План

Геометрические характеристики плоских сечений

- *Момент инерции площади*
- *Центробежный момент инерции*
- *Полярный момент инерции*

Моменты инерции практически важных сечений

- Прямоугольное сечение
- Круглое сечение
- Трубчатое сечение

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

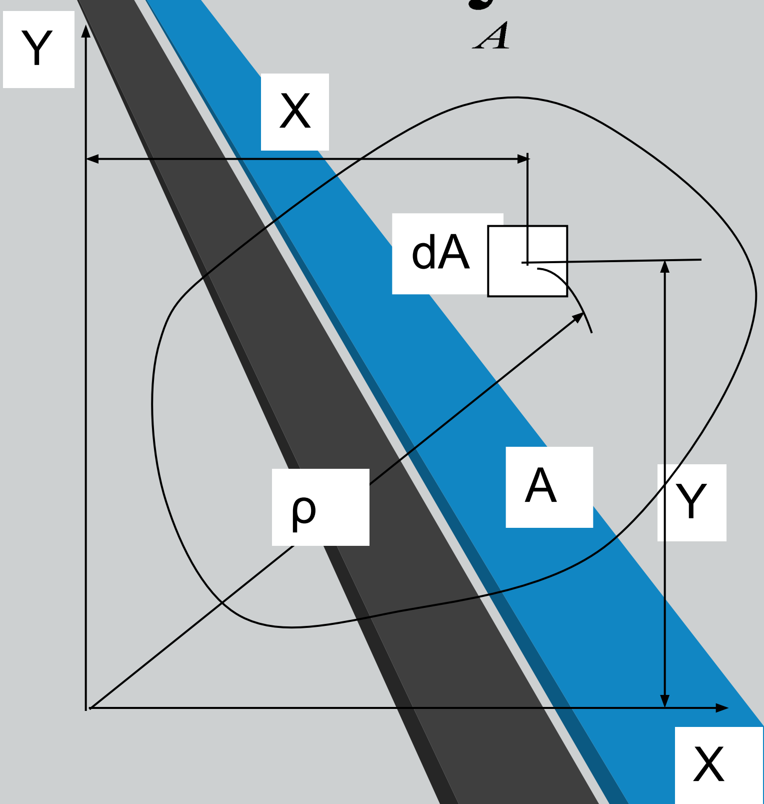
Главные оси и главные моменты инерции

Геометрические характеристики плоских сечений

Различают следующие характеристики сечений: площадь А, статический момент площади (S_X, или S_Y), момент инерции площади (I_X, или I_Y), центробежный момент инерции площади (I_{XY}).

*Под **статическим моментом площади** относительно некоторой оси понимается сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от их центра тяжести до соответствующей оси:*

$$S_X = \int_A Y dA \qquad S_Y = \int_A X dA$$



Оси, проходящие через центр тяжести, называются ***центральными осями.***

Моменты площади фигуры относительно центральных осей равны нулю

Координаты центра тяжести

$$X_C = \frac{S_Y}{A}; \qquad Y_C = \frac{S_X}{A}$$

Геометрические характеристики плоских сечений

Моментом инерции площади *относительно оси называется сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат расстояний от их центра тяжести до соответствующей оси.*

$$I_X = \int_A Y^2 dA \qquad I_Y = \int_A X^2 dA$$

Центробежным моментом инерции называется сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от центра тяжести до осей

$$I_{XY} = \int_A XY dA$$

Полярным моментом инерции называется сумма произведения площадей элементарных площадок на квадрат расстояния от центра тяжести до начала координат

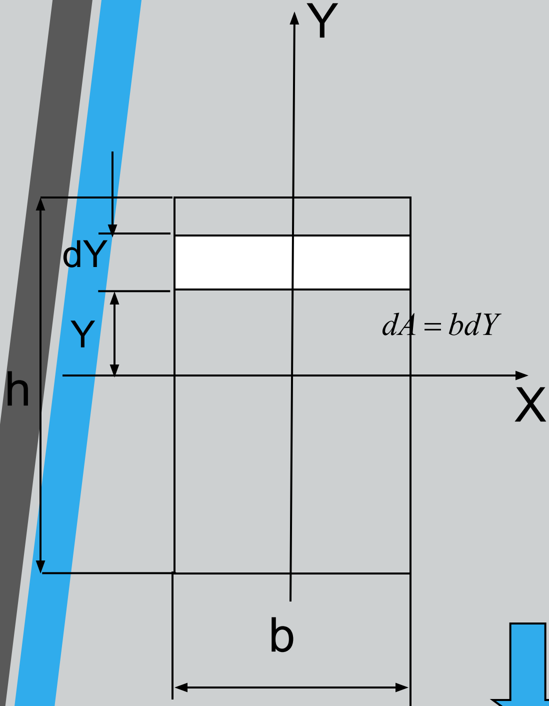
$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \;\Rightarrow\; I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A \left(X^2 + Y^2\right) dA = \int_A X^2 dA + \int_A Y^2 dA = I_Y + I_X$$

$$\rho^2 = X^2 + Y^2$$

Полярный момент инерции *равен сумме осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей.*

