

Кубанский государственный технологический университет
Институт информационных технологий и безопасности
Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности

Учебная дисциплина

Электротехника и электроника

Лекция № 11

**Операторный метод анализа
переходных процессов**

Учебные вопросы:

1. Преобразования Лапласа и его свойства.
2. L –изображение элементов в электрических цепях.
3. Методика анализа переходных процессов в линейных электрических цепях операторным методом.

Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 185 –187.
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 121 –132.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 114 –122.

1. Преобразования Лапласа и его свойства.

Операторный метод анализа позволяет сводить линейные дифференциальные уравнения к более простым алгебраическим уравнениям.

Формальные правила с оператором дифференцирования, предложенные Хевисайдом (1892 г.)

$$p^0 = 1, \rightarrow p = \frac{d}{dt}, \rightarrow p^2 = \frac{d^2}{dt^2} \rightarrow, \dots, \rightarrow p^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

В основе операторного метода анализа переходных процессов лежит преобразование Лапласа, которое позволяет перенести решение из области функций действительного переменного t в область комплексного переменного p :

$$p = j\omega$$

При этом методе нет необходимости определения постоянных интегрирования

$$L(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Преобразование
Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} L(p) \cdot e^{pt} dp$$

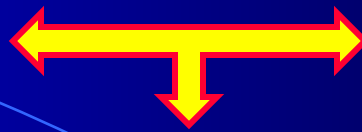
Прямое

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{c_0 t}, \rightarrow f(t) = 0 \text{ при } t \rightarrow 0$$

Обратное

$$L(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Изображение
по Лапласу



$$f(t) \Leftrightarrow L(p)$$

$$L(p) = L[f(t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} L(p) \cdot e^{pt} dp$$

Оригинал
функции

Между парой преобразований Лапласа и преобразований Фурье существует связь: преобразование Фурье есть частный случай преобразования Лапласа при $\alpha = 0$.

$$p = \alpha + j\omega$$

Пример: Найдем изображение по Лапласу от единичной функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Используя
определение прямого
преобразования
Лапласа

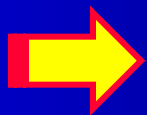
$$L(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} 1(t) \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$$

$$1(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p}$$

Размерность $[L(p)] = [f(t)] \cdot [t]$, т.е. размерность изображения равна размерности оригинала, умноженной на время.

Основные свойства (теоремы) преобразований Лапласа

1. Линейности



$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots \Leftrightarrow a_1 L_1(p) + a_2 L_2(p) + \dots$$

Это свойство позволяет находить изображение таких сигналов, которые могут быть представлены суммами относительно простых слагаемых с уже известными изображениями.

2. Дифференцирование оригинала

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pL(p) - f(0)$$

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pL(p), \rightarrow \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \Leftrightarrow p^2 L(p)$$

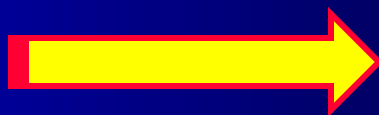
Ненулевые начальные условия

Нулевые начальные условия

3. Интегрирование оригинала

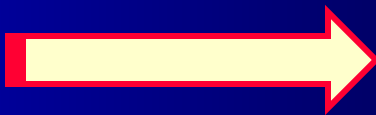
$$\int_0^t f(t) dt \Leftrightarrow \frac{L(p)}{p}; \rightarrow \int_0^t \int_0^t f(t) dt^2 \Leftrightarrow \frac{L(p)}{p^2}$$

4. Теорема запаздывания



$$f(t - t_0) \Leftrightarrow L(p) \cdot e^{-pt_0}$$

5. Теорема смещения



$$f(t) \cdot e^{\alpha t} \Leftrightarrow L(p - \alpha)$$

6. Теорема свертывания (теорема умножения изображений)

$$L_1(p) \cdot L_2(p) \Leftrightarrow \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$$

Таблица изображений по Лапласу

1

$$1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}$$

2

$$a \Leftrightarrow \frac{a}{p}$$

3

$$t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2}$$

4

$$\exp(-at) \Leftrightarrow \frac{1}{p+a}$$

5

$$\frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} \Leftrightarrow \frac{1}{a \cdot p + 1}$$

