Комбинаторика

Комбинаторика
раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов в соответствии с данными условиями.

Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова «combina», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход немецким философом, математиком Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Правило умножения

Для того, чтобы найти число всех возможных исходов независимого произведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытаний А и число всех ходов испытаний В.

Исходом проведения двух испытаний – А и В – по определению является пара (а;в), у которой на первом месте стоит какой-то исход испытания А, а на втором месте – какой-то исход испытания В. Независимость испытаний А и В означает, что в такой паре (а;в) возможны абсолютно все комбинации исходов этих испытаний

Правило умножения для двух независимых испытаний n=2
Удобно применять, используя прямоугольные таблицы

Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,4,5,9?

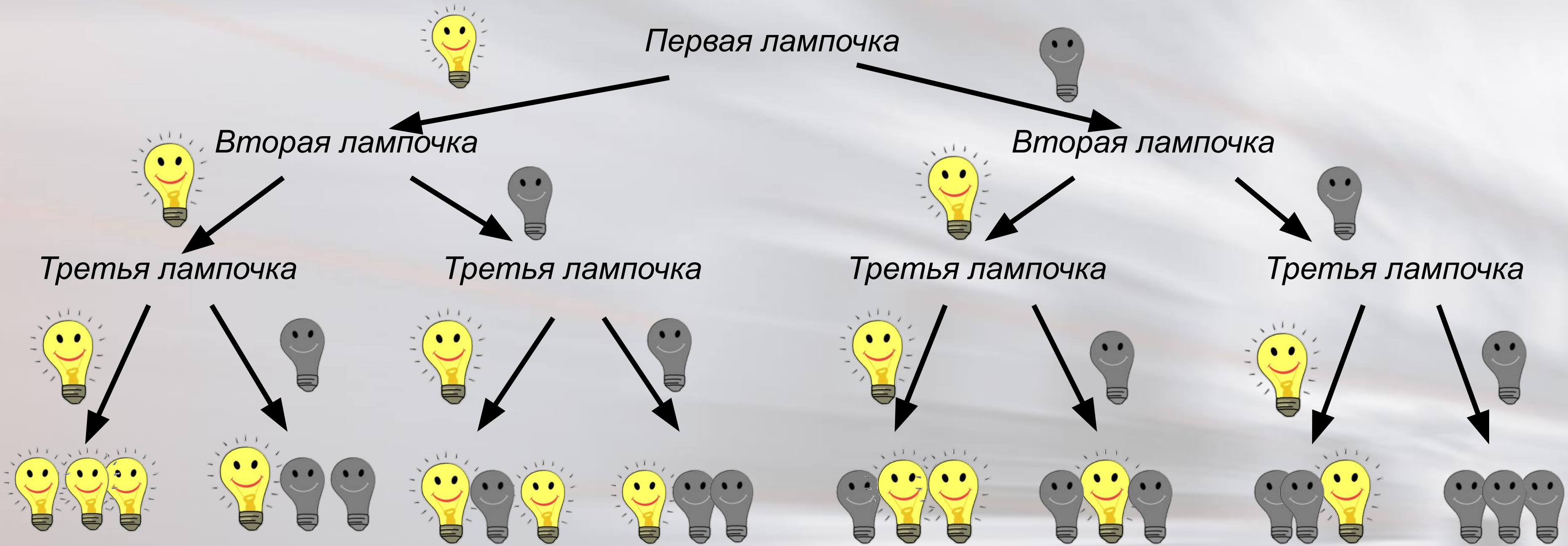
	0	2	4
1	10	12	14
2	20	22	24
4	40	42	44
5	50	52	54
9	90	92	94

Ответ: 15 чисел (5х3=15)

Теорема 1 *(Правило умножения для конечного числа испытаний)*

Число всех возможных исходов независимого произведения n испытаний равно произведению количества исходов этих испытаний.

Дерево вариантов



В коридоре три лампочки. Сколько имеется различных способов освещения коридора (включая случай, когда все лампочки не горят)?

По правилу умножения число всех способов освещения равно 2х2х2=8

Теорема 2

У множества, состоящего из n элементов, имеется ровно 2^n различных подмножеств

Элементы данного множества можно пронумеровать различными способами

Определение №1

Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают n! и называют «эн факториал»:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n$$

n	1	2	3	4	5	6	7
n	1	1·2=2	2!·3 = 6	3!·4=24	4!·5=120	5!·6=720	6!·7 =5040

Теорема 3

n различных элементов можно занумеровать числами от 1 до n ровно n! способами

Перестановки

Определение №2

Если каждому элементу множества Х по некоторому правилу ставится в соответствие элемент того же множества, то говорят, что задано отображение множества Х в себя.

Определение №3

Перестановкой конечного множества называют его отображение в себя, при котором различные элементы переходят в различные.

Теорема 4

Число всех перестановок n – элементного множества равна n!

$$P_n = n!,$$

где P_n *- число перестановок множества из n- элементов*

Задача

Сколькими способами четыре богатыря могут по одному разойтись в разные стороны в поисках Змея Горыныча?

