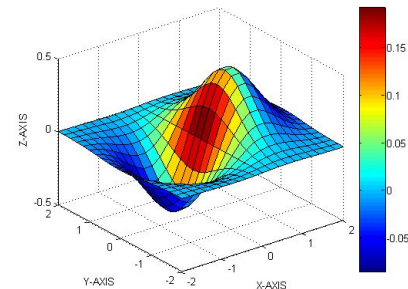


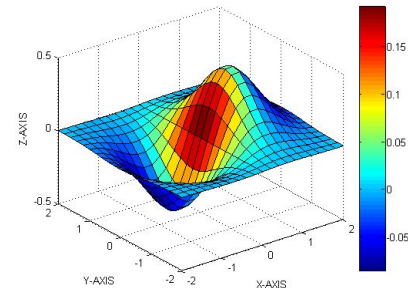
# Численное решение уравнений нелинейной ОПТИКИ

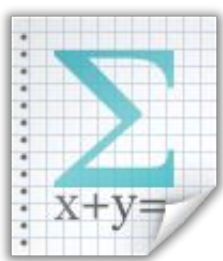




# Содержание

- **Описание световых волн. Уравнения для электромагнитных волн.**
- Линейный режим взаимодействия света с веществом.
- Нормировка динамических уравнений.
- Решение уравнений методом расщепления.
- Решение уравнений с учётом дифракции.
- Описание нелинейного режима взаимодействия света с веществом.

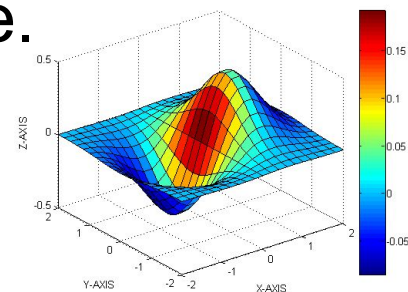




# Цель решения уравнений

Современные оптические системы представляют собой сложные комплексы из различных оптических элементов, в каждом из которых происходит взаимодействие оптического излучения (или электромагнитного излучения других диапазонов – например, терагерцового диапазона) с различными материалами.

Необходимо иметь возможность предсказывать как ведет себя оптическое излучение в различных условиях, для этих целей все чаще используется численное моделирование.





# Электромагнитная природа света

В рамках электромагнитной теории все излучение подчиняется законам Максвелла

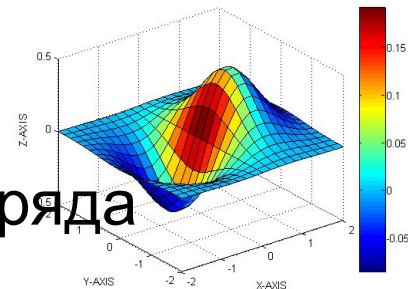
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

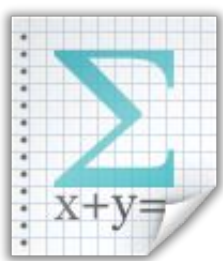
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$D$  - электрическая индукция,  $B$  - магнитная индукция,  
 $E$  - напряжённость электрического поля,  
 $H$  - напряжённость магнитного поля,  
 $j$  - плотность электрического тока,  
 $\rho$  - плотность стороннего электрического заряда





# Уравнения Максвелла

При решении оптических задач очень часто отсутствуют свободные заряды и токи:

$$\rho = 0 \quad j = 0$$

А также вместо индукции поля используют поляризацию:

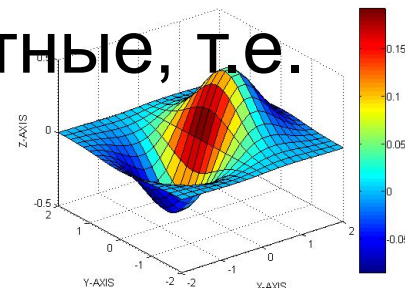
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

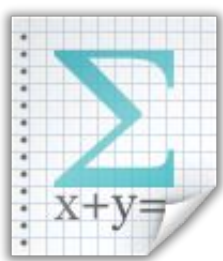
$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные, для которых справедливо  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

Большинство сред в оптике немагнитные, т.е.

$$\mathbf{M} = 0$$





# Уравнения Максвелла

Получается система

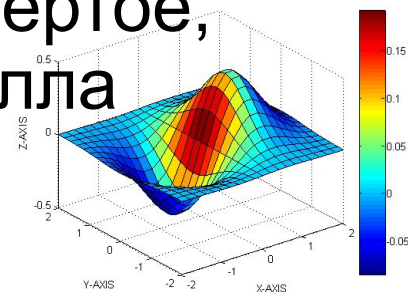
$$\varepsilon_0 \nabla E + \nabla P = 0$$

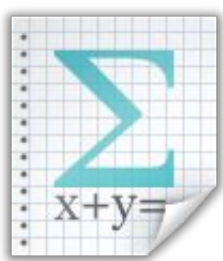
$$\nabla H = 0$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

Применяя оператор ротора к третьему уравнению системы и подставляя четвертое, получаем волновое уравнение Максвелла