6

$$1 - \exp(-at) \Leftrightarrow \frac{a}{p \cdot (p+a)}$$

7

$$(1 - at) \exp(-at) \Leftrightarrow \frac{p}{(p+a)^2}$$

8

$$\frac{1}{a^2} e^{at} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2(p-a)}$$

9

$$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} e^{-at} \Leftrightarrow \frac{p}{p^2(p+a)}$$

10

$$\cos \omega t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

11

$$\sin \omega t \Leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

12

$$\exp(-at) \sin \omega t \Leftrightarrow \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

13

$$\exp(-at) \cos \omega t \Leftrightarrow \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

14

$$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \Leftrightarrow \frac{1}{(p+a) \cdot (p+b)}$$

15

$$\exp(-at) \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{(p+a) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

16

$$\exp(-at) \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{(p+a) \sin \varphi - \omega \cos \varphi}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

17

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

Пользуясь основными свойствами преобразований Лапласа, можно получить основные законы электрических цепей в операторной форме.

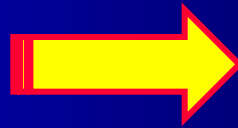
2. L - изображение элементов в электрических цепях

□ Емкостной элемент

Соотношение между L – изображением тока в емкостном элементе и оригиналом $i(t)$ определяется следующим соотношением (по теореме дифференцирования):

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \Leftrightarrow C[pU_c(p) - U_c(0)] = I(p)$$

L – изображение тока
в емкости



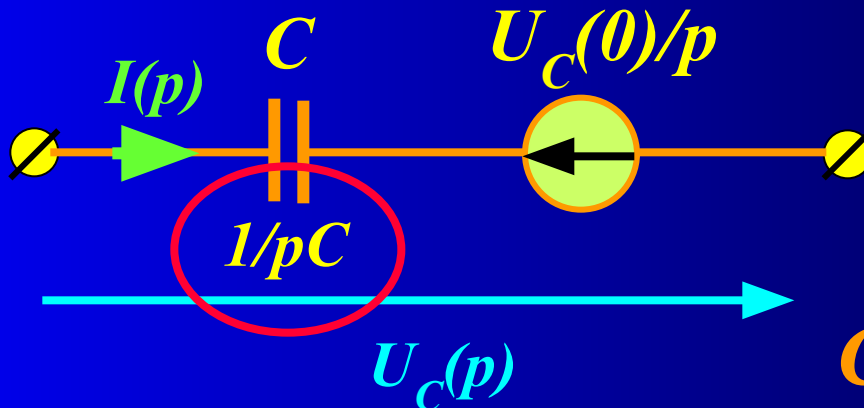
$$I(p) = CpU_c(p) - CU_c(0)$$

L – изображение
напряжения на емкости



$$U_c(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{U_c(0)}{p}$$

$U_c(0)$ – определяет
начальные условия на
емкостном элементе



$$C \Leftrightarrow 1/pC$$

$$X_c(p) = \frac{1}{p \cdot C}$$

□ Индуктивный элемент

Соотношение между L – изображением тока в индуктивном элементе и оригиналом $u_L(t)$ определяются следующей зависимостью

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Leftrightarrow p \cdot L \cdot I(p) - L \cdot I(0) = U_L(p)$$

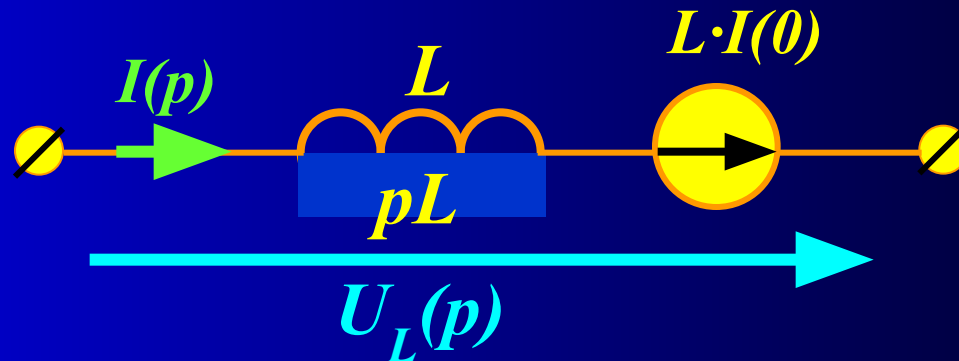
$$u_L(t) \Leftrightarrow U_L(p)$$

$$i_L(t) \Leftrightarrow I_L(p)$$

Следовательно, L – изображение напряжения на индуктивном элементе определяются зависимостью

$$U_L(p) = p \cdot L \cdot I(p) - L \cdot I(0)$$

$$L \Leftrightarrow pL$$



Начальное
напряжение

$$X_L(p) = p \cdot L$$

$I(0)$

Определяет начальные условия задачи
(начальный ток)

