

**Функция нескольких переменных.  
Общие свойства. Непрерывность  
функции. Полное приращение и  
полный дифференциал.**

Лекция 11

# 1. Определение функции нескольких переменных

При изучении многих явлений приходится встречаться с функциями нескольких независимых переменных.

Пример 1. Площадь прямоугольника  $S$  со сторонами  $x$  и  $y$  выражается формулой  $S=S(x,y)=xy$ .  $\{x,y\} \Rightarrow$  значения  $S$ .

Пример 2. Объем  $V$  прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $x,y,z$  соответственно, выражается формулой  $V=V(x,y,z)=xyz$ .  $\{x,y,z\} \Rightarrow V$

Пример 3.  $u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1+x^2}}$  - функция 4-х переменных.

## Определение 1 $\sqrt{1+x^2}$

Если каждой паре  $(x,y)$  значений двух независимых друг от друга переменных величин  $x,y$  из некоторой области их изменения  $D$  соответствует определенное значение величины  $z$ , то  $z$  есть функция двух независимых переменных  $x,y$ , определенных в области  $D$ .

Обозначение:  $z=f(x,y)$ ,  $z=F(x,y)$ , и так далее.

Способы задания функции: аналитический, табличный, графический.

Например,  $S=xy$

$y/x$	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9

Как и в случае одного независимого переменного, функция двух переменных существует, вообще говоря, не при любых значения  $x, y$ .

## Определение 2

Совокупность пар  $(x, y)$  значений  $x, y$ , при которых определена функция  $z=f(x, y)$ , называется областью определения или областью существования этой функции.

Область определения функции наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений  $x, y$  будем изображать точкой  $M(x, y)$  в плоскости  $OXY$ , то область определения функции изображается в виде некоторой совокупности точек плоскости. Эта совокупность точек называется областью определения функции. В большинстве случаев области – это часть плоскости, ограниченная линиями. Линию, ограничивающую данную область, называют границей области. Точки области, не лежащие на границе называются внутренними точками области. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется открытой или незамкнутой. Если же к области относятся и точки границы, то область называется замкнутой. Область называется ограниченной, если существует такое  $c=const$ , что расстояние до любой точки  $M$  области от начала координат  $O(0, 0)$  меньше  $c$ , то есть  $|OM| < c$ .

## Пример 4

Определить естественную область определения функции  $z=2x-y$ .

## Решение.

Область определения плоскость  $OXY$ , то есть  $\forall x, y \in R$

### Пример 5

Найти область определения функции  $y = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

### Решение

$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$  - все точки  $M(x, y)$ , координаты которых удовлетворяют неравенству лежат в круге радиуса  $R=1$  с центром в начале координат.

### Пример 6

Найти область определения функции  $z = \ln(x+y)$

### Решение

$x+y > 0$  или  $y > -x$  - половина плоскости – область определения функции.

### Пример 7

$S = xy/2$  - площадь треугольника. ООФ –  $x > 0, y > 0$  - основания и высота не могут быть меньше или равны 0.

### Определение 3

Если каждой рассматриваемой совокупности значений переменных  $x, y, z, \dots, u, t$  соответствует определенное значение переменной  $w$ , то  $w$  - функция этих независимых переменных.

$$W = f(x, y, z, \dots, u, t)$$

Так же как и для функции двух переменных, можно говорить об области определения функции трех, четырех и более переменных.

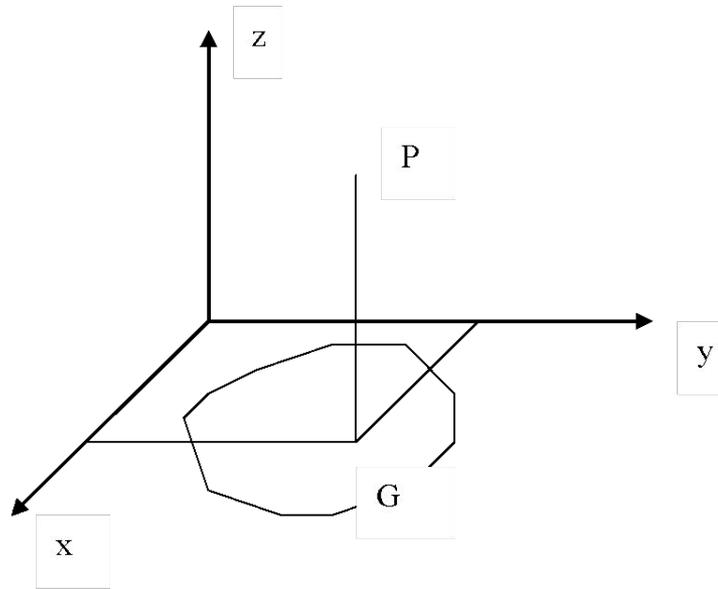
Так для  $u = f(x, y, z)$  – ООФ – совокупность точек  $M(x, y, z)$  пространства.

