Математика 2

Неопределенный интеграл

Лектор:
доцент отделения математики и информатики
Имас Ольга Николаевна

Раздел 1. НЕОПРЕДЕЛННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Опр. 1

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a, b), называется *первообразной* для $f(x)$, если $\forall x \in (a, b)$ выполняется

$$F'(x) = f(x)$$

ТЕОРЕМА.1 (свойство первообразной)

Если в некотором конечном или бесконечном интервале D функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то $F(x)+C$ (C – $const$) тоже первообразная.

Обратно. Каждая первообразная для $f(x)$ может быть представлена в форме

$$F(x)+C.$$

Опр. 2.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенной на интервале (a, b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$.

Обозначают: $\int f(x)dx$

x – переменная интегрирования

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$\int$ – знак интеграла.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx$

3. $\int dF(x) = F(x) + C$

4. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

5. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

6. $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

1(a). $\int dx = x + C$

1(b). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

7(a). $\int e^x\,dx = e^x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\,\dfrac{x}{a} + C$

8(a). $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} arctg\,x + C \\ -\,arcctg\,x + C \end{cases}$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

9(a). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a + x}{a - x}\right| + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$

13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

16. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

17. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$

18. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$

19. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

Методы интегрирования

1. Табличное интегрирование

2. Метод подведения под знак дифференциала (подстановки)

ТЕОРЕМА 2.

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, где первообразная не табличная

Пусть $x=\phi(t)$, $\phi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию.

Тогда $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

Подведение под знак дифференциала

Вспомним определение дифференциала: $d\phi(t)= \phi\,'(t)dt$

Выразим dt: $dt = \dfrac{d\varphi(t)}{\varphi'(t)}$ Тогда $\int \dfrac{f(\varphi(t))\cancel{\varphi'(t)}d\varphi(t)}{\cancel{\varphi'(t)}} = \int f(\varphi)d\varphi$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sin x dx}{\boxed{\cos x}} = \int \frac{\sin x d\cos x}{\cos x \cdot (\cos x)'} = \int \frac{\cancel{\sin x} d\cos x}{\cos x \cdot (-\cancel{\sin x})} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

Замена переменной

Интегрирование квадратных трехчленов

3. Интегрирование по частям

ТЕОРЕМА 3.

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ две дифференцируемые функции

Тогда $$\int U dV = UV - \int V dU$$

Удобно все интегралы, которые нужно брать по частям, разбить на 3 группы

I. (циклический)

$$\int p_n(x) a^x dx$$

$$\int p_n(x) \cos x dx$$

$$\int p_n(x) \sin x dx$$

$$\int \underbrace{p_n(x)}_{U} \underbrace{e^x dx}_{dV}$$

II.

$$\int \ln x \cdot P_n(x) dx$$

$$\int arctgx \cdot P_n(x) dx$$

$$\int \underbrace{\arcsin x}_{U} \cdot \underbrace{P_n(x) dx}_{dV}$$

III.

$$\int a^{mx} \cos nx \, dx$$

$$\int \underbrace{a^{mx}}\, \underbrace{\sin nx \, dx}$$

$U = a^{mx}$

$U = sin(nx)$

4. Интегрирование рациональных дробей

ОПР. 3

Рациональной дробью (дробно-рациональной функцией) называется частное от деления двух целых рациональных функций

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

Если $n<m$, то дробь правильная

Теорема 4. Всякий многочлен n-ой степени разлагается на n линейных множителей и множитель – коэффициент при x^n .

Теорема 5. Многочлен P_n не может иметь более чем n различных корней. Если корни повторяются, то их объединяют и говорят, что $x=x_i$ – корень кратности k.

Теорема 6. Если среди корней есть мнимые, то они обязательно сопряженные и множитель, за счет которого образуются мнимые корни, можно оставлять в виде квадратного трехчлена x^2+px+q.

Таким образом, для любого $P(x)$ можно записать:

$$P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}\ldots(x^2 + p_s x + q_s)^{m_s}$$

ОПР. 4

Простейшими (элементарными) дробями называются дроби следующего вида

$$\frac{A}{x - x_1} \qquad \frac{A}{(x - x_1)^m} \qquad \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \qquad \frac{Ax + B}{\left(x^2 + px + q\right)^m}$$

ТЕОРЕМА 7.