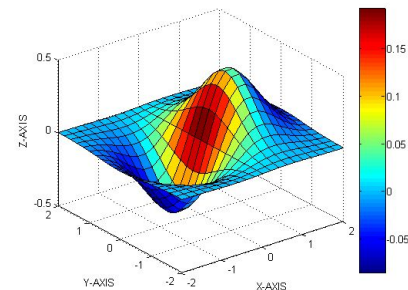


# Волновое уравнение Максвелла

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

Для решения необходимо знать связь между  $\mathbf{P}$   
и  $\mathbf{E}$  –

материальные уравнения, они различны для  
разных сред





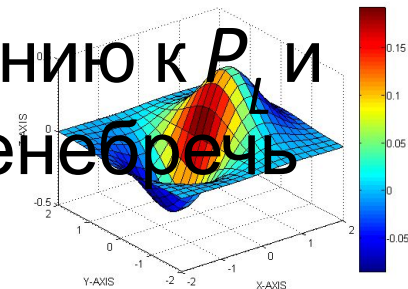
# Материальные уравнения

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t)$$

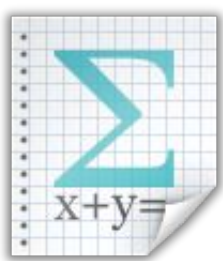
В самом общем виде линейная поляризация зависит от прошлых значений поля в данной точке (если отклик среды локальный)

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'$$

$P_{NL}$  обычно является малым по отношению к  $P_L$  и в первом приближении им можно пренебречь

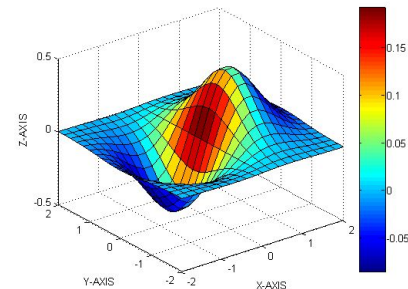






# Содержание

- Описание световых волн. Уравнения для электромагнитных волн.
- **Линейный режим взаимодействия света с веществом.**
- Нормировка динамических уравнений.
- Решение уравнений методом расщепления.
- Решение уравнений с учётом дифракции.
- Описание нелинейного режима взаимодействия света с веществом.

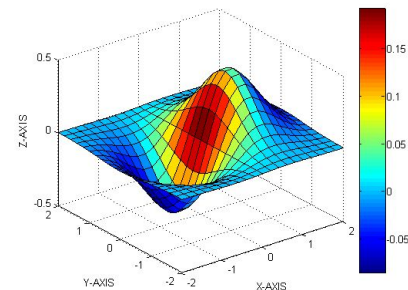




# Линейный режим

Так как зависимость между  $P_L$  и  $E$  представляет собой свертку ее удобно записывать в спектральном виде (после применения преобразования Фурье свертка превращается в произведение функций)

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$





# Линейный режим

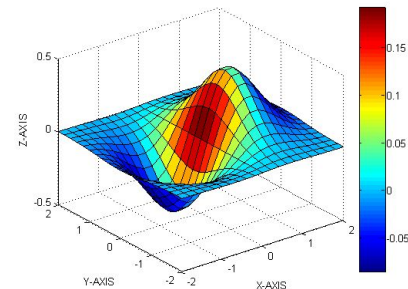
$\varepsilon(\omega)$  – Зависимость в общем случае комплексная, она описывает как дисперсию, так и поглощение, в случае отсутствия поглощения  $\varepsilon(\omega) = n^2(\omega)$

В случае изотропной среды в линейном приближении

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Тогда

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} = 0$$





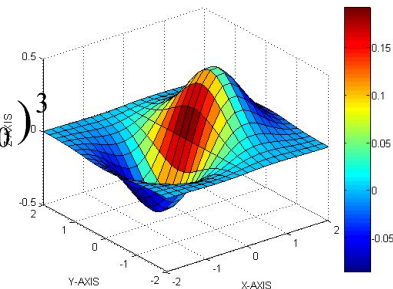
# Вид скалярных уравнений

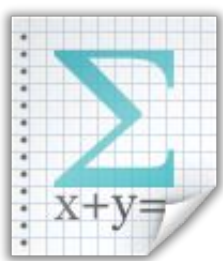
Уравнение Шредингера для огибающей

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} =$$
$$= i\gamma \left[ |A|^2 A + \frac{2i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} \left( |A|^2 A \right) - T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right]$$

Очень часто  $\alpha$  считают равным 0, а также пренебрегают последними двумя слагаемыми в этом уравнении, при этом надо учитывать что дисперсия описана здесь описана в следующем виде:

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \frac{1}{V} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta_2 (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6} \beta_3 (\omega - \omega_0)^3$$





# Вид скалярных уравнений

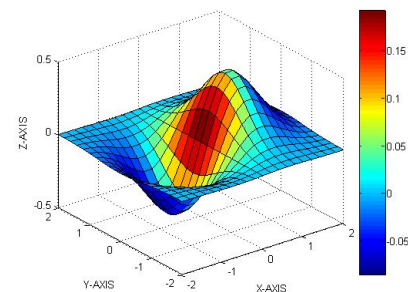
Уравнение для поля импульса с использованием приближения однонаправленного распространения  
(без учета дифракции, т.е. в оптическом

волокне)

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{N_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + a \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} - b \int_{-\infty}^t E d\tau + gE^2 \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

при этом дисперсия задана в виде

$$k(\omega) = \frac{N_0}{c} \omega + a\omega^3 - \frac{b}{\omega}$$





# Вид скалярных уравнений

Уравнение для поля импульса с использованием приближения однонаправленного распространения (с учетом

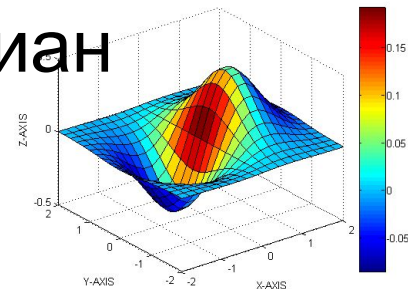
дифракции)