Так для  $u = f(x, y, z, t)$  – ООФ – совокупность четверок чисел  $(x, y, z, t)$ .

### Пример 8

Для ф-ции  $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}$  ООФ определяется неравенством  $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq 1$

## 2. Геометрическое изображение функции двух переменных

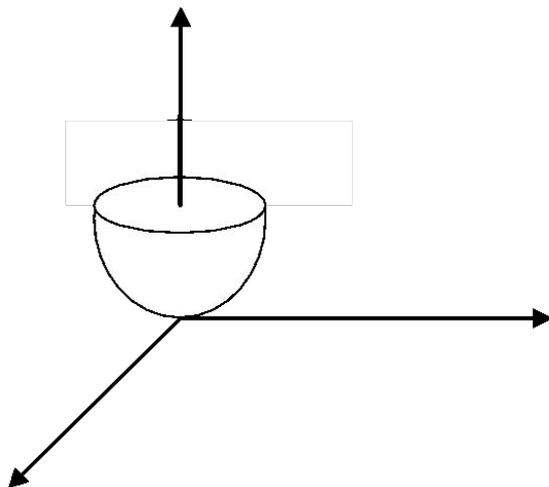


Рассмотрим  $z=f(x,y)$  (1), определенную в области  $G \in OXY$ . В каждой точке области  $G$  восстановим перпендикуляр к плоскости  $OXY$  и на нем отложим отрезок равный значению  $f(x,y)$ . Получим в пространстве точку  $P$  с координатами  $(x,y,z)$ .

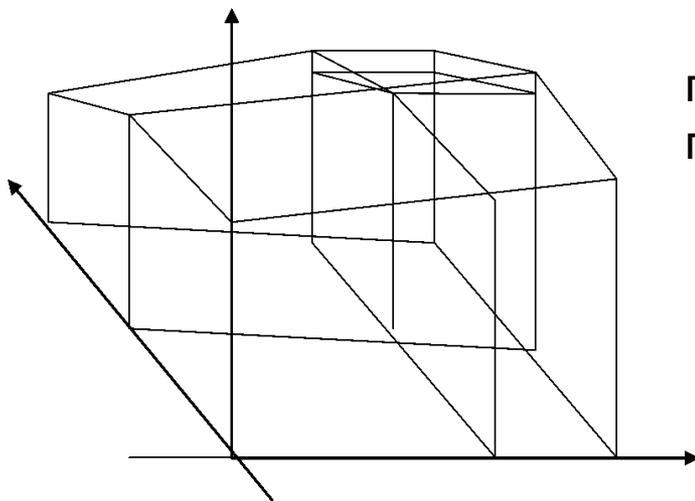
Геометрическое место точек  $P$ , координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называется графиком функции двух переменных. Уравнение (1) определяет некоторую поверхность.

Таким образом, графиком функции двух переменных является поверхность, проектирующая на плоскость  $OXY$  в область определения функции.

Пример  $z = x^2 + y^2$  - уравнение параболоида вращения



### 3. Частное и полное приращение функции



Рассмотрим линию PS пересечения поверхности  $z=f(x,y)$  с плоскостью  $y=\text{const}$ , параллельной плоскости OXZ (см. рис.) Так как в этой плоскости  $y$  сохраняет постоянное значение, то  $z$  вдоль PS будет меняться только в зависимости от изменения  $x$ . Даем  $x$  приращение  $\Delta x$ , тогда  $z$  получит \ приращение, которое называют частным приращением  $z$  по  $x$  и обозначают  $\Delta_x z$  (на

рисунке это отрезок SS'), так что  $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$  (1)

Аналогично, если  $x$  сохраняет постоянное значение, а  $y$  получает приращение  $\Delta y$ , то  $z$  получает приращение, называемое частным приращением  $z$  по  $y$ . Обозначение  $\Delta_y z$  (на рисунке это отрезок TT')

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (2)$$

Приращение функция получает “вдоль линии” пересечения поверхности  $z=f(x,y)$  с плоскостью  $x=\text{const}$  параллельной плоскости OYZ.

