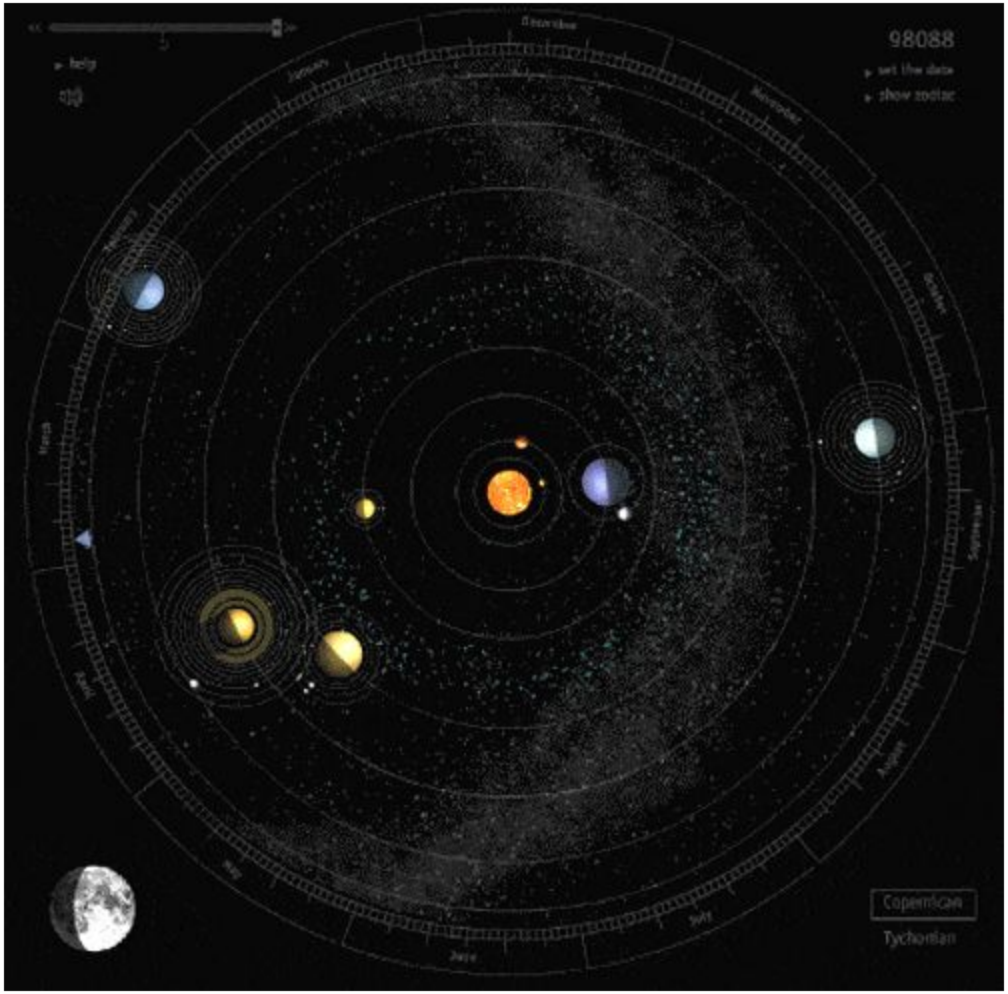
КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ЛЕКЦИЯ **2**

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

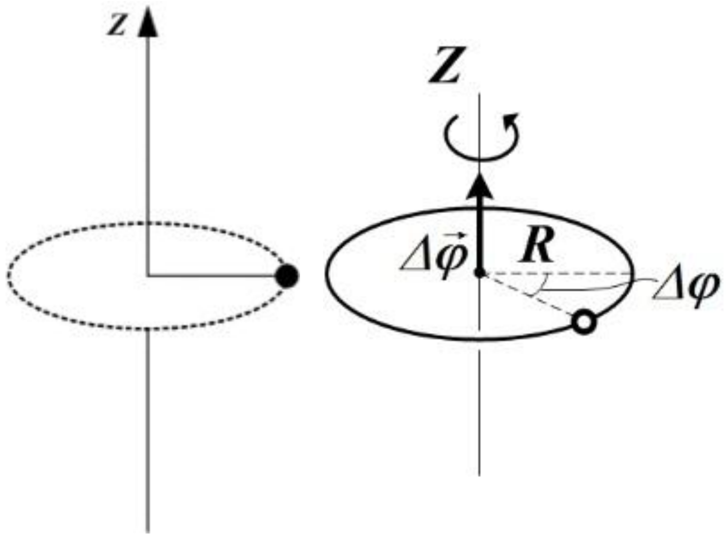
КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