❑ Операторные сопротивления

При нулевых начальных условиях:

$$I_L(0) = 0$$

$$U_C(0) = 0$$

Операторное напряжение
на емкостном элементе

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) = Z_C(p) \cdot I(p)$$

$$\frac{1}{pC} = Z_C(p)$$

$$Y_C(p) = \frac{1}{Z_C(p)} = pC$$

Операторные **сопротивление**
и **проводимость** емкостного
элемента

Операторное напряжение
на индуктивном элементе

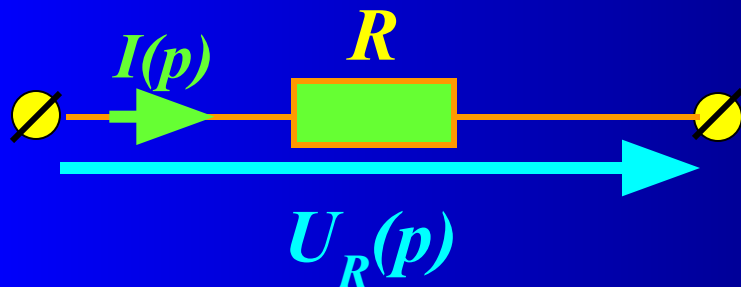
$$U_L(p) = p \cdot L \cdot I(p) = Z_L(p) \cdot I(p)$$

