

Квадратные уравнения

8 класс

Маслова Наталья Васильевна,
МБОУ ООШ №34 г. Белгорода



Содержание

1. Определение квадратного уравнения.

2. Виды квадратных уравнений:

а) полные квадратные уравнения;

приведенные квадратные уравнения;

б) б) неполные квадратные уравнения.

3. Приёмы устного решения квадратных уравнений3.

Приёмы устного решения квадратных уравнений.

4. Тест «Квадратные уравнения».

5. Использованные источники.



Определение

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Число a называют *первым* или *старшим* коэффициентом,

число b называют *вторым* коэффициентом,

число c называется *свободным членом*.

Прим
ер

РешиР
еши
сам



Пример.

Назовите в квадратном уравнении коэффициенты:

а) $5x^2 - 9x + 4 = 0$.

б) $-x^2 + 5x = 0$.

Решение:

а) $a=5$, $b=-9$, $c=4$.

б) $a=-1$, $b=5$, $c=0$.



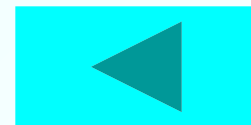
Реши самостоятельно.

Назовите в квадратном уравнении
коэффициенты:

а) $x^2+3x-10=0$.

б) $6x^2-30=0$.

в) $9x^2=0$.



Виды квадратных уравнений

Полным квадратным уравнением называют такое, все коэффициенты которого отличны от нуля.

Приведённым называют квадратное уравнение, в котором старший коэффициент равен единице.

$$x^2 + px + q = 0; \quad p = \frac{b}{a}; \quad q = \frac{c}{a};$$

Неполным квадратным уравнением называется такое, в котором хотя бы один из коэффициентов кроме старшего (либо второй коэффициент, либо свободный член) равен нулю.



Полное квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, (a, b, c \neq 0)$$

Число $D = b^2 - 4ac$ - **дискриминант**.

По знаку дискриминанта можно определить,

сколько корней имеет квадратное уравнение.

- Если $D < 0$, корней **нет**;
- если $D = 0$, **один** корень (2 одинаковых корня);

Прим
ер

1 $D > 0$

Реши
сам

рня.



Пример

Сколько корней имеют
квадратные уравнения:

1) $x^2 - 8x + 12 = 0;$

2) $5x^2 + 3x + 7 = 0;$

3) $x^2 - 6x + 9 = 0.$



Решение

Выпишем коэффициенты и найдем дискриминант:

$$1) x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$a = 1, b = -8, c = 12;$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$$

$D > 0$, поэтому уравнение имеет

два различных

корня.



$$2) 5x^2 + 3x + 7 = 0;$$

$$a = 5; b = 3; c = 7;$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 9 - 140 = -131.$$

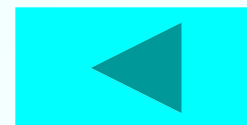
$D < 0$, корней **нет**.

$$3) x^2 - 6x + 9 = 0.$$

$$a = 1; b = -6; c = 9;$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0.$$

$D = 0$ — **один** корень.



Реши самостоятельно.

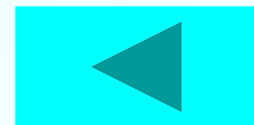
Сколько корней имеют
квадратные уравнения:

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0;$

2) $9x^2 + 6x + 1 = 0;$

3) $3x^2 + x + 2 = 0.$

4) $x^2 + 5x - 6 = 0;$



Формула корней квадратного уравнения

Когда $D > 0$, корни можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Когда $D = 0$, можно найти по формуле

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Когда $D < 0$, корней нет.

Прим
ер

Реши
сам



Пример

Решить квадратные уравнения:

$$1) 2x^2 - x - 5 = 0;$$

$$2) 15 - 2x + x^2 = 0;$$

$$3) x^2 + 12x + 36 = 0.$$



Решение

$$1) 2x^2 - x - 5 = 0; :$$

$$a = 2; b = -1; c = -5;$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 41.$$

$D > 0$ - уравнение имеет два корня. Найдем их:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{41}}{4}.$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{4}.$$



$$2) 15 - 2x + x^2 = 0$$

$$a = 1; b = -2; c = 15;$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -56.$$

$D < 0$, корней нет.

