Уравнения высших степеней (корни многочлена от одной переменной).

План лекции.

№ 1. Уравнения высших степеней в школьном курсе математики.
№ 2. Стандартный вид многочлена.
№ 3.Целые корни многочлена. Схема Горнера.
№ 4. Дробные корни многочлена.
№ 5. Уравнения вида: (х + а)(х + в)(х + с) … = А
№ 6. Возвратные уравнения.
№ 7. Однородные уравнения.
№ 8. Метод неопределенных коэффициентов.
№ 9. Функционально – графический метод.
№ 10. Формулы Виета для уравнений высших степеней.
№ 11. Нестандартные методы решения уравнений высших степеней.

Уравнения высших степеней в школьном курсе математики.

- **7 класс.** Стандартный вид многочлена. Действия с многочленами. Разложение многочлена на множители. В обычном классе 42 часа , в спец классе 56 часов.
- **8 спецкласс.** Целые корни многочлена, деление многочленов, возвратные уравнения, разность и сумма n – ых степеней двучлена, метод неопределенных коэффициентов.
- Ю.Н. Макарычев « Дополнительные главы к школьному курсу алгебры 8 класса», М.Л.Галицкий Сборник задач по алгебре 8 – 9 класс».
- **9 спецкласс.** Рациональные корни многочлена. Обобщенные возвратные уравнения. Формулы Виета для уравнений высших степеней. Н.Я. Виленкин « Алгебра 9 класс с углубленным изучением.
- **11 спецкласс.** Тождественность многочленов. Многочлен от нескольких переменных. Функционально – графический метод решения уравнений высших степеней.

Стандартный вид многочлена.

Многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{п-1}\ x^{п-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
Называется многочленом стандартного вида.

$a_п\ x^n$ - старший член многочлена

$a_п$ - коэффициент при старшем члене многочлена. При $a_п = 1$ $P(x)$ называется приведенным многочленом.

a_0 - свободный член многочлена $P(x)$.

п – степень многочлена.

Целые корни многочлена. Схема Горнера.

- Теорема № 1. Если целое число a является корнем многочлена P (x), то a – делитель свободного члена P(x).

Пример № 1. Решите уравнение. $X^4 + 2x^3 = 11x^2 – 4x – 4$

Приведем уравнение к стандартному виду. $X^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$.

Имеем многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4$

Делители свободного члена: ± 1, ± 2, ±4. x = 1 корень уравнения т.к. P (1) = 0, x = 2 корень уравнения т.к. P(2) = 0

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена P(x) на двучлен (x – a) равен P(a). Следствие. Если a – корень многочлена P(x), то P(x) делится на (x – a).

В нашем уравнении P(x) делится на (x – 1) и на (x – 2), а значит и на (x – 1) (x – 2). При делении P(x) на $(x^2 - 3x + 2)$ в частном получается трехчлен

$x^2 + 5x + 2 = 0$, который имеет корни $x =(-5 \pm \sqrt{17})/2$

Дробные корни многочлена.

- Теорема №2. Если p/g корень многочлена P(x), то p – делитель свободного члена, g –делитель коэффициента старшего члена P (x).
- Пример № 2. Решите уравнение. $6x^3 - 11x^2 - 2x + 8 = 0$.
- Делители свободного члена: ±1, ±2, ±4, ±8. Ни одно из этих чисел не удовлетворяет уравнению. Целых корней нет. Натуральные делители коэффициента старшего члена P(x): 1, 2, 3, 6. Возможные дробные корни уравнения: ±2/3, ±4/3, ±8/3. Проверкой убеждаемся, что $P(4/3) = 0$. $X = 4/3$ корень уравнения. По схеме Горнера разделим P(x) на $(x – 4/3)$.

Примеры для самостоятельного решения.