$$pL = Z_L(p)$$

$$Y_L(p) = \frac{1}{Z_L(p)} = \frac{1}{pL}$$

Операторные **сопротивление**
и **проводимость** индуктивного
элемента

❖ Резистивный элемент

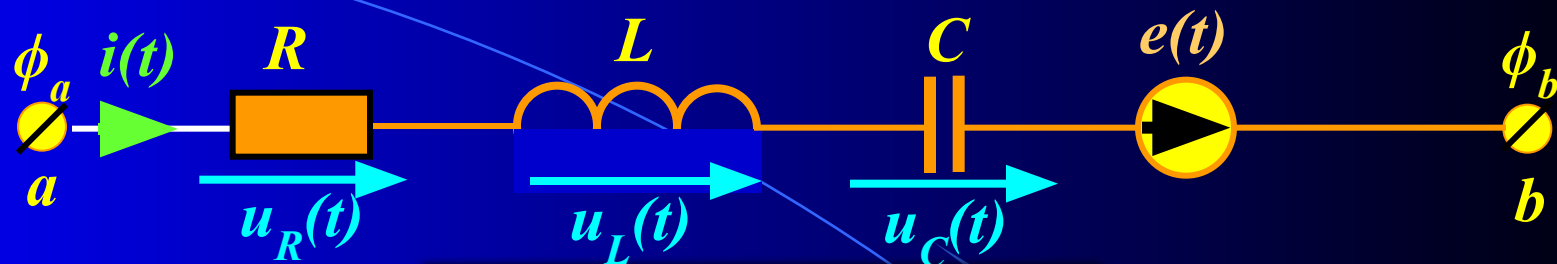


$$U_R(p) = R \cdot I(p) = Z_R(p) \cdot I(p)$$

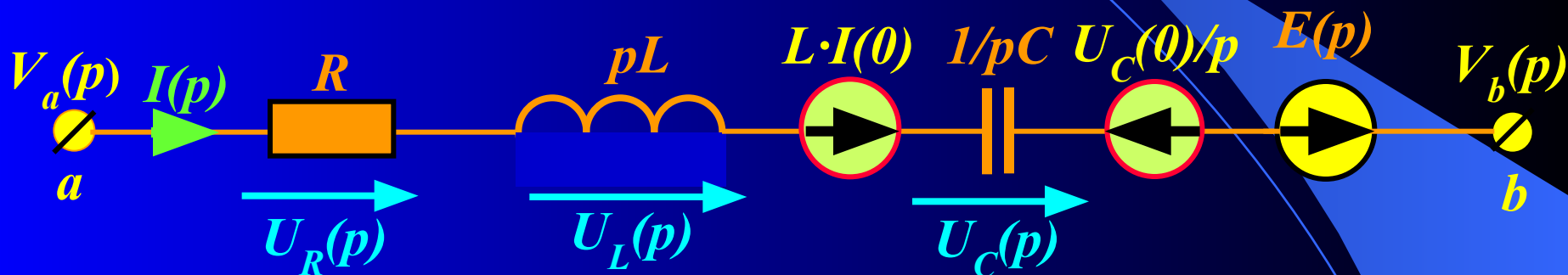
$$Z_R(p) = R$$

$$Y_R(p) = \frac{1}{R}$$

□ Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме



Эквивалентная схема в операторной форме



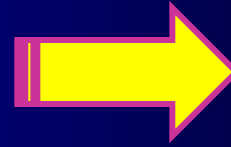
Обобщенный закон Ома в операторной форме

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$$

$$I(p) = \frac{V_a(p) - V_b(p) + E(p) + LI(0) - \frac{U_C(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}}$$

Полное сопротивление цепи в операторной форме

Первый закон Кирхгофа в операторной форме: алгебраическая сумма операторных токов в узле равна нулю



$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0$$

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(p) + L_k I_k(0) - \frac{U_{Ck}(0)}{p} \right]$$

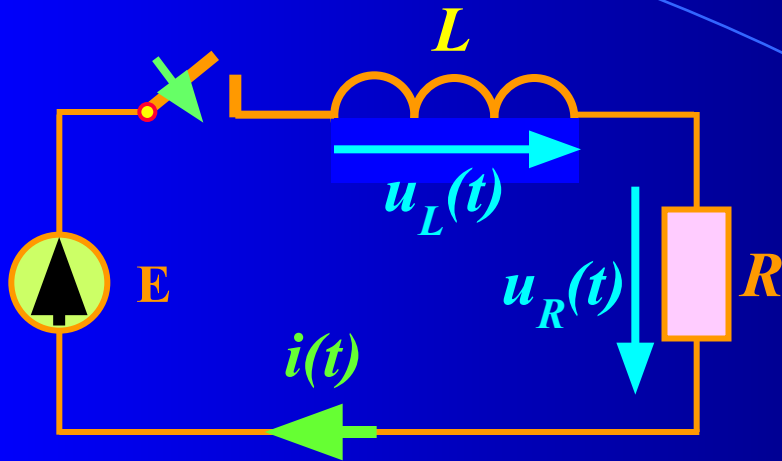
Второй закон Кирхгофа в операторной форме

Алгебраическая сумма операторных падений напряжений в контуре равна алгебраической сумме операторных ЭДС и напряжений контура

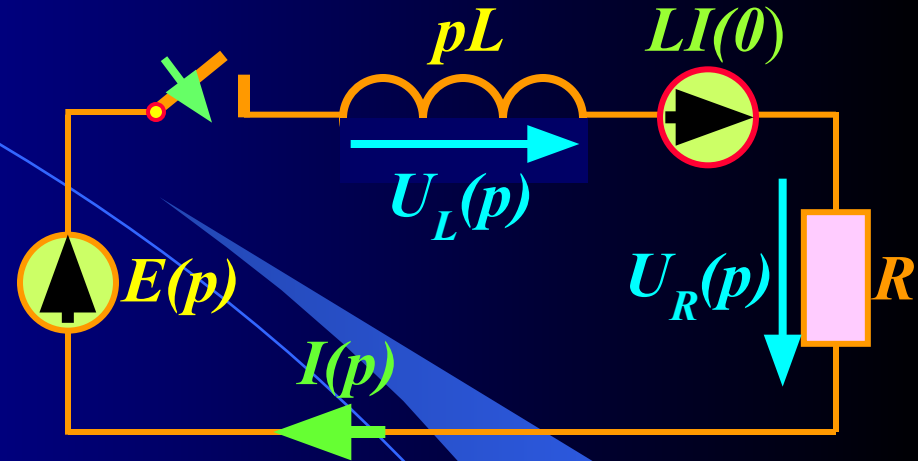
❖ **Методика анализа** переходных процессов в линейных электрических цепях **операторным методом**