Наконец, сообщив аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , а аргументу  $y$  приращение, получим для  $z$  новое приращение  $\Delta z$ , которое называется полным приращением функции и определяется формулой  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  (3)

В общем случае, полное приращение не равно сумме частных приращений, то есть  $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

## Пример

$$z=xy$$

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) - xy = y\Delta x$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

Аналогичным образом определяются частные и полное приращение функции любого числа переменных

$$u = f(x, y, z)$$

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)$$

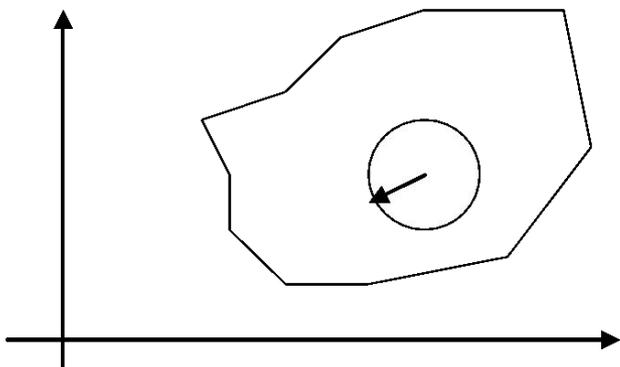
$$\Delta_z u = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

## 4. Непрерывность функции нескольких переменных

Введем понятие окрестности данной точки.

Окрестностью радиуса  $r$  точки  $M_0(x_0, y_0)$  называется совокупность всех точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих неравенству  $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$ , то есть совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса  $r$  с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .



Пусть дана функция  $z=f(x, y)$ , определенная в некоторой области  $G$  плоскости  $OXY$ .

Рассмотрим некоторую определенную точку  $M_0(x_0, y_0)$ , лежащую в области  $G$  или на ее границе.

### Определение 1

Число  $A$  называется пределом функции  $f(x, y)$  при стремлении точки  $M(x, y)$  к точке  $M_0(x_0, y_0)$ , если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $r > 0$ , что для всех точек  $M(x, y)$ , для которых выполняется неравенство  $|MM_0| < r$  имеет место неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = A$$

## Определение 2

Пусть точка  $M_0(x_0, y_0)$  принадлежит области определения функции  $f(x, y)$ .  
Функция  $z=f(x, y)$  называется непрерывной в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , если имеет место равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$  (1)

Причем точка  $M(x, y)$  стремится к точке  $M_0(x_0, y_0)$  произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Если обозначить  $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$ , то равенство (1) можно переписать так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \quad (1')$$

Или

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad (1'')$$

Обозначим  $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ . При  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta z \rightarrow 0$  и наоборот.

Так как, выражение, стоящее в квадратных скобках в равенстве (1'') есть полное приращение функции  $\Delta z$ , то равенство (1'') можно переписать в виде

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \Delta z = 0 \quad (1''')$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Если в некоторой точке  $N_0(x_0, y_0)$  не выполняется условие (1), то точка  $N_0(x_0, y_0)$  называется точкой разрыва функции  $z=f(x, y)$ . Условие (1) может не выполняться, например, в следующих случаях:

1)  $z=f(x,y)$  определена во всех точках некоторой окрестности точки  $N_0(x_0, y_0)$  за исключением самой точки  $N_0(x_0, y_0)$ .

2)  $z=f(x,y)$  определена во всех точках окрестности точки  $N_0(x_0, y_0)$ , но не существует  $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y)$

3)  $z=f(x,y)$  определена во всех точках окрестности точки  $N_0(x_0, y_0)$  и существует  $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y)$ , но  $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$

### Пример 1

Функция  $z = x^2 + y^2$  непрерывна при любых  $x, y$  в любой точке плоскости  $OXY$

Действительно, для  $\forall x, \forall y, \forall \Delta x, \forall \Delta y$  имеем

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2] - (x^2 + y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Следовательно  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \Delta z = 0$

### Пример 2

Функция  $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  определена всюду, кроме точки  $x=0, y=0$ , где она имеет неустранимую точку разрыва.