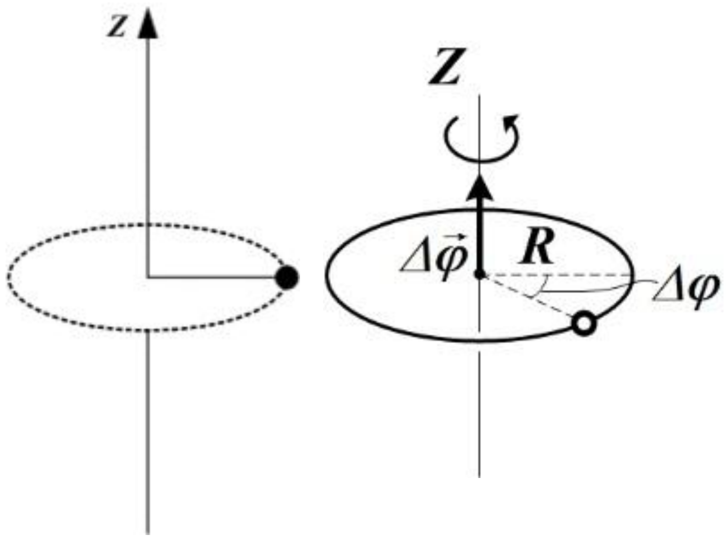
КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



Рассмотрим вращение м.т. относительно неподвижной оси. Поворот м.т. на угол $\Delta\phi$ *м*ожно задать в виде вектора, длина которого равна $\Delta\phi$ лежит он на оси вращения и направление вектора связано с направлением вращения правилом правой руки. Повороты на конечные углы складываются не по правилу параллелограмма, а значит не являются векторами. В то же время повороты на очень малые углы $\Delta\phi$ можно рассматривать как векторы, т.к. для них правило параллелограмма справедливо. Такие вектора обозначают как $\Delta\vec{\varphi}$ или $d\vec{\varphi}$. Направление вектора поворота связывается с направлением вращения тела. Значит $d\vec{\varphi}$ является не истинным вектором, а псевдовектором. Элементарный вектор угла поворота - одна из кинематических характеристик вращательного движения м.т.

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



Векторная величина

$$\boxed{\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}$$

называется ***угловой скоростью*** м.т. (***Δt*** – время, за которое совершается поворот $\Delta\phi$). Как следует из определения, угловая скорость – это также псевдовектор, направленный также как и $d\vec{\varphi}$.

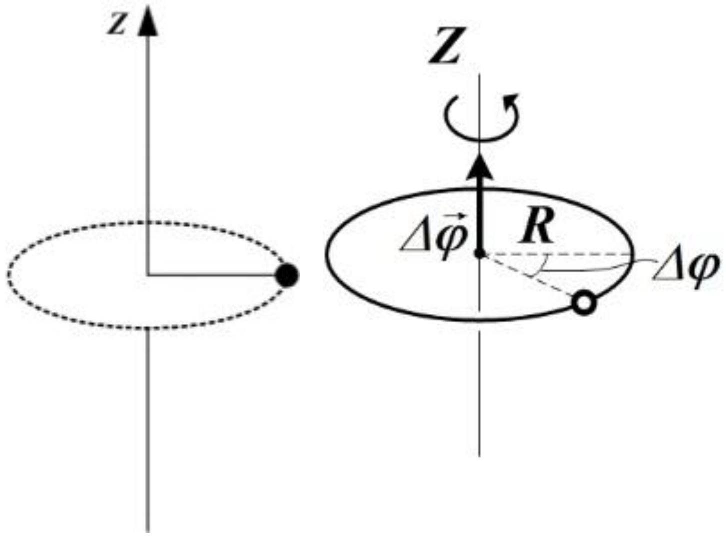
Угловая скорость может меняться как по величине, так и по направлению. Если за время ***Δt*** угловая скорость получает приращение $\Delta\vec{\omega}$, то это изменение характеризуют

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$

угловым ускорением.