Четыре стороны фиксированы – юг, север, запад, восток или 1, 2, 3, 4. Порядок расхождения по ним задает нумерацию четырех богатырей числами 1, 2, 3, 4.

Таких нумераций имеется $P_4 = 4! = 24$

Перестановки

Квартет

Проказница Мартышка
Осел,
Козел,
Да косолапый Мишка
Затеяли играть квартет
…
Стой, братцы стой! –
Кричит Мартышка, - погодите!
Как музыке идти?
Ведь вы не так сидите…
И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.
Тут пуще прежнего пошли у низ раздоры
И споры,
Кому и как сидеть…

Вероятно, музыканты из басни Крылова так и не перепробовали всех возможных мест.
Однако способов не так уж и много. Сколько?

В задаче идет перестановка из четырех

P_4 = 4! = 24 варианта перестановок

Выбор двух и нескольких элементов
Сочетания

Теорема 1 *(о выборе двух элементов)*

Если множество состоит из n элементов (n >= 2), то у него имеется ровно $\frac{n(n-1)}{2}$ подмножеств, состоящих из двух элементов

Определение 1

Число всех выборов двух элементов из n данных без учета их порядка

Обозначают C_n^2 и называют числом сочетаний из n элементов по 2

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента , учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести n(n – 1) способами

Определение 2

C_n^2

Число всех выборов двух элементов из n данных с учетом их порядка обозначают A_n^2 **и называют числом размещений из n элементов по 2.**

Определение 3

Число всех выборов k элементов из n данных с учетом их порядка обозначают A_n^k **И называют числом размещений из n элементов по k . Число всех выборов k элементов из n данных без учета порядка обозначают и называют числом сочетаний из n элементов по k**

Теорема 2 **Для любых натуральных чисел n и k таких, что k < n, справедливы соотношения**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

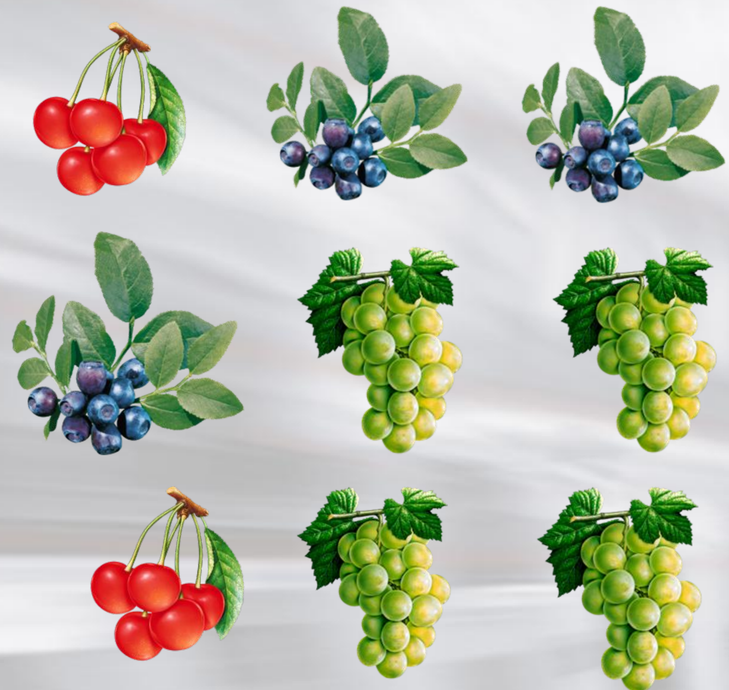
Задача

Сколько сочетаний по 2 вида ягод можно составить из трех видов ягод

Решение:

$n=3, \quad k=2$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$$



Ответ: из двух видов ягод по 2 можно составить 3 сочетания

«ноль факториал»

Что такое «ноль факториал»? Чтобы сохранить удобную формулу для чисел C_n^k при любых целочисленных значениях k (0 ≤ k ≤ n), решили, по определению, считать, что 0! = 1. Тогда:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Свойство теоремы 2

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Как видно, числители в обоих случаях одинаковы, а в знаменателе множители поменялись местами, что не отражается на числовом значении выражения.

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n клеток	n элементов k клеток	n элементов k клеток
Порядок имеет значение	Порядок имеет значение	Порядок не имеет значения
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Задачи

В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_{11}^{4} \cdot C_{12}^{3} = \frac{11!}{7! \cdot 4!} \cdot \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 400400$$

Из шести врачей поликлиники двух необходимо отправить на курсы повышения квалификации. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_{5}^{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Необходимо вычислить C_{15}^{13} **.**

Решение:

Применив равенство $C_{15}^{13} = C_{15}^{2}$ **, упростим вычисления:** $C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105$

Задачи

Задача
Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

<u>Решение</u>: два юноши не могут одновременно пригласить одну и ту же девушку. И варианты, при которых одни и те же девушки танцуют с разными юношами считаются, разными, поэтому:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Ответ: 360 способами