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{N_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - a \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + b \int_{-\infty}^t E dt' + gE^2 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{c}{2N_0} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^t E dt'$$

Здесь  $E$  уже зависит от трех координат и времени

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

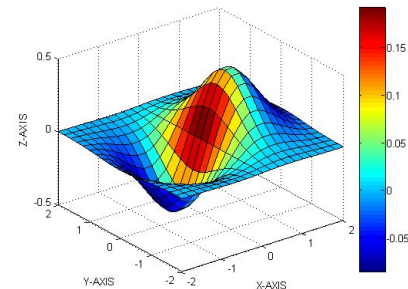
- Поперечный лапласиан

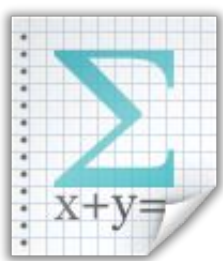




# Содержание

- Описание световых волн. Уравнения для электромагнитных волн.
- Линейный режим взаимодействия света с веществом.
- **Нормировка динамических уравнений.**
- Решение уравнений методом расщепления.
- Решение уравнений с учётом дифракции.
- Описание нелинейного режима взаимодействия света с веществом.





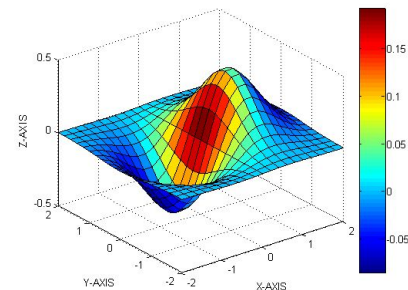
# Нормировка уравнения

$$\tau = t - \frac{N_0}{c} z \quad \text{ИЛИ} \quad \tau = t - \frac{1}{V} z$$

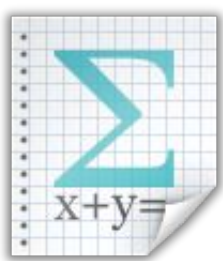
$$\frac{\partial E}{\partial z} - a \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + b \int_{-\infty}^{\tau} E dt' + g E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{c}{2N_0} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E dt'$$

$$\tilde{E} = \frac{E}{E_0}; \quad \tilde{\tau} = \omega_0 \tau; \quad \tilde{x} = \frac{x}{\rho}; \quad \tilde{y} = \frac{y}{\rho}; \quad \tilde{z} = a \omega_0^3 z$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + B \int_{-\infty}^{\tau} E dt' + G E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} = D \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E dt'$$





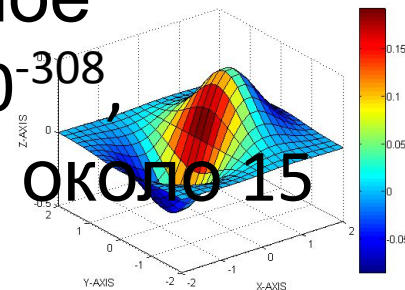


# Отступление про вычислительную точность

Дробные числа в памяти компьютера могут иметь одинарную, либо двойную точность

Одинарная точность – 4 байта – минимальное положительное число имеет порядок  $10^{-38}$ , максимальное:  $10^{38}$  при этом хранятся около 7 значащих цифр.

Двойная точность – 8 байт – минимальное положительное число имеет порядок  $10^{-308}$ , максимальное:  $10^{308}$ , при этом хранятся около 15 значащих цифр





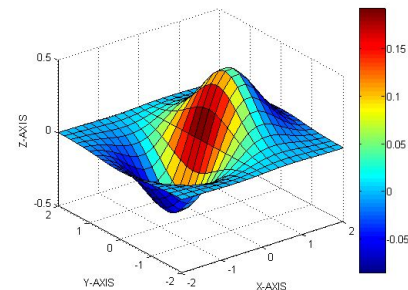
# Отступление про вычислительную точность

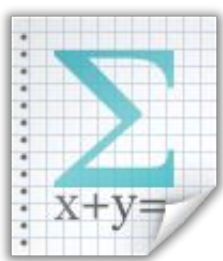
При этом надо помнить, что для  
компьютера  
после вычисления