1. Из расчета цепи до коммутации найти токи в индуктивности $I_L(0)$ и напряжения на емкости $U_C(0)$.
2. По виду топологии исследуемой цепи, получившейся после коммутации, составить эквивалентную операторную схему.
3. Выбрать метод расчета и найти изображение искомых величин.
4. По изображению искомых величин (с помощью таблицы преобразований Лапласа) найти оригинал, т.е. искомую функцию

Подключение источника постоянной ЭДС к RL -цепи



До коммутации $I(0) = 0$



Операторная эквивалентная схема

На основании второго закона Кирхгофа с учетом нулевых начальных условий

$$U_L(p) + U_R(p) = E(p)$$

При этом операторные изображения падений напряжений на элементах электрической цепи примут вид

$$I(p) \cdot pL + I(p) \cdot R = \frac{E}{p}$$

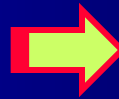
$$I(p)(pL + R) = \frac{E}{p}$$

$$I(p)Z(p) = \frac{E}{p}$$

Операторные изображения тока в электрической цепи

$$I(p) = \frac{E}{p \cdot (pL + R)} = \frac{E}{pL(p + \frac{R}{L})} = \frac{E}{R} \frac{\frac{1}{\tau}}{p(p + \frac{1}{\tau})}; \rightarrow \text{где} \rightarrow \tau = \frac{L}{R}$$

Согласно таблице изображений



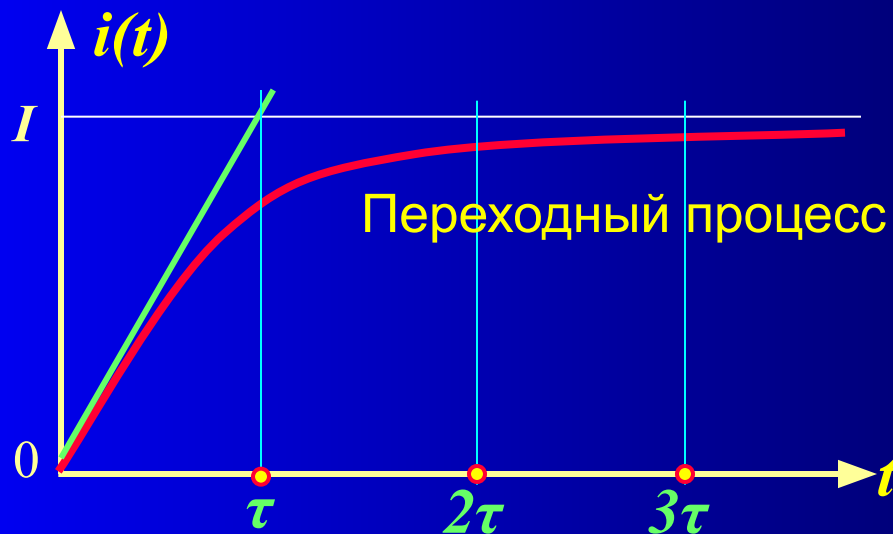
6

$$1 - \exp(-at) \Leftrightarrow \frac{a}{p \cdot (p + a)}$$

находим оригинал тока и
затем его предельное
значение

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] = I \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