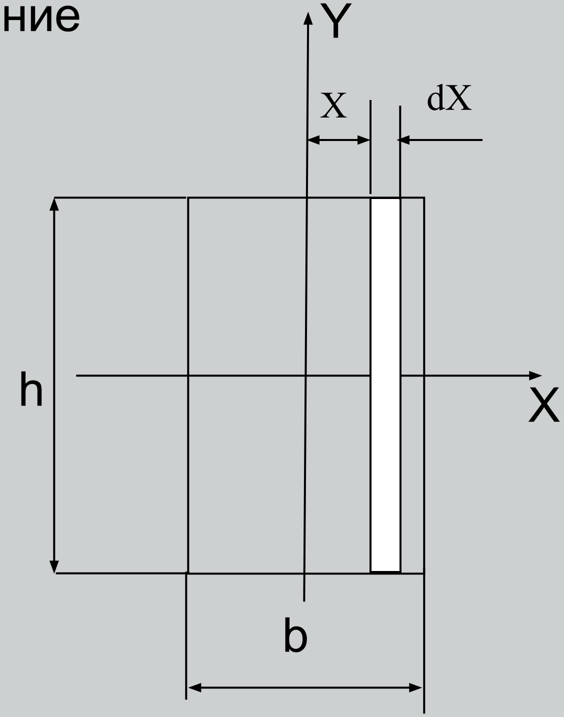
Моменты инерции практически важных сечений

Прямоугольное сечение



$$I_X = \int_A Y^2 dA$$

$$I_X = \int_{-h/2}^{h/2} bY^2 dY = b\int_{-h/2}^{h/2} Y^2 dY = \frac{bh^3}{12}$$



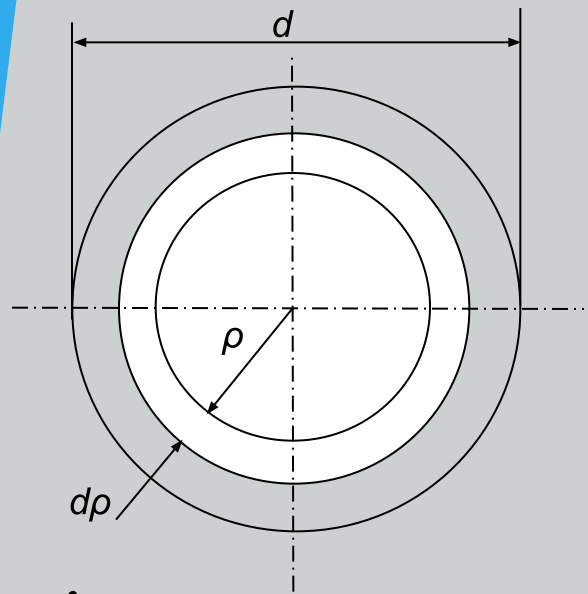
$$dA = hdX$$

$$I_Y = \int_A X^2 dA$$

$$I_Y = \int_{-b/2}^{b/2} hX^2 dX = h\int_{-b/2}^{b/2} X^2 dX = \frac{hb^3}{12}$$

Моменты инерции практически важных сечений

Круглое сечение

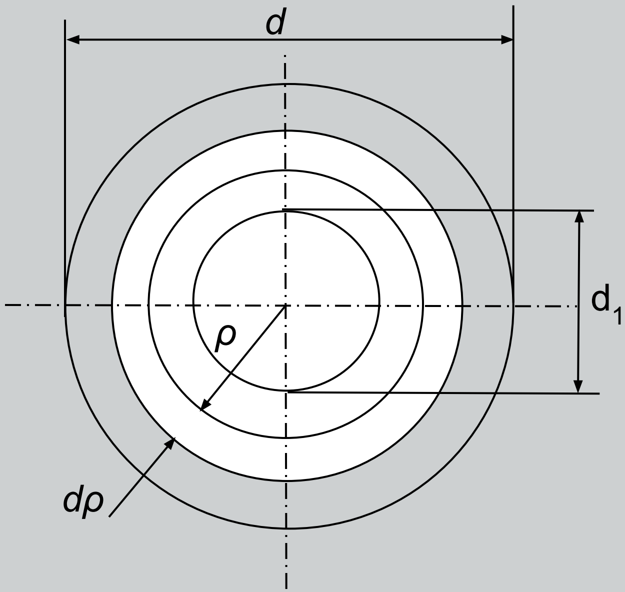


$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad \Leftarrow \quad dA = 2\pi\rho d\rho$$