Угловое ускорение также является псевдовектором. Если ось вращения неподвижна, то при ускоренном вращении угловое ускорение совпадает по направлению с угловой скоростью, а при замедленном вращении направления угловой скорости и ускорения противоположны.

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



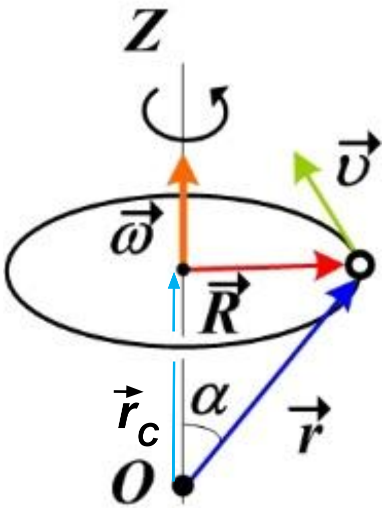
При вращении в каждый фиксированный момент времени м.т. имеет определенные *линейную* скорость $\vec{\upsilon}$ и *линейное* ускорение $\vec{a}$. Найдем связь между угловыми и линейными кинематическими характеристиками м.т. при вращательном движении относительно неподвижной оси.

$$\upsilon = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} R\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(\omega\cdot R)^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a_\tau = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t\to 0} R\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right| = R\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right| = R\varepsilon$$

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



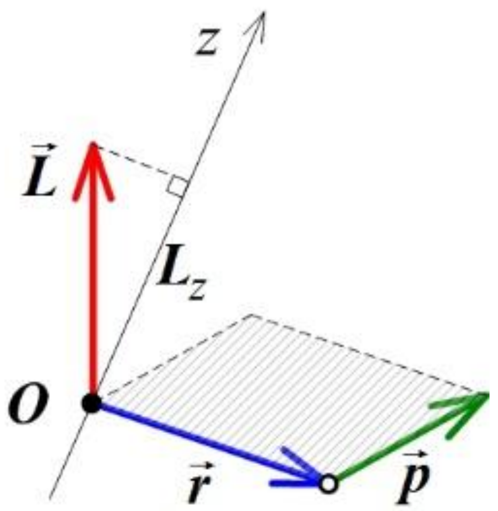
$$\boxed{\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]}$$

$$\boxed{\vec{a}_{\text{n}} = -\omega^2 \cdot \vec{R}}$$

$$\boxed{\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{R}]}$$

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



Моментом импульса м.т. относительно т. О называется аксиальный вектор $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$,
где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из т. О к м.т.;
$\vec{p}$ – импульс м.т.

Моментом импульса системы м.т. относительно т. О называется векторная сумма моментов импульса частиц составляющих систему

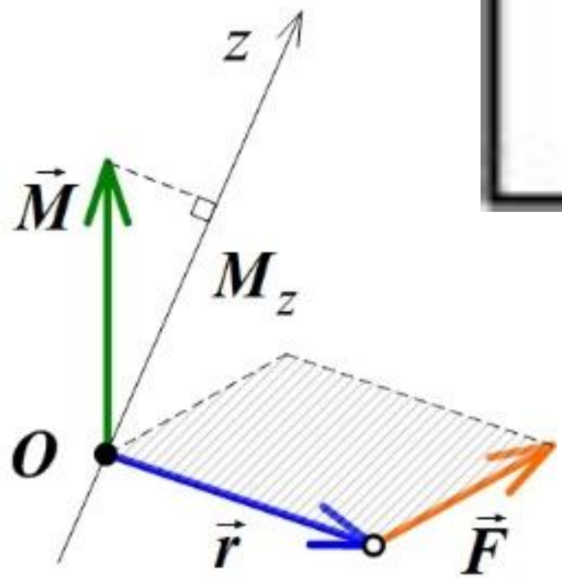
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

Моментом импульса м.т. относительно неподвижной оси z, на которой лежит т. О называется проекция момента импульса м.т. относительно т. О на данную ось $L_z = [\vec{r}, \vec{p}]_{пр\ Z}$

Моментом импульса системы м.т. относительно неподвижной оси z, на которой лежит т. О называется сумма проекций моментов импульса м.т. данной системы относительно т. О на эту ось $L_z = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}, \vec{p}]_{пр\ Z}$

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Моментом силы относительно т. О называется аксиальный вектор $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$,
где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из т. О в точку приложения силы;
$\vec{F}$ – сила, действующая на м.т.