$$a = 1$$

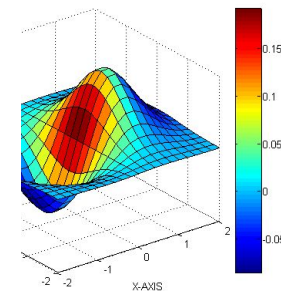
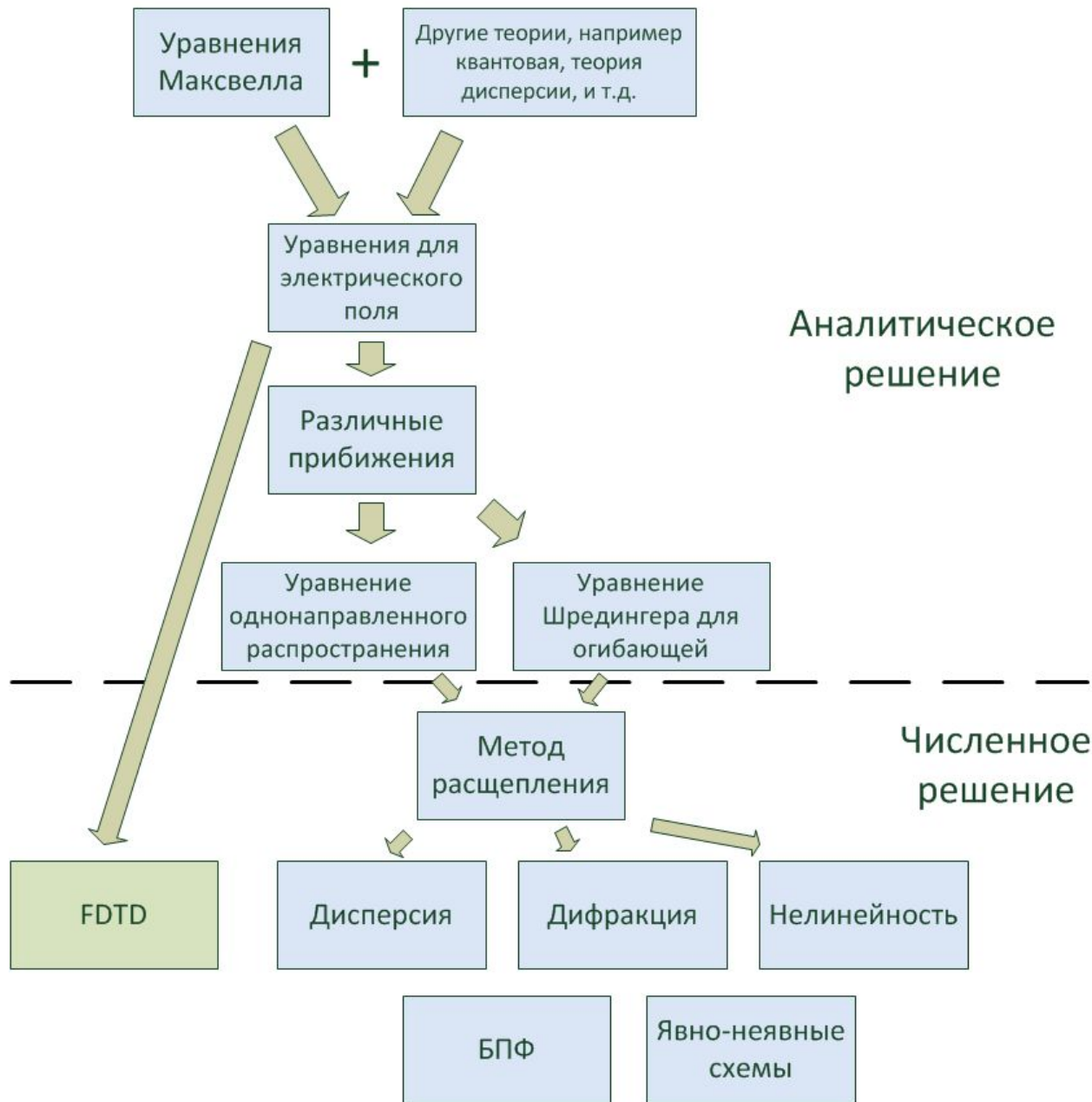
$$a = a + 10^{-20}$$

а будет равно по прежнему 1





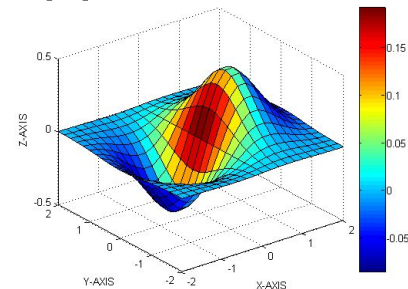
# Задача: Исследование динамики распространения излучения в веществе

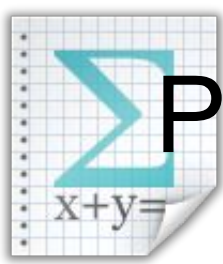




# Содержание

- Описание световых волн. Уравнения для электромагнитных волн.
- Линейный режим взаимодействия света с веществом.
- Нормировка динамических уравнений.
- **Решение уравнений методом расщепления.**
- Решение уравнений с учётом дифракции.
- Описание нелинейного режима взаимодействия света с веществом.





# Решение методом расщепления по физическим факторам

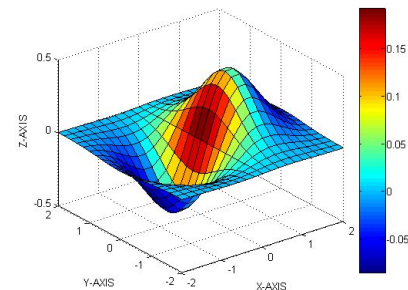
$$\frac{\partial F}{\partial z} = (\hat{D}_{disp} + \hat{D}_{diff} + \hat{N}) F$$

Метод расщепления состоит в последовательном решении

$$\frac{\partial F}{\partial z} = D_{disp} F,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = D_{diff} F,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = NF,$$



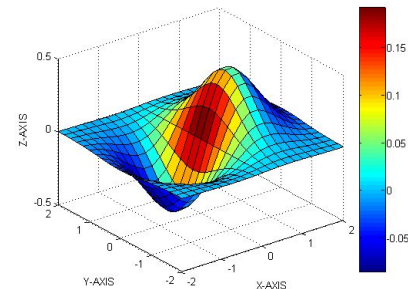


# В случае уравнения с дифракцией для поля

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{N_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + a \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} - b \int_{-\infty}^t E dt'$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{c}{2N_0} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^t E dt'$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -gE^2 \frac{\partial E}{\partial t}$$