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{2\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_X = I_Y = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Трубчатое сечение



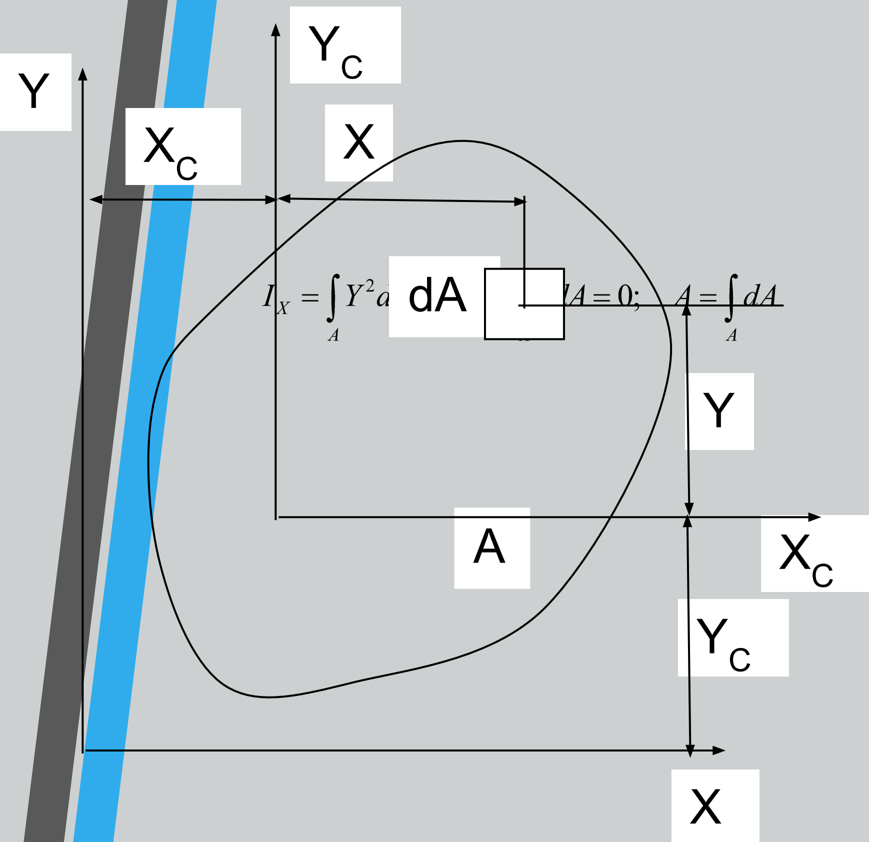
$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad \Leftarrow \quad dA = 2\pi\rho d\rho$$

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_{d_1/2}^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{2\pi d^4}{64} - \frac{2\pi d_1^4}{62} = \frac{\pi d^4}{32}\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) = \frac{\pi d^4}{32}\left(1 - \alpha^4\right)$$

$$I_X = I_Y = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi d^4}{64}\left(1 - \alpha^4\right)$$

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Координаты текущей точки в новой системе координат равны: X_C+X и Y_C+Y



Осевые моменты инерции

$$I_X=\int_A (Y_C+Y)^2 dA=\int_A Y^2 dA+2Y_C\int_A Y dA+Y_C^2\int_A dA$$

$$I_X=I_{Xc}+Y_C^2\cdot A \qquad I_Y=I_{Yc}+X_C^2\cdot A$$

Центробежные моменты инерции

$$I_{XY}=\int_A (X+X_C)(Y+Y_C)dA=$$

$$=\int_A XYdA+Y_C\int_A XdA+X_C\int_A YdA+X_CY_C\int_A dA$$

$$I_{XY}=\int_A (X+X_C)(Y+Y_C)dA=I_{XcYc}+X_CY_CA$$

$$I_{XcYc}=\int_A XYdA;\quad S_Y=\int_A XdA=0;\quad S_X=\int_A YdA=0;\quad A=\int_A dA$$

