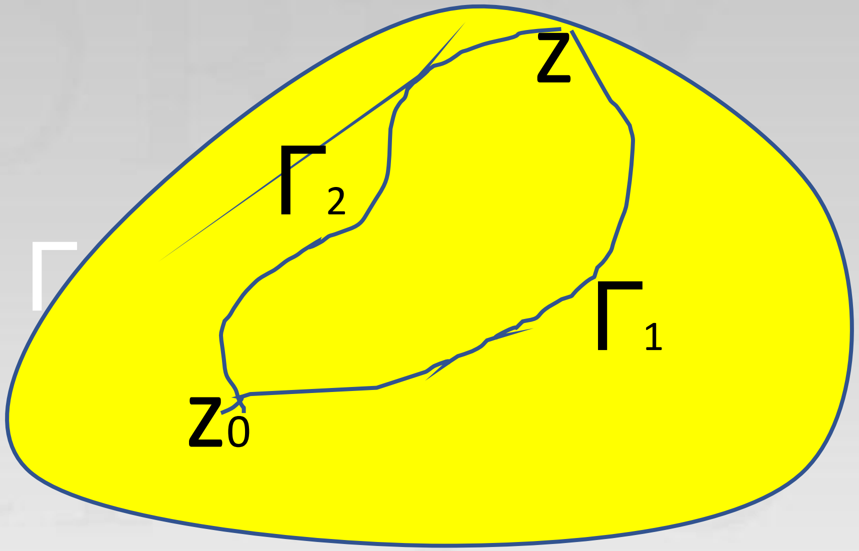

Γ_0
Γ_1
Γ_2
Γ_n

Теорема. (теорема Коши для многосвязной области). *Если область D ограничена конечным числом кусочно-гладких кривых, а функция f*(z) *аналитическая внутри области D', содержащей D и ограничивающие ее кривые, то интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним (все контуры обходятся против часовой стрелки)*:

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz$$

Рассмотрим интеграл $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ взятый по какой-нибудь кривой, соединяющей точки z_0 и z.

Пусть D - односвязная область, внутри которой подынтегральная функция аналитическая, и обе точки z_0 и z лежат внутри D .



В таком случае интеграл не зависит от пути интегрирования, лишь бы этот путь целиком лежал внутри D.

По теореме Коши: $\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)dz = 0$. Откуда

$\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z)dz = 0 \Rightarrow$

$\int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$. значить,

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz \qquad (1)$$

поэтому, (1) можно переписать сл.образом:

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$$

Теорема. Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области E и $z_0 \in \mathrm{E}_0$. Тогда функция

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \qquad (2)$$

аналитична в E и $F'(z) = f(z)$, где интеграл берется по кривой Γ соединяющей точек z_0 и z

Имеет место формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = F(z) - F(z_0)$$