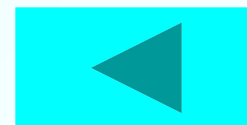
$$3) x^2 + 12x + 36 = 0$$

$$a = 1; b = 12; c = 36;$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0.$$

$D = 0$, уравнение имеет один корень.

$$x = \frac{-12}{2 \cdot 1} = -6.$$



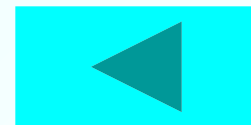
Реши самостоятельно.

Решить квадратные уравнения:

$$1) 3x^2 - 7x + 4 = 0;$$

$$2) -y^2 + 3y - 5 = 0;$$

$$3) 1 - 18p + 81p^2 = 0.$$



Формула корней квадратного уравнения при чётном коэффициенте b

Для уравнений вида $ax^2+2kx+c=0$, то есть при чётном b , где $k = \frac{b}{2}$, для нахождения корней можно использовать выражение

$$D_1 = k^2 - ac$$

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} \quad x_2 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a}$$

приме
р

Реши
сам



Пример

Решить квадратные уравнения:

$$1) 3x^2 - 14x + 16 = 0;$$

$$2) x^2 + 2x - 80 = 0;$$

$$3) y^2 - 10y - 25 = 0.$$



Решение

$$1) 3x^2 - 14x + 16 = 0;$$

$$a = 3; b = -14; c = 16;$$

$$k = -7.$$

$$D_1 = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 1.$$

$D_1 > 0$ - уравнение имеет два корня. Найдем их:

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{1}}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{1}}{3} = 2.$$



$$2) x^2 + 2x - 80 = 0$$

$$a = 1; b = 2; c = -80;$$

$$k=1.$$

$$D_1 = 1^2 - 1 \cdot (-80) = 81.$$

$D_1 > 0$, 2 корня.

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{81}}{1} = -8. \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{81}}{1} = 10.$$

$$3) y^2 - 10y + 25 = 0.$$

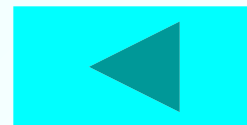
$$a = 1; b = -10; c = 25;$$

$$k=-5$$

$$D_1 = (-5)^2 - 1 \cdot 25 = 0.$$

$D = 0$, уравнение имеет один корень.

$$x = \frac{5}{1} = 5.$$



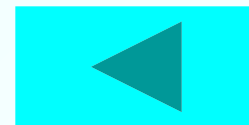
Реши самостоятельно.

Решить квадратные уравнения:

$$1) 8x^2 - 14x + 5 = 0;$$

$$2) 4y^2 + 14y + 1 = 0;$$

$$3) 80 + 32t + 3t^2 = 0.$$



Приведённые квадратные уравнения

Пусть дано приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, тогда

$$D = p^2 - 4q$$

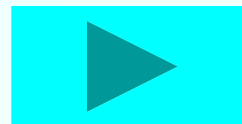
$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$$

Также приведенное квадратное уравнение можно решить при помощи **теоремы Виета**.

Прим
ер

Реши
сам

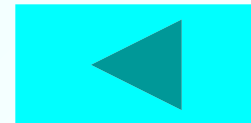


Теорема Виета.

Сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна **второму** коэффициенту с **противоположным** знаком, а **произведение** корней равно **свободному** члену .

$$x_1 + x_2 = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$



Пример

Решить приведенное квадратное уравнение:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8; \\ x_1 \cdot x_2 = 12. \end{cases}$$

Удобнее начинать подбор корней с **произведения**:

произведение корней **положительное** число, значит оба корня **одинакового** знака, а так как сумма тоже **больше нуля**, то оба корня будут **положительными**.

$$x_1 = 2;$$

$$x_2 = 6.$$



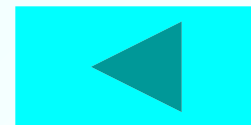
Решите самостоятельно.