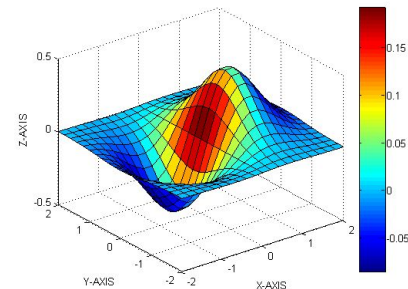
# Дисперсионное уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{N_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + a \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} - b \int_{-\infty}^t E dt'$$

Данное уравнение может быть переписано в спектральной области (применяя преобразование Фурье к каждой из частей) и используя

$$\Phi \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} \right\} = (i\omega) \cdot \Phi \{F\}$$

$$\Phi \left\{ \int_{-\infty}^t F dt' \right\} = (i\omega)^{-1} \cdot \Phi \{F\}$$





# Дисперсионное уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \left( -\frac{N_0}{c} (i\omega) + a(i\omega)^3 - \frac{b}{i\omega} \right) G$$

Либо в более общем виде

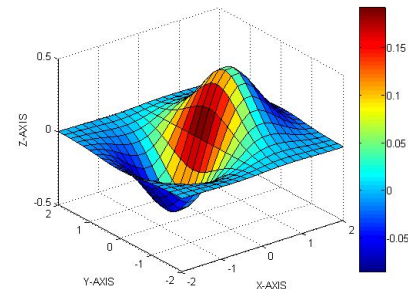
$$\hat{D}_{disp} = -i \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

Можно заменить производную по  $z$  конечной разностью (аппроксимация первого порядка по  $\Delta z$ )

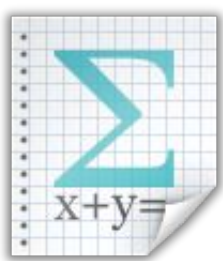
$$\frac{\partial G}{\partial z} \approx \frac{G_{z+\Delta z} - G_z}{\Delta z}$$

Получим

$$G_{z+\Delta z} = G_z + \Delta z \hat{D}_{disp} G_z$$



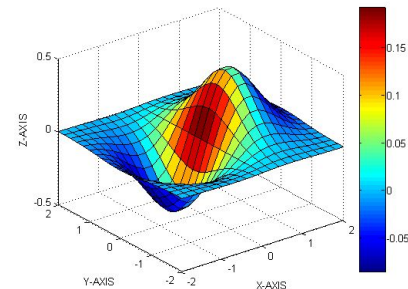




# Решение дисперсионного уравнения

Однако такое уравнение имеет точное решение

$$G_{z+\Delta z} = G_z \exp(-i\Delta z_n \omega n(\omega) / c)$$



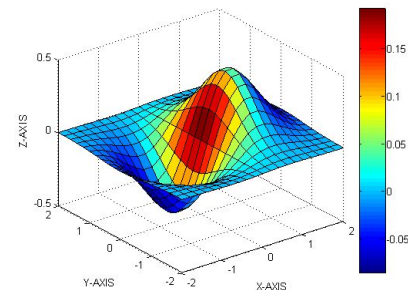


# Решение дисперсионного уравнения

Таким образом для решения дисперсионного уравнения необходимо

- посчитать спектр поля
- умножить спектр на экспоненту от дисперсионной функции
- посчитать обратный спектр

Можно использовать алгоритм БПФ



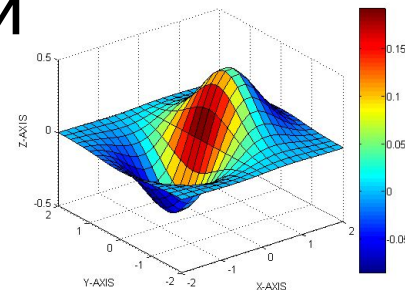


# Про преобразование Фурье

В случае когда сигнал у нас задан на сетке в виде отсчетов  $s_k$  справедлива следующая формула

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cos(2\pi nk / N), \\ b_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k \sin(2\pi nk / N). \end{cases}$$

Для того чтобы посчитать эти коэффициенты в общем случае требуется  $O(n^2)$  операций





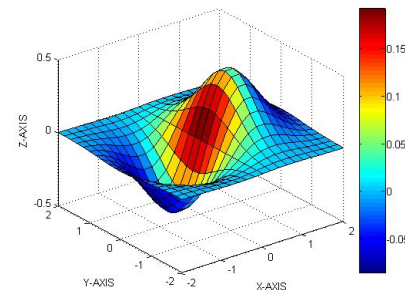
# Отступление про сложность алгоритмов

Определение  $f(n)=O(g(n))$

$$\exists(C > 0), U : \forall(n \in U) |f(n)| \leq C|g(n)|$$

В нашем случае  $f(n)$  – количество операций необходимых для расчета спектра сигнала из  $n$  отсчетов, а  $g(n)=n^2$

В общем случае для произвольного алгоритма расчет  $g(n)$  – сложная задача





# Сложность алгоритмов вычисления преобразования Фурье

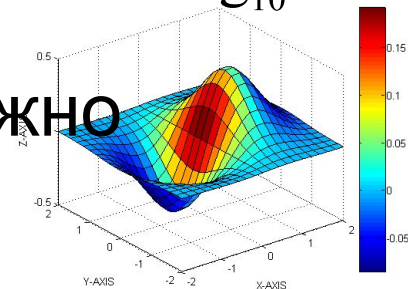
Для ДПФ необходимо  $O(n^2)$  операций, где  $n$  – размер массива входных данных, т. е. количество отсчетов.