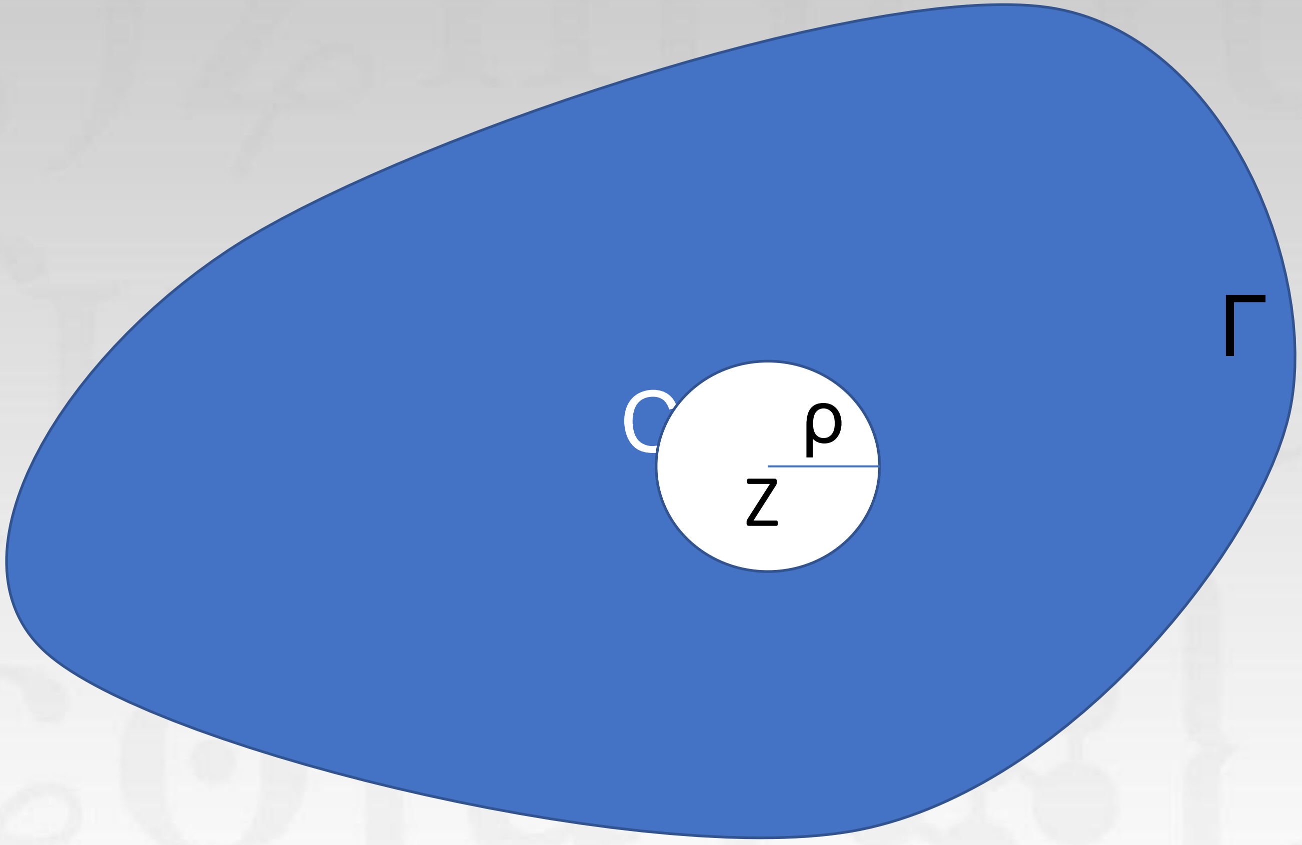
Интегральная формула Коши

Теорема. *Если замкнутая кривая Г ограничивает односвязную область D, а функция f(z) аналитическая в области D', содержащей внутри себя D и ее границу Г, то для всякой внутренней точки z области D справедлива формула*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi . \qquad (1)$$

(1)-интегральная формула Коши.

Док-во. $\forall z \in E, C: |\xi - z| = \rho.$



Тогда функция $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ аналитична в двусвязной областиб ограниченной кривыми Г и С, т.к. $\xi \neq z$.

По теореме Коши

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_{C} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad (2)$$

$f(z)$ непрерывна в $\bar{E} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \forall \xi \in C \ \ |\xi - z| = \rho < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$

$$\left|\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \oint_C \frac{f(z)}{\xi - z}\,d\xi\right|$$

$$= \left|\oint_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,d\xi\right| < 2\pi\varepsilon$$

С другой стороны,

$$\oint_C \frac{f(z)}{\xi - z}\,d\xi = f(z)\oint_C \frac{d\xi}{\xi - z} = f(z)\cdot 2\pi i$$

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \oint_C \frac{f(z)}{\xi - z}\,d\xi\right) =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - f(z)\cdot 2\pi i = 0 \Rightarrow.$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = f(z)\cdot 2\pi i.$$

Если в равенстве (2) перейти к пределу $\rho \to 0$, то

$$\lim_{\rho\to 0} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \lim_{\rho\to 0} \oint_{C} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f(z) \cdot 2\pi i$$

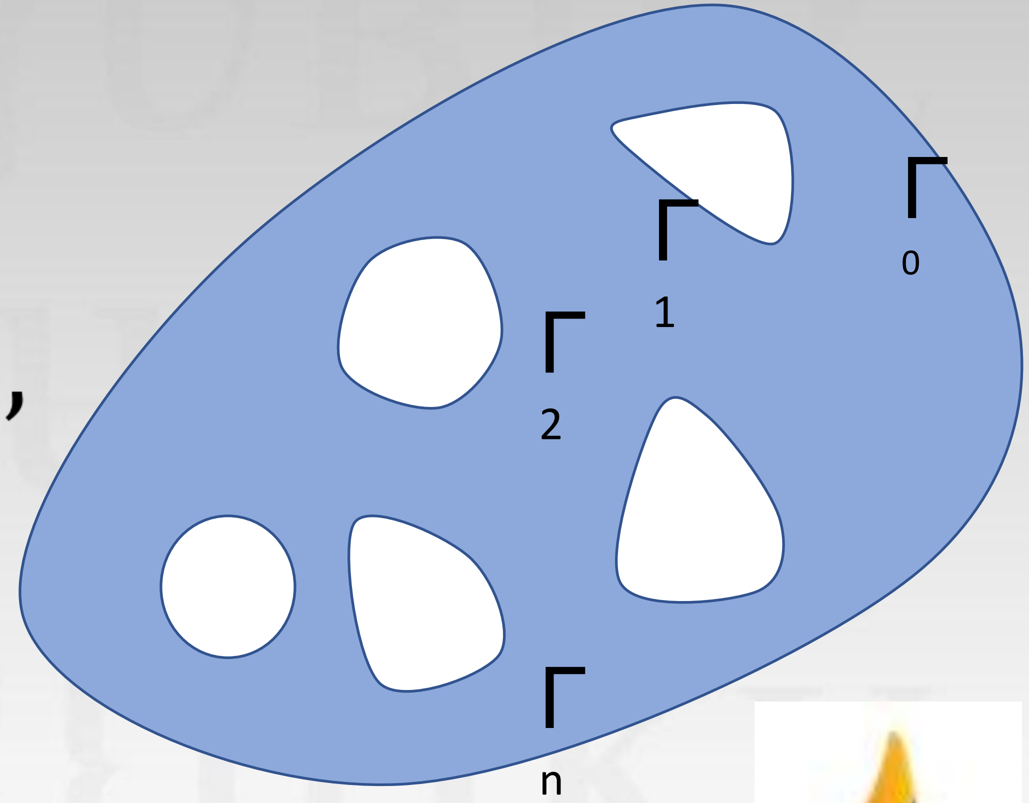
Интеграл по контуру Γ не зависит от ρ.

Откуда получим формулу (1).

Интегральная формула Коши верна и в случае многосвязной области:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\,,$$

где $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1^- + \Gamma_2^- + \ldots + \Gamma_n^-$



Бесконечная дифференцируемость аналитической функции

Теорема. *Аналитическая функция бесконечно дифференцируема, причем справедлива формула*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \qquad (1)$$

Спасибо за внимание!