Моментом силы относительно неподвижной оси z, на которой лежит т. О называется проекция момента силы относительно т. О на данную ось

$$M_z = [\vec{r}, \vec{F}]_{пр\ Z}$$

Момент силы – это величина, характеризующая вращательный эффект силы

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Момент инерции – это величина, характеризующая распределение масс в теле и являющаяся мерой инертности тела при вращательном движении.

Момент инерции м.т. относительно неподвижной оси вращения *z* определяется как

$$\boxed{I_z = m r^2},$$

где ***m*** – масса материальной точки; ***r*** – расстояние от оси *z* до м.т.

Момент инерции системы материальных точек относительно оси вращения z – это величина равная сумме моментов инерции материальных точек, входящих в систему, относительно оси *z:*

$$\boxed{I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2}$$

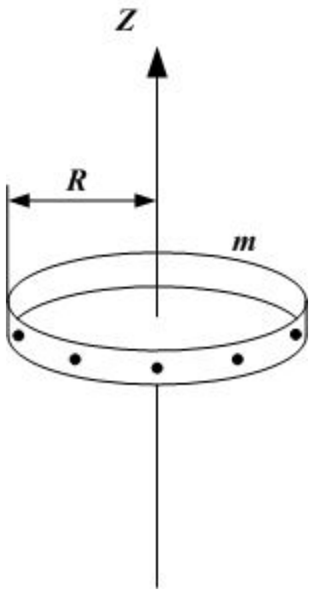
Полагая, что любое твердое тело есть система материальных точек, можно получить выражение для расчета момента инерции твердого тела относительно оси вращения *z*:

$$\boxed{I_z = \int r^2\, dm},$$

где ***dm*** – элементарная масса; ***r*** – расстояние от ***dm*** до *z*.

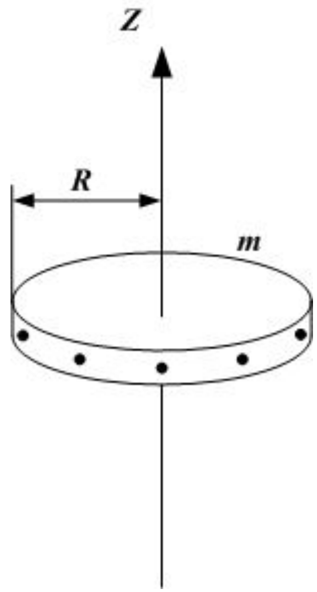
ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

<u>тонкое кольцо</u>



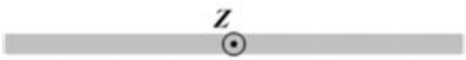
$$I_z = m R^2$$

<u>диск</u>



$$I_z = \frac{m R^2}{2}$$

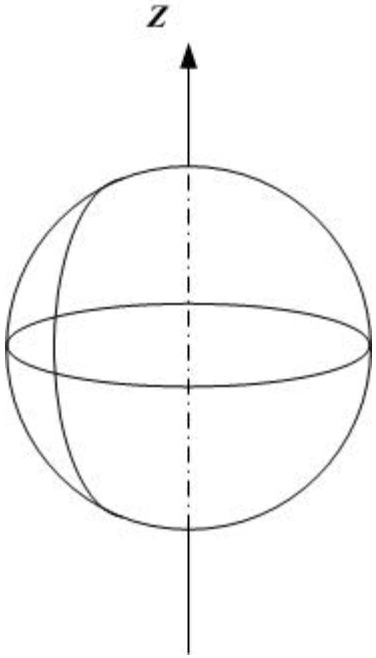
<u>тонкий длинный стержень</u>



$$I_z = \frac{m \ell^2}{12}$$

m–масса стержня;
l – длина стержня.