# Свойства функции многих переменных

## Свойство 1

Если функция  $f(x, y, \dots)$  определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области  $D$ , то в области  $D$  найдется, по крайней мере одна точка  $N(x_0, y_0, \dots)$  такая, что для всех других точек области будет выполняться соотношение

$f(x_0, y_0, \dots) \geq f(x, y, \dots)$  и по крайней мере одна точка  $\bar{N}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \dots)$  такая, что для всех других точек области будет выполняться соотношение  $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \dots) \leq f(x, y, \dots)$

Значение  $f(x_0, y_0, \dots) = M$  - наибольшее значение функции в области  $D$ .

Значение  $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \dots) = m$  - наименьшее значение функции в области  $D$ .

Это свойство формулируется так:

Непрерывная функция в замкнутой ограниченной области  $D$  достигает по крайней мере один раз наибольшего значения  $M$  и наименьшего значения  $m$ .

## Свойство 2

Если функция  $f(x, y, \dots)$  непрерывна в замкнутой ограниченной области  $D$  и если  $M$  и  $m$  наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x, y, \dots)$  в области, то для  $\mu$ , удовлетворяющему условию  $m < \mu < M$ , что будет выполняться равенство

### Следствие

Если функция  $f(x, y, \dots)$  непрерывна в замкнутой ограниченной области и принимает как положительные, так и отрицательные значения, то внутри области найдутся точки, в которых функция  $f(x, y, \dots)$  обращается в 0.

# Частные производные функций нескольких переменных

## Определение

Частной производной по  $x$  от функции  $z=f(x,y)$  называется предел отношения частного приращения  $\Delta_x z$  по  $x$  к приращению  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$

Обозначения:  $z'_x, f'_x(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$

Таким образом, по определению  $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

Аналогично определяется и обозначается частная производная по  $y$ , то есть

$z'_y, f'_y(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

Заметим, что  $\Delta_x z$  вычисляется при неизменном  $y$ , а  $\Delta_y z$  при неизменном  $x$ .

Тогда определения частных производных можно сформулировать так:

**Частной производной по  $x$  от функции  $z=f(x,y)$  называется производная по  $x$ , вычисленная в предположении, что  $y=\text{const}$ .**

**Частной производной по  $y$  от функции  $z=f(x,y)$  называется производная по  $y$ , вычисленная в предположении, что  $x=\text{const}$ .**

## Пример 1

$$z = x^2 \sin y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = ?, \frac{\partial z}{\partial y} = ? \quad \text{Решение} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$$

## Пример 2

$$z = x^y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

Частные производные от функции любого числа переменных определяются аналогично. Так для  $u=f(x,y,z,t)$  получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}$$

## Пример 3

$$u = x^2 + y^2 + xtz^3 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2; \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3$$

# Полное приращение и полный дифференциал

Полное приращение выражается для  $z=f(x,y)$  следующей формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1)$$

Предположим, что  $z=f(x,y)$  в рассматриваемой точке  $(x,y)$  имеет непрерывные частные производные. Выразим  $\Delta z$  через частные производные. Для этого в правой части равенства (1) прибавим и вычтем

$$f(x, y + \Delta y):$$
$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \quad (2)$$

Выражение  $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$  можно рассматривать как разность двух значений функции одного переменного  $y$  ( $x=\text{const}$ ). Применяя к разности теорему Лагранжа, получим:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \Rightarrow y < \bar{y} < y + \Delta y \quad (3)$$

Аналогично для  $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)$  можно применить теорему Лагранжа

$$(y + \Delta y = \text{const}), \text{ то есть } f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \Rightarrow x < \bar{x} < x + \Delta x \quad (4)$$

Подставляя (3),(4) в равенство (2) получим

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \quad (5)$$

Так как по предположению, частные производные непрерывны, то

$$\begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (6)$$

Так как  $x < \bar{x} < x + \Delta x, y < \bar{y} < y + \Delta y$ , то при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{x} \rightarrow x, \bar{y} \rightarrow y$   
 Равенство (6) можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \gamma_1 \\ \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_2 \end{cases} \quad (6')$$

