Системы линейных уравнений

Элементы высшей математики

Линейная алгебра

Система линейных алгебраических уравнений

содержащая

- ***m*** уравнений
- ***n*** неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система из 3 уравнений с 3 неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Система линейных алгебраических уравнений – **СЛАУ**

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Столбец неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Совместная система

СЛАУ, которая имеет хотя бы одно решение

Несовместная система

Не имеет решений

Теорема Кронекера-Капелли

СЛАУ совместна ⇔ ранг **расширенной** матрицы системы равен рангу **основной** матрицы системы

Теорема

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение

$$\mathrm{rang}(A) = n$$

Теорема

Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений

$$rang(A) < n$$

МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Матричный метод

$$A \times X = B$$

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$$

$$E \times X = A^{-1} \times B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \times B}$$

МЕТОД КРАМЕРА

Габриэль Крамер

Швейцарский математик

Один из создателей линейной алгебры

1704 – 1752

Формулы Крамера

Определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дополнительные определители

Столбец коэффициентов при соответствующей неизвестной заменяется столбцом свободных членов системы

Формулы Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix}$$

Формулы Крамера

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Формулы Крамера

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Решение системы

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases}$$

МЕТОД ГАУССА

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

1777 – 1855

Немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист

«Король математики»

Теорема о приведении матриц к ступенчатому виду

Любую матрицу путём элементарных преобразований только над **строками** можно привести к ступенчатому виду

Метод Гаусса

Метод последовательного исключения переменных

- с помощью **элементарных преобразований** СЛАУ приводится к равносильной системе треугольного вида
- из неё последовательно, начиная с последних, находятся все переменные системы

Прямой ход

Элементарными преобразованиями над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме,

либо устанавливают, что система несовместна

Обратный ход

Находим значения переменных, начиная с последнего уравнения

Достоинства

- Менее трудоёмкий
- Позволяет установить совместность
- Позволяет найти ранг матрицы