Всякая правильная рациональная дробь $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ может быть представлена в виде суммы конечного числа элементарных дробей, вид которых определяется разложением на множители знаменателя

$$P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}\ldots(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}$$

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \left[\boxed{\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}}}\right] + \left[\boxed{\frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}}}\right] + \ldots +$$

$$+ \left[\boxed{\frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \ldots + \frac{M_{m_1}x + N_{m_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}}}\right] + \ldots +$$

$$+ \left[\frac{F_1x + G_1}{x^2 + p_sx + q_s} + \frac{F_2x + G_2}{(x^2 + p_sx + q_s)^2} + \ldots + \frac{F_{m_s}x + G_{m_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}}\right]$$

$A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{k_2}, M_1, \ldots, M_{m_1}, N_1, \ldots, G_{m_s}$ - неопределенные коэффициенты

Порядок действий при вычислении интеграла от рационального выражения

1. Выделить целую часть (сделать дробь $Q(x)/P(x)$ правильной)
2. Разложить знаменатель на множители.
3. Записать дробь в виде суммы простейших дробей.
4. Определить коэффициенты
5. Проинтегрировать

5. Интегрирование тригонометрических выражений

Будем использовать запись интеграла от тригонометрических выражений

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

это означает, что над синусом и косинусом проведены только рациональные операции (+, –, ·, : , ^).

Универсальная тригонометрическая подстановка $\boxed{tg(x/2)=t.}$

Выразим *x* и получим

$$x = 2arctgt \quad => \boxed{dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} \qquad \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Более простые методы используются в следующих случаях:

1. $\int \sin kx \cos mx dx, \quad \int \cos kx \cos mx dx, \quad \int \sin kx \sin mx dx$

Следует использовать формулы:

$$\sin k\,x \cdot \cos l\,x = \frac{1}{2}\left[\sin(k-l)\,x + \sin(k+l)\,x\right]$$

$$\sin k\,x \cdot \sin l\,x = \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)\,x - \cos(k+l)\,x\right]$$

$$\cos k\,x \cdot \cos l\,x = \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)\,x + \cos(k+l)\,x\right]$$

2. Интегралы вида $\int \sin^n x\, dx \quad \int \cos^n x\, dx \quad \int \sin^n x \cos^m x\, dx$

а) n – четное $\Rightarrow$ понизить степень:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

б) n – нечетное $\Rightarrow$ отделить одну нечетную степень, взять кофункцию в качестве новой переменной.

3. $\int R(\sin x, \cos x)dx$

а) подынтегральная функция нечетна относительно синуса

$$\int R(-\sin x, \cos x)dx = -\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$$\cos x = t$$

б) подынтегральная функция нечетна относительно косинуса

$$\int R(\sin x, -\cos x)dx = -\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$$\sin x = t.$$

в) подынтегральная функция четная относительно синуса и косинуса

$$\int R(-\sin x, -\cos x)dx = \int R(\sin x, \cos x)dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$$tgx = t => dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

4. Интегралы вида $\int tg^n x\, dx$

$$\int ctg^n x\, dx \quad (n > 0)$$

а) Рекомендуемая подстановка $tgx = t \;=>\; dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$$ctgx = t \;=>\; dx = -\frac{dt}{1+t^2}$$

б) применить формулы $tg^2 x = \sec^2 x - 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$

$$ctg^2 x = co\sec^2 x - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

6. Интегрирование иррациональных выражений

$$1.\int R(x,\sqrt{x^2+px+q})dx$$

Выделить полный квадрат в x^2+px+q

Рекомендуемая подстановка:

$$2.\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$$

$$x=a\cdot\sin\ t \quad dx=a\cdot\cos t\,dt$$

$$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$$

$$x=a\cdot tg\ t \quad dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$$

$$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$$

$$x=a\cdot\sec\ t=\frac{a}{\cos t} \quad dx=a\frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t}$$

3. $\int R(x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}, \ldots)dx$ $\qquad x = t^{s}$

α, β, γ …– дробные рациональные числа,
s – наименьшее общее кратное α, β, γ

4. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}, \ldots\right)dx$ $\qquad \frac{ax+b}{cx+d} = t^{s}$

α, β, γ …– дробные рац. числа, s – наименьшее общее кратное α, β, γ

5. Дифференциальный бином

ОПР. 5 Выражение вида $x^m(a+bx^n)^p$, где (m,n,p,a,b) – *const*, называется дифференциальным биномом.

Теорема 8. (Чебышева)

Интегралы $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ $(m,n,p \in Q)$ выражаются в конечном виде через элементарные функции, если оказывается целым одно из чисел:

1) $p \in Z$ подстановка $x = t^s$

(s – наименьшее общее кратное знаменателей m и n)

2) $\dfrac{m+1}{n} \in Z$ Подстановка $a+bx^n = t^s$, где *s* – знаменатель *p*

3) $\dfrac{m+1}{n} + p \in Z$ Подстановка $\dfrac{a+bx^n}{x^n} = t^s$, где *s* – знаменатель *p*

Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

$$\int e^{-x^2}dx$$ – интеграл Пуассона.

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{si}(x)$$ – интегральный синус.

$$\int \frac{\cos x}{x}dx = \mathrm{co}(x)$$ – интегральный косинус.

$$\int \frac{e^x}{x}dx$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}(x)$$ – интегральный логарифм.

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d})dx$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})dx$$ – эллиптические интегралы