Решите уравнения:

1. $9x^3 - 18x = x - 2$,
2. $x^3 - x^2 = x - 1$,
3. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$,
4. $X^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$,
5. $X^4 - 3x^2 + 2 = 0$,
6. $x^5 + 5x^3 - 6x^2 = 0$,
7. $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$,
8. $X^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$
9. $4x^3 + x^2 - x + 5 = 0$
10. $3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = 0$.

Ответы: 1) $\pm 1/3$; 2 2) ± 1, 3) -1; $2 \pm \sqrt{3}$, 4) ± 1, 5) ± 1; $\pm\sqrt{2}$, 6) 0; 1
7) -2; -1, 8) -3; -1; ± 2, 9) $-5/4$ 10) -2; $-5/3$; 1.

Уравнения вида $(x + a)(x + в)(x + c)(x + d)\ldots = A$.

- **Пример №3**. Решите уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$.

$a = 1$, $в = 2$, $c = 3$, $d = 4$ $a + d = в + c$. Перемножаем первую скобку с четвертой и вторую с третьей. $(x + 1)(x + 4)(x + 20(x + 3) = 24$.

$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$. Пусть $x^2 + 5x + 4 = y$, тогда $y(y + 2) = 24$,

$y^2 + 2y – 24 = 0$ $y_1 = - 6$, $y_2 = 4$. $x^2 + 5x + 4 = -6$ или $x^2 + 5x + 4 = 4$.

$x^2 + 5x + 10 = 0$, Д< 0 корней нет. Из второго уравнения имеем $x_1=0$, $x_2=-5$.

- **Пример № 4.** $(x^2 - 3x)(x – 1)(x – 2) = 24$. Произведение второй и третьей скобок дает выражение первой скобки.
- **Пример № 5.** $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = 9/2$.

$(8x + 7)(8x + 7)(4x + 3)(x + 1) = 9/2$, $a = 7/8$, $в = 7/8$, $c = ¾$, $d = 1$. $a + в = c + d$.

- Перемножаем первую скобку со второй и третью с четвертой.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = -15$,
2. $x(x + 4)(x + 5)(x + 9) + 96 = 0$,
3. $x(x + 3)(x + 5)(x + 8) + 56 = 0$,
4. $(x – 4)(x – 3)(x – 2)(x – 1) = 24$,
5. $(x – 3)(x -4)(x – 5)(x – 6) = 1680$,
6. $(x^2 - 5x)(x + 3)(x – 8) + 108 = 0$,
7. $(x + 4)^2 (x + 10)(x – 2) + 243 = 0$
8. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 20) = 4$, Указание: $x + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$,

$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$

Ответы: 1) $-4 \pm\sqrt{6}$; $- 6$; $- 2$. 6) $- 1$; 6; $(5\pm \sqrt{97})/2$ 7) -7; -1; $-4 \pm\sqrt{3}$.

Возвратные уравнения.

Определение №1. Уравнение вида: $ax^4 + вx^3 + cx^2 + вx + a = 0$ называется возвратным уравнением четвертой степени.

Определение №2. Уравнение вида: $ax^4 + вx^3 + cx^2 + квx + к^2 a = 0$ называется обобщенным возвратным уравнением четвертой степени.

$к^2 a : a = к^2$; $кв : в = к$.

Пример №6. Решите уравнение $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$.

Делим обе части уравнения на x^2. $x^2 - 7x + 14 – 7/x + 1/x^2 = 0$,

$(x^2 + 1/x^2) – 7(x + 1/x) + 14 = 0$. Пусть $x + 1/x = y$. Возводим обе части равенства в квадрат. $x^2 + 2 + 1/x^2 = y^2$, $x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2$. Получаем квадратное уравнение $y^2 - 7y + 12 = 0$, $y_1 = 3$, $y_2 = 4$. $x + 1/x =3$ или $x + 1/x = 4$. Получаем два уравнения: $x^2 - 3x + 1 = 0$, $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Пример №7. $3x^4 - 2x^3 - 31x^2 + 10x + 75 = 0$. $75:3 = 25$, $10:(– 2) = -5$, $(-5)^2 = 25$.