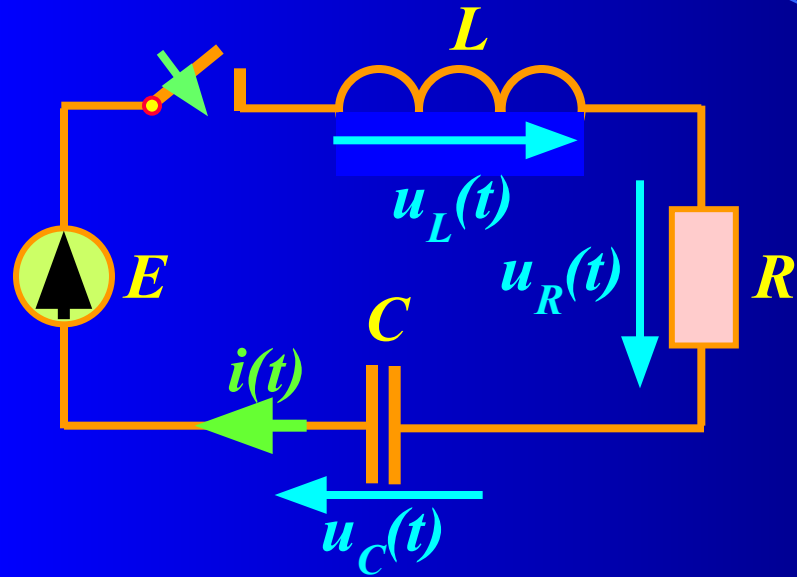
$$\lim_{t \rightarrow \infty} I \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] = I$$



Переходный процесс заканчивается через время $\rightarrow \cong 3\tau$

$$i(3\tau) = I \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{3\tau}{\tau}\right) \right] = I \cdot [1 - \exp(-3)] = 0,95 \cdot I$$

Рассмотрим последовательный колебательный контур при ненулевых начальных условиях, т.е. $U_C(0) \neq 0$ и $I_L(0) \neq 0$.



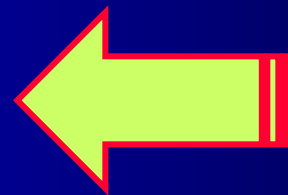
Уравнение связи по второму закону Кирхгофа имеет вид:

$$\begin{aligned} e(t) &= i(t) \cdot R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \\ &= i(t) \cdot R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + U_C(0) \end{aligned}$$

Применив к этому выражению прямое преобразование Лапласа и учитывая ряд свойств этого преобразования получаем:

$$E(p) = RI(p) + pL \cdot I(p) - LI(0) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0)}{p}$$

$$I(p) = \frac{E(p) + LI(0) - U_C(0)}{R + pL + \frac{1}{pC}}$$



Закон Ома в операторной форме для данной цепи

Включение колебательного контура на источник постоянного напряжения

Уравнение для изображение тока по закону Ома для нулевых начальных условий примет вид:

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{E(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{E}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{C \cdot E}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Определим корни характеристического уравнения

$$F_2(p) = LCp^2 + RCp + 1$$

$$R > 2\rho$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Воспользовавшись теоремой разложения, которая позволяет при нахождении оригинала операцию интегрирования заменить операцией суммирования, что значительно упрощает расчеты