Величины  $\gamma_1 \rightarrow 0, \gamma_2 \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ , то есть когда  $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$   
 В силу равенства (6') соотношение (5) примет следующий вид

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y \quad (5')$$

Сумма двух последних слагаемых правой части является бесконечно малой высшего порядка относительно  $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ . Действительно,  $\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta \rho} \rightarrow 0$  при  $\Delta \rho \rightarrow 0$ , так как  $\gamma_1 \rightarrow 0$  (бесконечно малая), а  $\frac{\Delta x}{\Delta \rho}$  ограничена, так как  $\left| \frac{\Delta x}{\Delta \rho} \right| \leq 1$ . Аналогично  $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta \rho} \rightarrow 0$ .

Сумма первых двух слагаемых, есть выражение линейное относительно  $\Delta x, \Delta y$   
 При  $f'_x(x, y) \neq 0, f'_y(x, y) \neq 0$  это выражение представляет главную линейную часть приращения, отличаясь от  $\Delta z$  на бесконечно малую высшего порядка относительно  $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ .

## Определение

Функция  $z=f(x,y)$ , полное приращение  $\Delta z$  которой в данной точке  $(x,y)$  может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно  $\Delta x, \Delta y$ , и величины бесконечно малой высшего порядка относительно  $\Delta \rho$ , называется дифференцируемой в данной точке, а линейная часть приращения называется полным дифференциалом и обозначается через  $dz$  или  $df$ .

Из равенства (5') следует, что если функция  $f(x,y)$  имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в данной точке и имеет полный дифференциал

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

Равенство (5') можно переписать в виде  $\Delta z = dz + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y$  и с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно  $\Delta \rho$  можно написать следующее приближенное равенство:

$$\Delta z \approx dz$$

Приращения независимых переменных  $\Delta x, \Delta y$  называем дифференциалами независимых переменных  $x, y$  и обозначаем  $dx, dy$  соответственно. Тогда выражение полного дифференциала принимает вид  $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

**Пример 1** Найти функции  $z=xy$  в точке  $(2;3)$  при  $\Delta x = 0.1; \Delta y = 0.2$

*Решение*

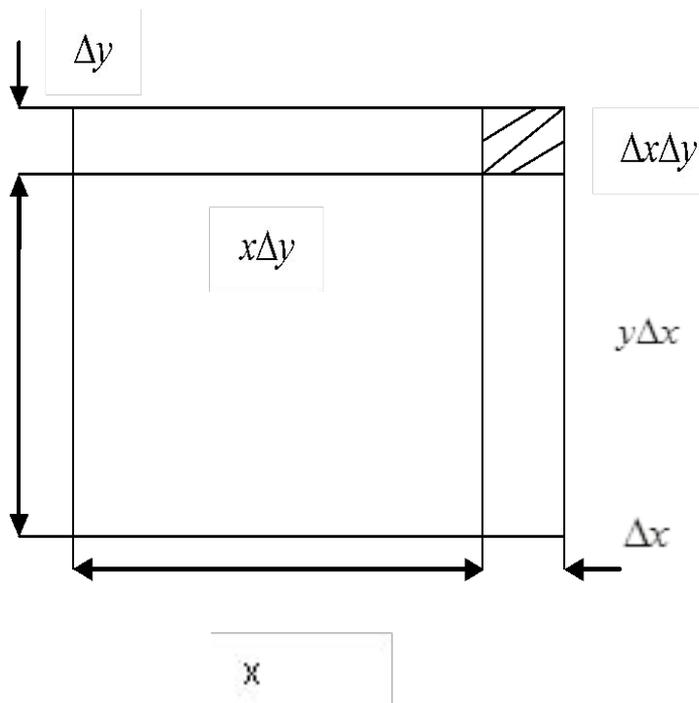
$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y \Rightarrow dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y$$

Тогда

$$\Delta z = 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.72$$

$$dz = 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 = 0.7$$

## Графическая интерпретация



Предыдущие рассуждения и определения соответствующим образом обобщаются на функции любого числа аргументов. Если имеем функцию любого числа переменных  $w=f(x,y,z,u,\dots,t)$  причем все частные производные непрерывны в точке  $(x,y,z,u,\dots,t)$ , то выражение

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

является главной линейной частью полного приращения функции и называется полным дифференциалом. Доказательство того, что разность  $\Delta w - dw$  является бесконечно малой более высокого порядка, чем

$$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \dots + (\Delta t)^2},$$

производится совершенно так же, как и для функции двух переменных.