Условие обобщенного возвратного уравнения выполняется $к= -5$. Решается аналогично примеру №6. Делим обе части уравнения

Примеры для самостоятельного решения.

- 1. $78x^4 - 133x^3 + 78x^2 - 133x + 78 = 0$,
- 2. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$,
- 3. $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$,
- 4. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 -10x + 24 = 0$,
- 5. $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$,
- 6. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 -10x + 4 = 0$.
- Ответы: 1) $2/3$; $3/2$, 2) $1;2$ 3) $-1 \pm\sqrt{3}$; $(3\pm\sqrt{17})/2$, 4) $-1\pm\sqrt{3}$; $(7\pm\sqrt{337})/12$
- 5) 1; 2; $(-5\pm \sqrt{17})/2$, 6) 1; 2.

Однородные уравнения.

- Определение. Уравнение вида $a_0u^3 + a_1u^2 v + a_2uv^2 + a_3v^3 = 0$ называется однородным уравнением третьей степени относительно u v.
- Определение. Уравнение вида $a_0u^4 + a_1u^3v + a_2u^2v^2 + a_3uv^3 + a_4v^4 = 0$ называется однородным уравнением четвертой степени относительно u v.
- **Пример №8.** Решите уравнение $(x^2 - x + 1)^3 + 2x^4(x^2 - x + 1) – 3x^6 = 0$

Однородное уравнение третьей степени относительно $u = x^2 - x + 1$, $v = x^2$.

Делим обе части уравнения на x^6. Предварительно проверили, что $x = 0$ не является корнем уравнения. $(x^2 - x + 1/x^2)^3 + 2(x^2 - x + 1/x^2) – 3 = 0$.

$(x^2 - x + 1)/x^2) = y$, $y^3 + 2y – 3 = 0$, $y = 1$ корень уравнения. Делим многочлен

$P(x) = y^3 + 2y – 3$ на $y – 1$ по схеме Горнера. В частном получаем трехчлен, который не имеет корней. Ответ: 1.

Примеры для самостоятельного решения.

- 1. $2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(X^2 + 6X + 1)(X^2 + 1) + 2(X^2 + 1)^2 = 0$,
- 2. $(X + 5)^4 - 13X^2(X + 5)^2 + 36X^4 = 0$,
- 3. $2(X^2 + X + 1)^2 - 7(X - 1)^2 = 13(X^3 - 1)$,
- 4. $2(X - 1)^4 - 5(X^2 - 3X + 2)^2 + 2(x - 2)^4 = 0$,
- 5. $(x^2 + x + 4)^2 + 3x(x^2 + x + 4) + 2x^2 = 0$,

Ответы: 1) -1; $-2\pm\sqrt{3}$, 2) $-5/3$; $-5/4$; $5/2$; 5 3) -1; $-1/2$; 2;4 4) $\pm\sqrt{2}$; $3\pm\sqrt{2}$,
5) Корней нет.

Метод неопределенных коэффициентов.

- Теорема №3. Два многочлена P(x) и G(x) тождественны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и коэффициенты при одноименных степенях переменной в обоих многочленах равны.
- **Пример №9.** Разложить на множители многочлен $y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 4y + 1$.

$y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 4y + 1 = (y^2 + вy + c)(y^2 + в_1y + c_1) = y^4 + y^3(в_1 + в) + y^2(c_1 + c + в_1в) + y(вc_1 + cв_1) + cc_1$. Согласно теореме №3 имеем систему уравнений:

$в_1 + в = -4,\ c_1 + c + в_1в = 5,\ вc_1 + cв_1 = -4,\ cc_1 = 1.$

Необходимо решить систему в целых числах. Последнее уравнение в целых числах может иметь решения: $c = 1,\ c_1 = 1;\ c = -1,\ c_1 = -1$.