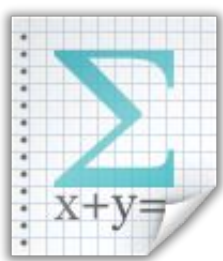
Для БПФ необходимо  $O(n \log(n))$

операций. Так  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  т.е., например  $\log_2 N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} 2}$

как

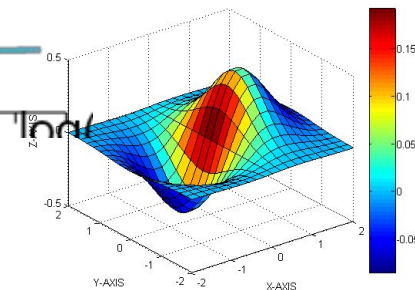
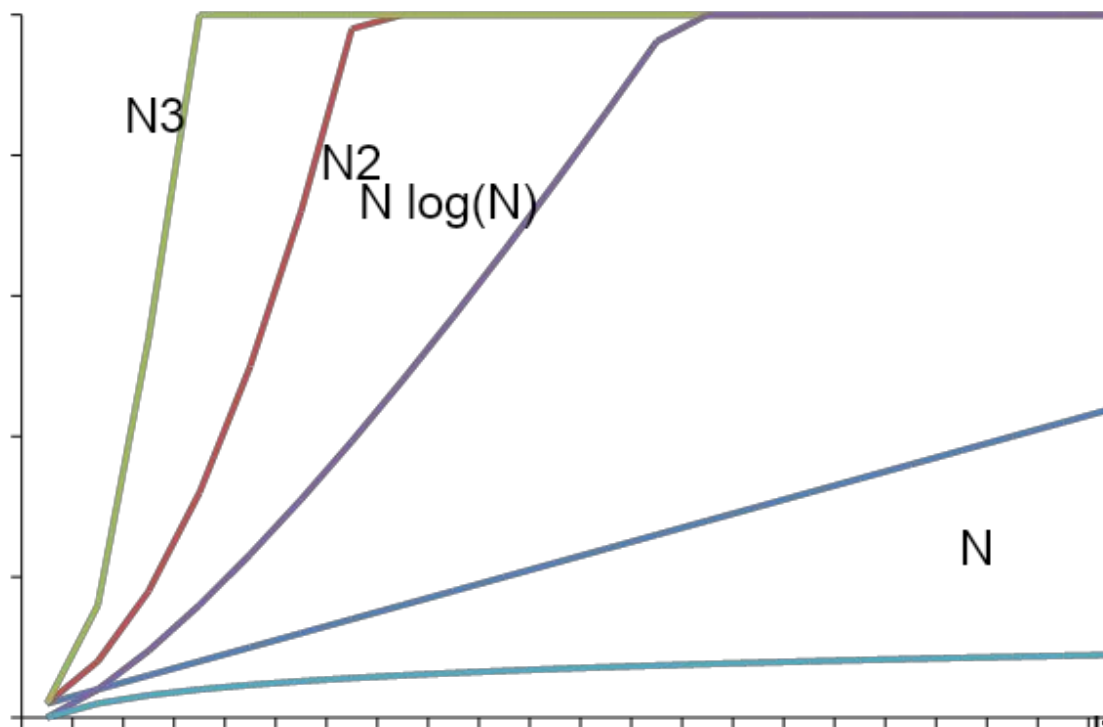
Основание алгоритма становится неважно

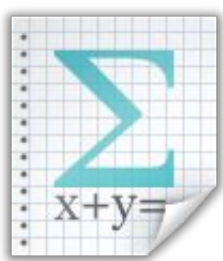




# Отступление про сложность алгоритмов

## Разного вида сложности

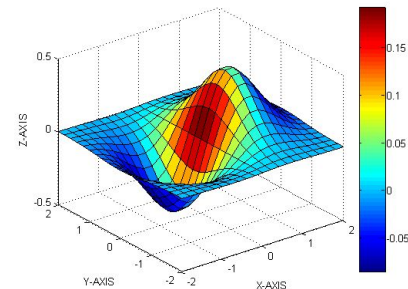


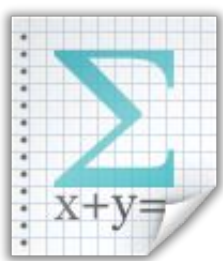


# БПФ

Ограничения накладываемые на данные из-за использования БПФ

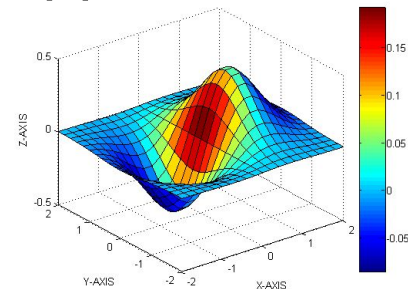
- 1) Равномерная сетка, т.е.  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$
- 2) Количество отсчетов равно степени 2: т.е.  
 $N=2,4,8,16,32,64,\dots,1024,2048,4096,\dots$



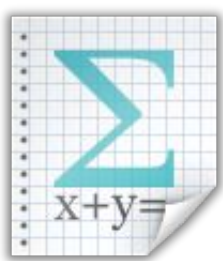


# Содержание

- Описание световых волн. Уравнения для электромагнитных волн.
- Линейный режим взаимодействия света с веществом.
- Нормировка динамических уравнений.
- Решение уравнений методом расщепления.
- **Решение уравнений с учётом дифракции.**
- Описание нелинейного режима взаимодействия света с веществом.