<u>шар</u>



$$I_z = \frac{2}{5} m R^2$$

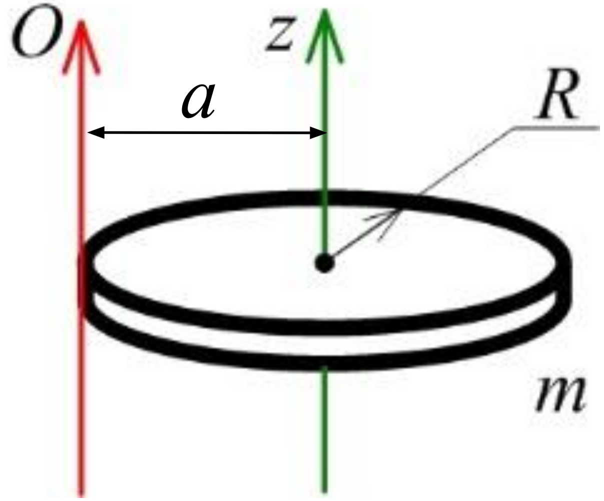
m–масса шара;
R – радиус шара.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Теорема Штейнера

Момент инерции тела I_Z относительно произвольной оси Z равен сумме момента инерции тела I_O относительно оси O, параллельной данной и проходящей через центр массы тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями.

$$I_O = I_Z + m\,a^2$$



ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

<u>Уравнение моментов</u>

Продифференцировав по времени выражение момента импульса м.т. относительно точки получим

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$ ***уравнение моментов для м.т.***

Т.о., за изменение вектора момента импульса м.т. в данной системе отсчета ответственен результирующий момент всех сил, приложенных к м.т. Данное уравнение справедливо при любом движении м.т. по произвольной траектории. Уравнение можно обобщить и для случая системы м.т. :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{BH}}$$ ***- уравнение моментов для системы м.т.***

Здесь $\vec{M}_{BH}$ – результирующий момент всех внешних сил, действующих на систему. Данное выражение является наиболее общей формой записи ***основного уравнения динамики вращательного движения***, поскольку оно справедливо для тел и механических систем как с постоянным, так и с переменным моментом инерции.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

Между кинематическими и динамическими параметрами поступательного и вращательного движения существует аналогия:

$$\vec{F} \to \vec{M}, \quad \vec{p} \to \vec{L}, \quad m \to I, \quad \vec{\upsilon} \to \vec{\omega}$$

и т.д.

Значит из аналогии $\vec{p} = m\vec{\upsilon} \to \vec{L} = I\vec{\omega}.$

Подставив данное выражение для момента импульса в уравнение моментов для системы м.т. и учтя, что момент инерции неизменен, получим

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\varepsilon}}$$

основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Закон сохранения момента импульса

Из основного уравнения динамики вращательного движения следует, что если момент внешних сил равен 0, то момент импульса тела или системы тел остается постоянным:

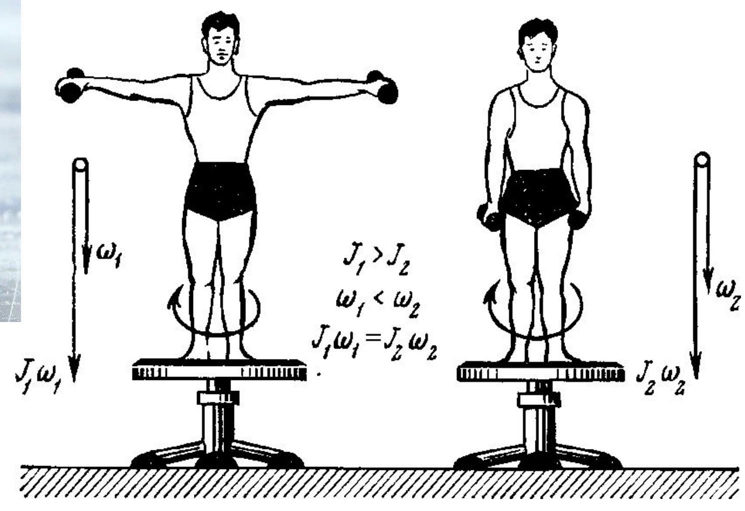
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \text{const.}$$