Пусть $c = c_1 = 1$, тогда из первого уравнения имеем $в_1 = -4 - в$. Подставляем во второе уравнение системы $в^2 + 4в + 3 = 0$, $в = -1,\ в_1 = -3$ или $в = -3,\ в_1 = -1$. Данные значения подходят третьему уравнению системы. При $c = c_1 = -1$ Д < 0. Ответ: $(y^2 - y + 1)(y^2 - 3y + 1)$

Пример №10.

- Разложить на множители многочлен $y^3 - 5y + 2$.

$y^3 - 5y + 2 = (y + a)(y^2 + вy + c) = y^3 + (a + в)y^2 + (aв + c)y + ac$.

Имеем систему уравнений: $a + в = 0$, $aв + c = -5$, $ac = 2$. Возможные целые решения третьего уравнения: (2; 1), (1; 2), (-2; -1), (-1; -2).

Пусть $a = -2$, $c = -1$. Из первого уравнения системы $в = 2$, что удовлетворяет второму уравнению. Подставляя данные значения в искомое равенство получим ответ: $(y – 2)(y^2 + 2y – 1)$.

Второй способ. $У^3 - 5y + 2 = y^3 - 5y + 10 – 8 = (y^3 - 8) – 5(y – 2) = (y – 2)(y^2 + 2y - 1)$.

Примеры для самостоятельного решения.

Разложите на множители многочлены:

- 1. $y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y - 8$,
- 2. $y^4 - 4y^3 + 7y^2 - 6y + 2$,
- 3. $x^4 + 324$,
- 4. $y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 15$,
- 5. Решите уравнение, используя метод разложения на множители:
- а) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$, б) $x^5 + 5x^3 - 6x^2 = 0$.

Ответы: 1) $(y^2 + 2y - 2)(y^2 + 2y + 4)$, 2) $(y - 1)^2(y^2 - 2y + 2)$, 3) $(x^2 - 6x + 18)(x^2 + 6x + 18)$, 4) $(y - 1)(y - 3)(y^2 - 4y + 5)$, 5а) $\pm 1; \pm\sqrt{2}$, 5б) 0; 1.

Функционально – графический метод решения уравнений высших степеней.

- **Пример №11.** Решите уравнение $x^5 + 5x - 42 = 0$.

Функция $y = x^5$ возрастающая, функция $y = 42 – 5x$ убывающая ($к < о$).

Теорема №4. Если функция $f(x)$ возрастающая, а $g(x)$ убывающая, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на ее области определения не более одного корня.

Искомое уравнение имеет не более одного корня. Подбираем корень уравнения

$x = 2$. Ответ: 2.

Пример №12. Решите уравнение $x^4 - 8x + 63 = 0$.

$x^4 = 8x – 63$. Построим графики функций: $y = x^4$, $y = 8x – 63$. Графики функций не имеют общих точек. Уравнение не имеет корней.

Примеры для самостоятельного решения.

- 1. Используя свойство монотонности функции, докажите, что уравнение имеет единственный корень, и найдите этот корень:

а) $x^3 = 10 - x$, б) $x^5 + 3x^3 - 11\sqrt{2} - x$. Ответы: а) 2, б) $\sqrt{2}$.

2. Решите уравнение, используя функционально – графический метод:

а) $x = \sqrt[3]{x}$, б) $|x| = \sqrt[5]{x}$, в) $2 = 6 - x$, г) $(1/3) = x + 4$, д) $(x - 1)^2 = \log_2 x$, е) $\log = (x + ½)^2$, ж) $1 - \sqrt{x} = \ln x$, з) $\sqrt{x} - 2 = 9/x$.

Ответы: а) 0; ±1, б) 0; 1, в) 2, г) -1, д) 1; 2, е) ½, ж) 1, з) 9.

Формулы Виета для уравнений высших степеней.

- Теорема №5 (Теореме Виета).