Найдите корни уравнения, используя теорему Виета.

$$x^2 - 15x - 16 = 0$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$



Неполные квадратные уравнения

$$\underline{ax^2 + bx = 0}$$

$$\underline{ax^2 + c = 0}$$

$$\underline{ax^2 = 0}$$

Прим
ер

Реши
сам



Уравнение $ax^2+bx=0$ ($c = 0, b \neq 0$);

В левой части нужно **разложить многочлен на множители**.

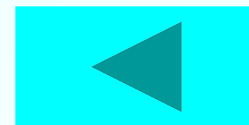
Произведение равно нулю, когда хотя бы **один из множителей равен нулю**, при этом **другой не теряет смысла**.

$$ax^2+bx=0; \quad x(ax+b)=0;$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ ax + b = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ ax = -b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

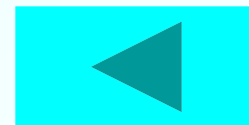


Уравнение $ax^2 + c = 0$, ($b = 0$; $c \neq 0$)

$$ax^2 = -c; \quad x^2 = -\frac{c}{a};$$

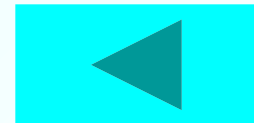
Если $-\frac{c}{a} > 0$; , то уравнение имеет **2 корня**: $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$;

Если $-\frac{c}{a} < 0$; , то уравнение **не имеет корней**.



Уравнение $ax^2 = 0$, ($b = 0$; $c = 0$)

$$ax^2 = 0; \quad x^2 = 0; \quad x = 0.$$



Пример

Решить квадратные уравнения:

$$1) x^2 - 7x = 0;$$

$$2) 5x^2 + 30 = 0;$$

$$3) 4x^2 - 9 = 0.$$



Решение

$$1) x^2 - 7x = 0,$$

$$x \cdot (x - 7) = 0,$$

$$x_1 = 0; x_2 = 7.$$

$$2) 5x^2 + 30 = 0,$$

$$5x^2 = -30,$$

$$x^2 = -6.$$

Корней **нет**, т.к. квадрат не может быть равен отрицательному числу.



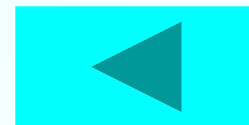
$$3) 4x^2 - 9 = 0,$$

$$4x^2 = 9,$$

$$x^2 = \frac{9}{4},$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2} = -1,5;$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5;$$



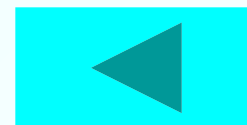
Реши самостоятельно.

Решить квадратные уравнения:

1) $3x^2 - 45x = 0$;

2) $3x^2 - 2 = 0$;

3) $6x^2 + 24 = 0$.



Приемы устного решения квадратных уравнений

1 приём «коэффициентов»

2 приём «коэффициентов»

приём «переброски»

Прим
ер 1

Прим
ер 2

Реши
сам



1 приём «коэффициентов»

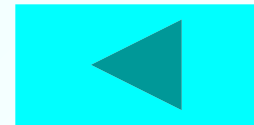
Пусть дано квадратное

уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) Если $a + b + c = 0$ (т.е. сумма
коэффициентов

равна нулю), то

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}.$$

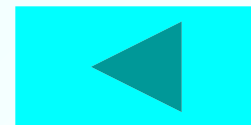


2 приём «коэффициентов»

Пусть дано квадратное

уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

2) Если $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-c}{a}$.



Приём «переброски»

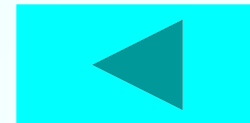
Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Если $a + b + c \neq 0$, тогда **переносим и умножаем a на c ,**

полученное приведенное уравнение решаем по теореме Виета. Найденные корни **делим на a .**

$ax^2 + bx + c = 0$, $x^2 + bx + ca = 0$, x_1', x_2' - корни получившегося уравнения. Тогда

$$x_1 = \frac{x_1'}{a} \quad x_2 = \frac{x_2'}{a}$$



Пример 1.