**Пример 2** Найти  $du \Rightarrow u = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$

*Решение*

Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} 2x \sin^2 z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} 2y \sin^2 z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} 2 \sin z \cos z. \quad \text{Тогда}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = e^{x^2+y^2} (2x \sin^2 z dx + 2y \sin^2 z dy + \sin 2z dz)$$

# Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

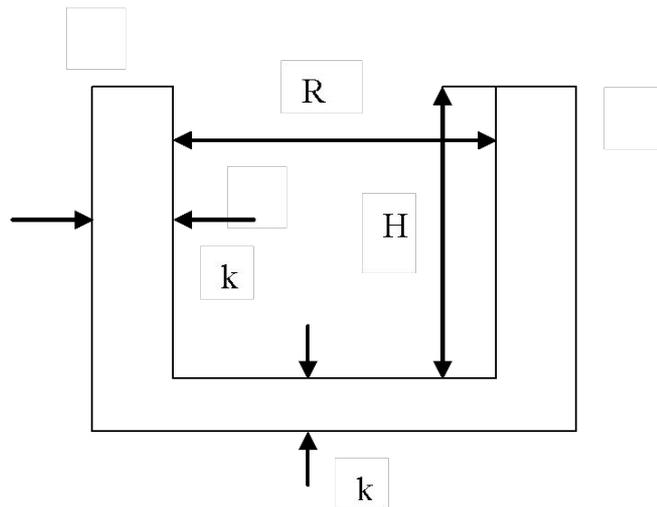
Пусть функция  $z=f(x,y)$  дифференцируема в точке  $(x,y)$ . Найдем полное приращение этой функции  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ , тогда  $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$  (1). Мы имеем приближенную формулу  $\Delta z \approx dz$  (2), где  $dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$  (3).

Подставляя в формулу (1) вместо  $\Delta z$  выражение  $dz$  получаем приближенную формулу  $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$  (4) верную с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно  $\Delta x, \Delta y$ .

Рассмотрим на примерах как используются формулы (2) и (4) для приближенных вычислений.

## Задача

Вычислить объем материала, нужного для изготовления цилиндрического стакана следующих размеров



R – радиус внутреннего цилиндра;  
H - высота внутреннего цилиндра;  
k – толщина стенок и дна стакана;

Решение:

Существуют два решения этой задачи: точное и приближенное.

а) Точное решение

Искомый объем  $V$  равен разности объемов внешнего и внутреннего цилиндров. Так как радиус внешнего цилиндра равен  $R+k$ , а высота  $H+k$ , то

$$V = \pi(R+k)^2(H+k) - \pi R^2 k \Rightarrow V = \pi(2RHk + R^2 k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3) \quad (5)$$

б) Приближенное решение

Обозначим через  $f$  объем внутреннего цилиндра, тогда  $f = \pi R^2 H$ . Это функция двух переменных  $R$  и  $H$ . Если увеличить  $R$  и  $H$  на  $k$ , то  $f$  получит приращение  $\Delta f$ . Это и будет искомый объем  $V$ . То есть  $V = \Delta f$ .

На основании соотношения (1) имеем приближенное равенство  $V \approx \Delta f = \frac{\partial f}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial f}{\partial H} \Delta H$ . Но так как  $\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH$ ;  $\frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2$ ;  $\Delta R = \Delta H = k$ ;  $\Rightarrow V \approx \pi(2RHk + R^2 k)$  (6)

Сравнивая результаты (5) и (6), видим, что они отличаются на величину  $\pi(Hk^2 + 2Rk^2 + k^3)$ , состоящую из членов второго и третьего порядков малости относительно  $k$ .

Применим эти формулы к числовым примерам. Пусть  $R=4$  см.,  $H=20$  см.,  $k=0.1$  см.

Применяя (5), получим точно

Применяя (6), получим приближенно  $V = \pi(2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0.1 + 16 \cdot 0.1) = 17.881\pi$

Следовательно, приближенная формула (6) дает ответ с ошибкой меньшей, чем  $0.3\pi$ , что составляет  $1.7\%$  измеряемой величины.

$$100 \cdot \frac{0.3\pi}{17.881\pi} \% < 2\%$$