Если уравнение а x^n + а x^n + … + a_1x + a_0 имеет n различных действительных корней x_1, x_2, … ,x , то они удовлетворяют равенствам:

1. Для квадратного уравнения ax^2 + вх + с = о: $x_1 + x_2$ = -в/а, x_1x_2 = с/а;
2. Для кубического уравнения $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ = о:

   $x_1 + x_2 + x_3 = -a_2/a_3$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_1/a_3$; $x_1x_2x_3 = -a_0/a_3$;

…, для уравнения n –ой степени: $x_1 + x_2$ + … x = - а / а , $x_1x_2 + x_1x_3$ + … + x x = а /а , … , x_1x_2·… · x = (- 1)^n a_0/а . Выполняется и обратная теорема.

Пример №13.

- Напишите кубическое уравнение, корни которого обратны корням уравнения $x^3 - 6x^2 + 12x – 18 = 0$, а коэффициент при x^3 равен 2.
- 1. По теореме Виета для кубического уравнения имеем:

  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12$, $x_1x_2x_3 = 18$.

  2. Составляем обратные величины данным корням и для них применяем обратную теорему Виета.

  $1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 = (x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)/x_1x_2x_3 = 12/18 = 2/3$.

  $1/x_1x_2 + 1/x_1x_3 + 1/x_2x_3 = (x_3 + x_2 + x_1)/x_1x_2x_3 = 6/18 = 1/3$, $1/ x_1x_2x_3 = 1/18$.

Получаем уравнение $x^3 +2/3x^2 + 1/3x – 1/18 = 0 \cdot 2$

Ответ: $2x^3 + 4/3x^2 + 2/3x -1/9 = 0$.

Примеры для самостоятельного решения.

- 1. Напишите кубическое уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, а коэффициент при x^3 равен 8.
- Ответ: $8x^3 - 98/9x^2 + 28/9x - 2/9 = 0$.

Нестандартные методы решений уравнений высших степеней.

Пример №12. Решите уравнение $x^4 - 8x + 63 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Выделим точные квадраты. $X^4 - 8x + 63 = (x^4 + 16x^2 + 64) - (16x^2 + 8x + 1) = (x^2 + 8)^2 - (4x + 1)^2 = (x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7) = 0$. Оба дискриминанта отрицательные.

Ответ: нет корней.

Пример №14.

- Решите уравнение $21x^3 + x^2 - 5x – 1 = 0$.

Если свободный член уравнения равен ± 1, то уравнение преобразуется в приведенное уравнение с помощью замены $x = 1/y$.

$21/y^3 + 1/y^2 - 5/y – 1 = 0 \cdot y^3$, $y^3 + 5y^2 - y – 21 = 0$. $y = -3$ корень уравнения.

$(y + 3)(y^2 + 2y - 7) = 0$, $y = -1 \pm 2\sqrt{2}$. $x_1 = -1/3$, $x_2 = 1/ -1 + 2\sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 1)/7$,

$X_3 = 1/-1 -2\sqrt{2} =(1-2\sqrt{2})/7$.

Пример №15. Решите уравнение $4x^3-10x^2 + 14x – 5 = 0$.

Умножим обе части уравнения на 2. $8x^3 -20x^2 + 28x – 10 = 0$, $(2x)^3 - 5(2x)^2 + 14\cdot(2x) -10 = 0$. Введем новую переменную $y = 2x$, получим приведенное уравнение $y^3 - 5y^2 + 14y -10 = 0$, $y = 1$ корень уравнения.

$(y – 1)(y^2 - 4y + 10) = 0$, Д < о, $2x = 1$, $x = 0{,}5$.

Ответ: 0,5

Пример №16.

- Доказать, что уравнение $x^4 + x^3 + x – 2 = 0$ имеет один положительный корень.
- Пусть $f(x) = x^4 + x^3 + x – 2$, $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 1 > 0$ при $x > 0$. Функция $f(x)$ возрастающая при $x > 0$, а значение $f(0) = -2$. Очевидно, что уравнение имеет один положительный корень ч.т.д.