Прием 1

$$4x^2 - 13x + 9 = 0$$

$$4 + (-13) + 9 = 0$$

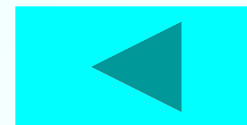
$$x_1 = 1, x_2 = \frac{9}{4}$$

Прием 2

$$4x^2 + 11x + 7 = 0$$

$$4 + 7 = 11$$

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{-7}{4}$$



Пример 2.

Решите уравнение $2x^2 - 11x + 5 = 0$

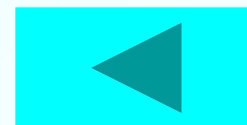
$$\xrightarrow{\hspace{1.5cm}} 2x^2 - 11x + 5 = 0$$

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

Решаем по теореме Виета полученное уравнение,

и его корни 10 и 1 делим на 2.

Получаем корни 5 и $\frac{1}{2}$



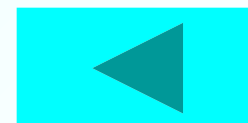
Реши самостоятельно.

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$



ТЕСТ «КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

1. Какие из данных уравнений являются квадратными:

1) $5x^2 - 14x + 17 = 0$

2) $-7x^2 - 13x + 8 = 0$

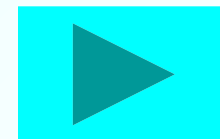
3) $-13x^2 + x^3 - 1 = 0$

4) $17x + 24 = 0$?

Ответы:

А. Только 1; Б. 1) и 2); В. Только 3

Г. 1), 2) и 3); Д. 4) и 2)



2. Запишите квадратное уравнение, если его коэффициенты: $a=2$, $b=3$, $c=4$.

А. $3x^2+2x+4=0$;

Б. $4x^2+2x+3=0$;

В. $2x^2+3x+4=0$.

3. Не решая, определите, сколько корней имеет уравнение $2x^2+5x-7=0$?

А. Нет корней;

Б. Два корня ;

В. Один корень.

4. Найдите сумму и произведение корней уравнения $x^2-x-2=0$.

А. 2 и -1;

Б. -2 и -1;

В. 1 и -2.



5. Запишите приведенное квадратное уравнение, имеющие корни 3 и -1.

А. $x^2-3x-2=0$; Б. $x^2+3x-2=0$; В. $x^2-2x-3=0$

6. Корнями уравнения $2x^2-50=0$ являются числа:

А. 5 и -5

Б. 0 и 5

В. 2 и 25

7. Уравнение $3x^2-6x=0$ верно при x равном:

А. 2 и 3

Б. -2 и 0

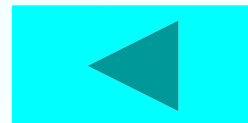
В. 2 и 0

8. Решите квадратное уравнение $7x^2-x-8=0$.

9. Найдите корни уравнения, используя теорему Виета $x^2-5x+6=0$.

10. Решите уравнение $3x^2-2x-16=0$

Проверь
себя



ОТВЕТЫ.

1. Б

2. В

3. Б

4. В

5. В

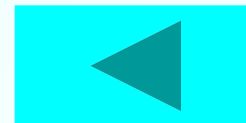
6. А

7. В

8. -1 и $\frac{8}{7}$

9. 2 и 3

10. -2 и $\frac{8}{3}$



Использованные источники:

1. «Алгебра-8» Ю. Н. Макарычев и др. под редакцией С. А. Теляковского, М.: Просвещение, 2007.
2. Математика: Справ. материалы: Кн. для учащихся. - 2-е изд. - М.: Просвещение, 2008.
3. Примеры
http://www.berdov.com/docs/equation/quadratic_equations/
4. Теория
<http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%F0%D0%F2%D0%EE%D0%F3%D0%ED%D0%ED%D0%8%D0%5>
5. Приемы устного решения уравнений
<http://zznay.ru/matematika/1-prezentacii/110-kvadratnye-uravneniya.html>