$$\Downarrow$$

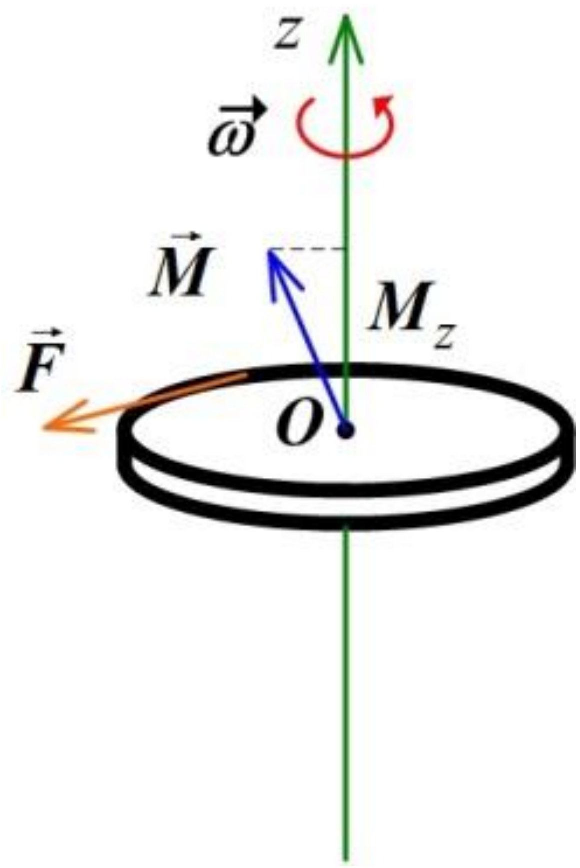
Момент импульса замкнутой механической системы остается неизменным

Закон сохранения момента импульса является следствием изотропности пространства: при повороте системы отсчета на произвольный угол не произойдет изменение результатов измерений по сравнению с предыдущим положением. Изотропность пространства означает, что в пространстве нет какого-то выделенного направления, относительно которого существует «особая» симметрия, все направления равноправны.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



РАБОТА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ



Если под действием силы ***F*** тело совершило поворот на угол ϕ относительно неподвижной оси, то работа силы равна:

$$\boxed{A = M_Z \cdot \varphi}$$

- при постоянном моменте сил относительно оси ***Z***

$$\boxed{A = \int_0^{\varphi} M_Z \cdot d\varphi}$$

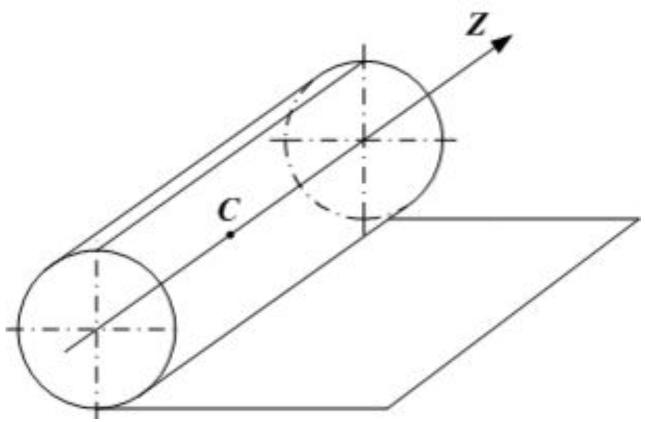
- при переменном моменте сил относительно оси ***Z***

Используя аналогию между вращательным и поступательным движением несложно получить выражение для кинетической энергии вращающегося относительно неподвижной оси тела:

$$\boxed{E_K = \frac{I_Z\,\omega^2}{2}}$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси Z

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ КАТЯЩЕГОСЯ ТЕЛА



Движение катящегося тела можно представить как совокупность поступательного движения и вращательного движения относительно оси ***Z***. Если цент масс тела (точка ***C***) движется со скоростью υ_c, а вращение относительно ***Z*** происходит со скоростью ω, то кинетическая энергия катящегося тела будет равна:

$$\boxed{E_K = \frac{m\,\upsilon_C^2}{2} + \frac{I_Z\,\omega^2}{2}}$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси Z;
m – масса тела.