Пример №17. Решите уравнение $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$.

И.Ф.Шарыгин « Факультативный курс по математике для 11 класса».М. Просвещение 1991 стр90.

1. $| x | < 1$, поскольку при $| x | > 1$ $2x^2 - 1 > 1$ и $8x^4 -8x^2 + 1 > 1$

2. Сделаем замену $x = \cos y$, $y \in (0; \pi)$. При остальных значениях y, значения x повторяются, а уравнение имеет не более 7 корней.

$2x^2 - 1 = 2\cos^2 y – 1 = \cos 2y$, $8x^4 - 8x^2 + 1 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 2\cos^2 2y – 1 = \cos 4y$.

3. Уравнение принимает вид $8\cos y\cos 2y\cos 4y = 1$. Умножаем обе части уравнения на $\sin y$. $8\sin y\cos y\cos 2y\cos 4y = \sin y$. Применяя 3 раза формулу двойного угла получим уравнение $\sin 8y = \sin y$, $\sin 8y – \sin y = 0$

Окончание решения примера №17.

- Применяем формулу разности синусов. $2\sin 7y/2 \cdot \cos 9y/2 = 0$. Учитывая, что у € (0;п), у = 2пк/3, к = 1, 2, 3 или у = п/9 + 2пк/9, к =0, 1, 2, 3. Возвращаясь к переменной х получаем ответ:

Cos2п/7, cos4п/7, cos6п/7, cosп/9, ½, cos5п/9, cos7п/9.

Примеры для самостоятельного решения.

1. Найти все значения а, при которых уравнение $(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = a$ имеет ровно три корня. Ответ: 9/16. Указание: построить график левой части уравнения. F max = f(0) = 9/16. Прямая у = 9/16 пересекает график функции в трех точках.
2. Решите уравнение $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$. Ответ: -4; 2.
3. Решите уравнение $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$. Ответ: -5; -3.
4. Решите уравнение $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x – 1)^2 = 13(x^3 - 1)$.Ответ: -1; -1/2, 2;4
5. Найдите число действительных корней уравнения $x^3 - 12x + 10 = 0$ на [-3; 3/2]. Указание: найти производную и исследовать на монот.

Примеры для самостоятельного решения (продолжение).

- **6.** Найдите число действительных корней уравнения

$x^4 - 2x^3 + 3/2 = 0$. Ответ: 2

7. Пусть x_1, x_2, x_3 - корни многочлена $P(x) = x^3 - 6x^2 -15x + 1$. Найдите $X_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Ответ: 66. Указание: примените теорему Виета.

8. Докажите, что при а > о и произвольном вещественном в уравнение $x^3 + ax + в = о$ имеет только один вещественный корень.

Указание: проведите доказательство от противного. Примените теорему Виета.

9. Решите уравнение $2(x^2 + 2)^2 = 9(x^3 + 1)$. Ответ: ½; 1; $(3 \pm \sqrt{13})/2$.

Указание: приведите уравнение к однородному, используя равенства

$X^2 + 2 = x + 1 + x^2 - x + 1$, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

10. Решите систему уравнений $x + y = x^2$, $3y – x = y^2$. Ответ: (0;0),(2;2), $(\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$, $(- \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$.

11. Решите систему: $4y^2 -3xy = 2x –y$, $5x^2 - 3y^2 = 4x – 2y$. Ответ: (о;о), (1;1),(297/265; - 27/53).

Контрольная работа.