p_k – корни характеристического уравнения

$$F_2^*(p_k) = \frac{dF_2(p)}{dp} / p = p_k$$

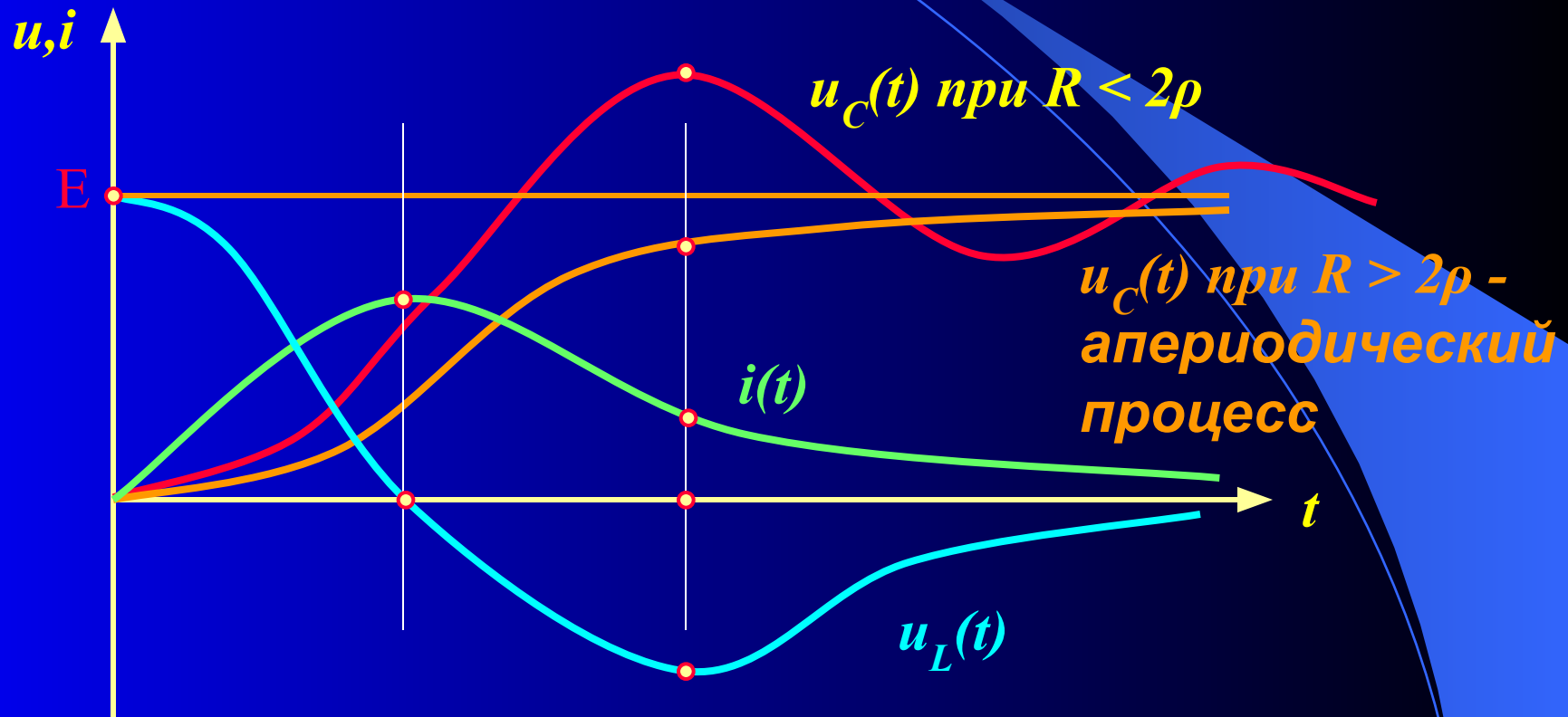
$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2^*(p_k)} e^{p_k t},$$

$$F_2^*(p_1) = 2LCp_1 + RC$$

$$F_2^*(p_2) = 2LCp_2 + RC$$

Подставив значение корней и значение производных в формулу разложения, получим оригинал тока

$$i(t) = \frac{C \cdot E}{2LCp_1 + RC} e^{p_1 t} + \frac{C \cdot E}{2LCp_2 + RC} e^{p_2 t} = -\frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t})$$



$$u_C(t) = E - \frac{E}{p_2 - p_1} (p_1 \cdot e^{p_2 t} - p_2 \cdot e^{p_1 t})$$

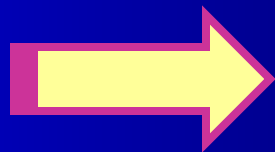
$$u_L(t) = \frac{E}{p_1 - p_2} (p_1 \cdot e^{p_1 t} - p_2 \cdot e^{p_2 t})$$

❑ Операторные передаточные функции

Операторные передаточные функции определяются как отношение изображений выходной реакции электрической цепи к изображению входного воздействия

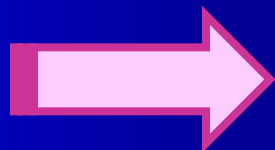
В связи с этим определением различают **четыре вида** передаточных функций:

$$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$$



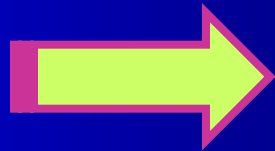
Передаточная функция по напряжению

$$H_I(p) = \frac{I_2(p)}{I_1(p)}$$



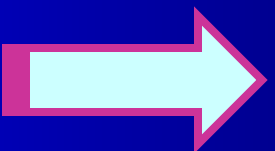
Передаточная функция по току

$$H_Z(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)}$$



Передаточная функция сопротивления

$$H_Y(p) = \frac{I_2(p)}{U_1(p)}$$



Передаточная функция проводимости

Комплексные передаточные функции ($p \Rightarrow j\omega$)

– частотный метод анализа

Задание на самостоятельную работу

Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 185 –187.
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 121 –132.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 114 –122.