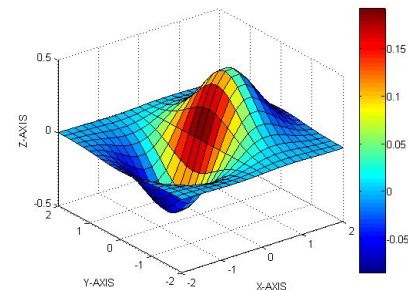
# Решение дифракционного уравнения

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{c}{2N_0} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^t E dt'$$

Переходим в спектральную область

$$\frac{\partial G(\omega, x, y, z)}{\partial z} = \frac{c}{2N_0(i\omega)} \Delta_{\perp} G(\omega, x, y, z)$$

$$\Delta_{\perp} G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$$

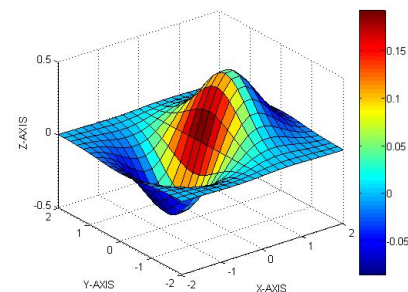


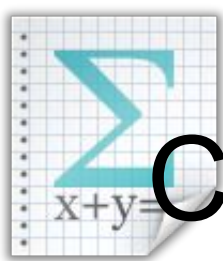


# Память и время работы

Предположим  $G$  у нас зависит от 3 координат и времени, тогда если мы ведем расчет используя  $z$  как координату распространения нам необходимо для каждого значения  $z$  иметь функцию  $G(t, x, y)$ . Предположим у нас сетка  $t$  от 1 до 1024,  $x$  от 1 до 1024,  $y$  от 1 до 1024, тогда  $G_{t, x, y}$  займет в памяти компьютера  $1024 \times 1024 \times 1024$  ячейки (16 Гб), а для расчета спектра понадобится

$C \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot \log(1024)$   
операций

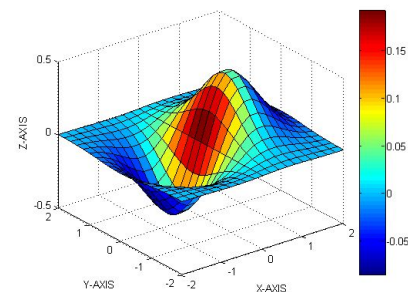


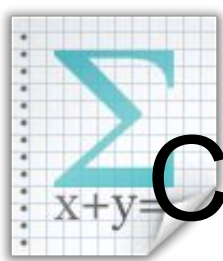


# Скорость работы компьютера

Одна из характеристик процессоров – тактовая частота, например 3 ГГц, т.е. 3 000 000 000 тактов в секунду.

Для элементарной операции нужно от одного до нескольких десятков тактов.

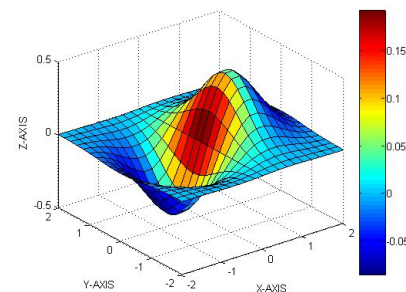


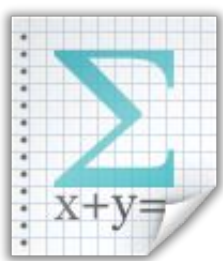


# Скорость работы компьютера

Факты влияющие на скорость

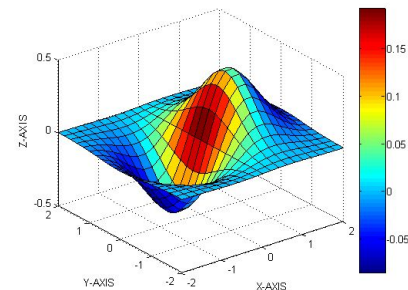
- 1) Тактовая частота
- 2) Реализация алгоритма
- 3) Количество тактов на операцию
- 4) Наличие конвейеров
- 5) Медленная работа с памятью
- 6) Наличие кэша
- 7) Параллелизация алгоритма

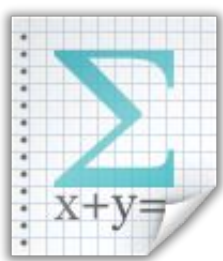




# Время работы

Таким образом получается значение в районе 300 секунд на шаг алгоритма





# Решение дифракционного уравнения

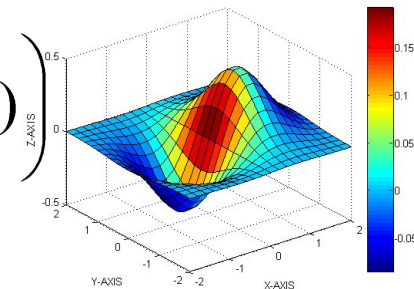
Предположим, что импульс имеет осевую симметрию, т.е.  $E(t, r, z)$ ,  $G(\omega, r, z)$ , где

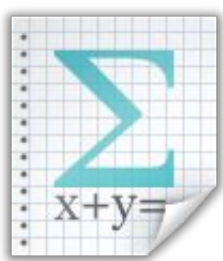
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

тогда  $G_{t,r}$  займет в памяти компьютера  $1024 \times 1024$  ячеек, а процесс вычисления займет  $C \times 1024 \times 1024 \times \log(1024)$