- 1 вариант.
- 1. Решите уравнение $(x^2 + x) – 8(x^2 + x) + 12 = 0$.
- 2. Решите уравнение $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = - 15$.
- 3. Решите уравнение $12x^2(x – 3) + 64(x – 3)^2 = x^4$.
- 4. Решите уравнение $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$
- 5. Решите систему аравнений: $x^2 + 2y^2 - x + 2y = 6,$

  $1{,}5x^2 + 3y^2 - x + 5y = 12.$

2 вариант

- 1. $(x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12 = 0.$
- 2. $x(x + 1)(x + 5)(x + 6) = 24.$
- 3. $x^4 + 18(x + 4)^2 = 11x^2(x + 4).$
- 4. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0.$
- 5. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x^2y - 9 = 0, \quad x - y - x^2y + 3 = 0.$
- **3 вариант**.
- 1. $(x^2 + 3x)^2 - 14(x^2 + 3x) + 40 = 0$
- 2. $(x - 5)(x-3)(x + 3)(x + 1) = - 35.$
- 3. $x4 + 8x^2(x + 2) = 9(x+ 2)^2.$
- 4. $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0.$
- 5. $x + y + x^2 + y^2 = 18,$

  $xy + x^2 + y^2 = 19.$

4 вариант.

1. $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 = о.$
2. $(x - 7)(x-4)(x-2)(x + 1) = -36.$
3. $X^4 + 3(x - 6)^2 = 4x^2(6 – x).$
4. $X^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0.$
5. $X^2 + 3xy + y^2 = - 1, \; 2x^2 - 3xy – 3y^2 = - 4.$
6. Дополнительное задание:

   Остаток от деления многочлена P(x) на (x – 1) равен 4, остаток от делении на (x + 1) равен2, а при делении на (x – 2) равен 8. Найти остаток от деления P(x) на $(x^3 - 2x^2 - x + 2)$.

Ответы и указания:

вариант	№ 1	№ 2.	№ 3.	№ 4.	№ 5.
1.	- 3; ±2; 1	1;2;3.	-5; -4; 1; 2. Однородное уравнение: u = x -3, v =x^2	-2; -1; 3; 4.	(2;1); (2/3;4/3). Указание: 1·(-3) + 2· 2
2.	-6; -2; -4 ±√6.	-3±2√3; - 4; - 2.	1±√11; 4; - 2. Однородное уравнение: u = x + 4, v = x^2	1; 5;3±√13.	(2;1); (0;3); (- 3; 0). Указание: 2· 2 + 1.
3.	-6; 2; 4; 12	-3; -2; 4; 12	-6; -3; -1; 2. Однородное u = x+ 2, v = x^2	-6; ±3; 2	(2;3), (3;2), (-2 + √7; -2 - √7); (-2 - √7; -2 + √7). Указание: 2 -1.
4.	(3±√5)/2	2±√3	2±√3; (3±√5)/2	(5 ± √21)/2	(1;-2), (-1;2). Указание: 1·4 + 2

Решение дополнительного задания.

- По теореме Безу: $P(1) = 4$, $P(-1) = 2$, $P(2) = 8$.
- $P(x) = G(x)(x^3 - 2x^2 - x + 2) + ax^2 + вx + c$.
- Подставляем 1; - 1; 2.
- $P(1) = G(1)\cdot 0 + a + в + c = 4$, $a + в + c = 4$.

  $P(-1) = a – в + c = 2$,

  $P(2) = 4a^2 + 2в + c = 8$.

  Решая полученную систему из трех уравнений получим: $a = в = 1$, $c = 2$.

  Ответ: $x^2 + x + 2$.

Критерий

- № 1 - 2 балла. 1 балл – одна вычислительная ошибка.
- № 2,3,4 – по 3 балла. 1 балл – привели к квадратному уравнению.

2 балла – одна вычислительная ошибка.

№ 5. – 4 балла. 1 балл – выразили одну переменную через другую.

2 балла – получили одно из решений.

3 балла – одна вычислительная ошибка.

Дополнительное задание: 4 балла.

1 балл – применили теорему Безу для всех четырех случаев.

2 балла – составили систему уравнений.

3 балла – одна вычислительная ошибка.