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial G(\omega, r, z)}{\partial z} = \frac{c}{2N_0(i\omega)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} G(\omega, r, z) \right)$$

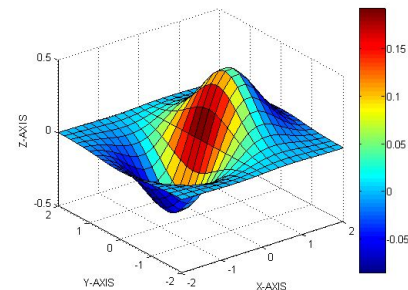




# Решение дифракционного уравнения

$$\Delta_{\perp} G_j \approx \frac{1}{(\Delta r_j + \Delta r_{j+1})} \left[ \frac{G_{j+1}}{\Delta r_{j+1}} \left( 2 + \frac{\Delta r_j}{r_j} \right) + \frac{G_{j-1}}{\Delta r_j} \left( 2 - \frac{\Delta r_{j+1}}{r_j} \right) \right] + G_j \frac{1}{\Delta r_j \Delta r_{j+1}} \left( \frac{\Delta G_{j+1} - \Delta G_j}{r_j} - 2 \right)$$

Сетка по  $r$  не обязана быть равномерной!

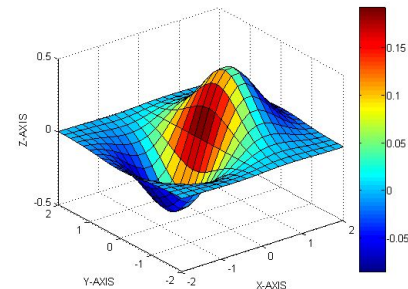




# Решение дифракционного уравнения

схема Кранка-Николсона

$$\frac{G_{i,j}^{n+1} - G_{i,j}^n}{\Delta z_n} = 0.5 \hat{D}_{diff} (G_{i,j}^{n+1} + G_{i,j}^n) + O([\Delta z_n]^2) \quad \forall i, j$$







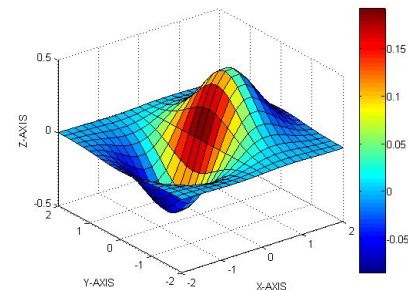
# Схема Кранка-Николсона

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \left( u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n \left( u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^{n+1} \left( u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

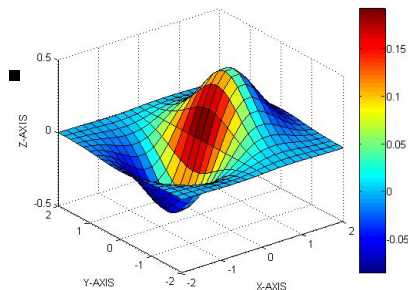
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( F_i^{n+1} \left( u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + F_i^n \left( u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right)$$





# Содержание

- Описание световых волн. Уравнения для электромагнитных волн.
- Линейный режим взаимодействия света с веществом.
- Нормировка динамических уравнений.
- Решение уравнений методом расщепления.
- Решение уравнений с учётом дифракции.
- **Описание нелинейного режима взаимодействия света с веществом.**





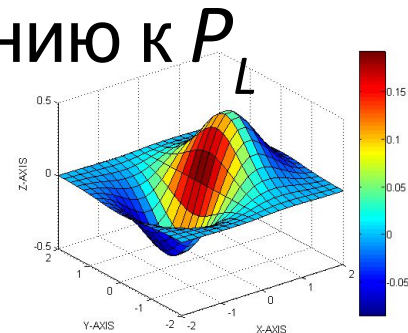
# Материальные уравнения

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t)$$

В самом общем виде линейная поляризация зависит от прошлых значений поля в данной точке (если отклик среды локальный)

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'$$

$P_{NL}$  уже не является малым по отношению к  $P_L$

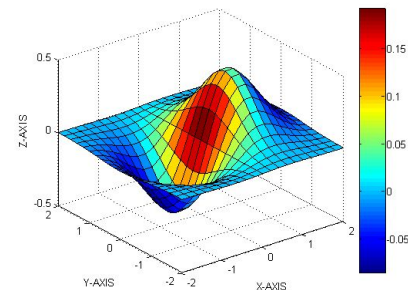


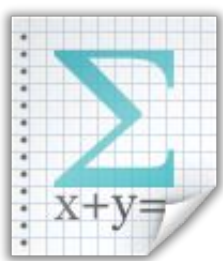


# Решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -gE^2 \frac{\partial E}{\partial t}$$

- 1) Для вычисления производной можно использовать БПФ, а можно центральную разность
- 2) Для шага по  $z$  может также использоваться схема Кранка-Николсона, однако так как уравнение нелинейное, необходимы внутренние итерации





# Решение нелинейного уравнения

$$\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta z_n} = NE_i^{n+\frac{1}{2}} + O([\Delta z_n]^2)$$

$$E_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (E_i^n + E_i^{n+1})$$

Для нахождения значения на расстоянии “полушага” используются итерации. На первой итерации уравнение решается явным методом

$$E_i^{n+1\langle 1 \rangle} = E_i^n + \Delta z_n NE_i^n$$

Далее до сходимости осуществляется процесс:

$$E_i^{n+\frac{1}{2}\langle m \rangle} = \frac{1}{2} (E_i^n + E_i^{n+1\langle m \rangle})$$