Изменение моментов инерции при поворот осей

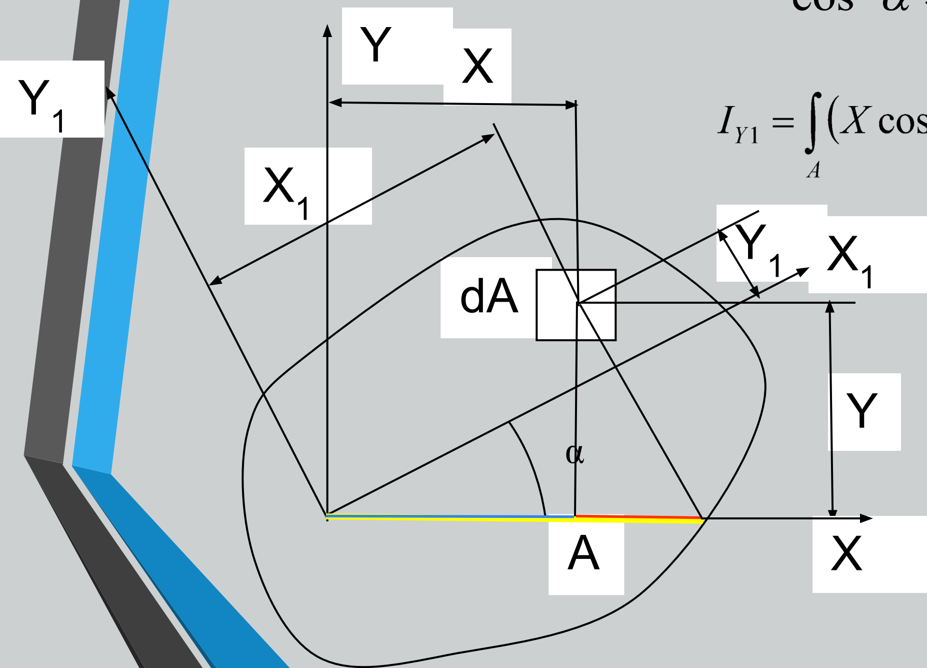
$$X_1 = X\cos\alpha + Y\sin\alpha \qquad Y_1 = Y\cos\alpha - X\sin\alpha$$

$$I_{X1} = \int_A (Y\cos\alpha - X\sin\alpha)^2 dA = \cos^2\alpha\int_A Y^2 dA - 2\cos\alpha\sin\alpha\int_A XY dA + \sin^2\alpha\int_A X^2 dA$$

$$I_{X1} = I_X\cos^2\alpha + I_Y\sin^2\alpha - I_{XY}\sin 2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = (1-\cos 2\alpha)/2$$

$$\cos^2\alpha = (1+\cos 2\alpha)/2$$



$$I_{Y1} = \int_A (X\cos\alpha + Y\sin\alpha)^2 dA = I_Y\cos^2\alpha + I_X\sin^2\alpha + I_{XY}\sin 2\alpha$$

$$I_{X1} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2}\cos 2\alpha - I_{XY}\sin 2\alpha$$

$$I_{Y1} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2}\cos 2\alpha + I_{XY}\sin 2\alpha$$

$$I_{X1Y1} = \frac{I_X - I_Y}{2}\cos 2\alpha + I_{XY}\sin 2\alpha$$

Главные оси и главные моменты инерции

Главными осями называются оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

$$I_{X1Y1} = \frac{I_X - I_Y}{2}\cos 2\alpha + I_{XY}\sin 2\alpha$$

$$I_{X1Y1} = \frac{I_X - I_Y}{2}\cos 2\alpha + I_{XY}\sin 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad tg\, 2\alpha_0 = \frac{2I_{XY}}{I_X - I_Y}$$

В результате решения трансцендентного уравнения получаем два значения угла с разницей в π/2 следовательно, главных осей две, и они взаимно перпендикулярны.

$$I_{X1} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2}\cos 2\alpha - I_{XY}\sin 2\alpha$$

$$\frac{dI_X}{d\alpha} = -2I_X\cos\alpha\sin\alpha + 2I_Y\sin\alpha\cos\alpha - 2I_{XY}\cos 2\alpha = 0$$

Таким образом, главными осями можно считать оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают своих экстремальных (максимального и минимального) значений.

Моменты инерции относительно главных осей называются ***главными моментами инерции.***

$$I_{мак,мин} = \frac{I_X + I_Y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_X - I_Y\right)^2 + 4I_{XY}^2}$$

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Конспект лекций по дисциплине по дисциплине «Сопротивление материалов» Абзалова Д.А.
2. М. Беляев Сопротивление материалов.М,2003.-607 с.
3.Дарков А.В. Сопротивление материалов. МЛ: высшая школа,2005.-354 с
4.Работнов Ю.Н. Механика твердого деформируемого тела М; Наука,1979.-775 с
5.Писаренько Г.С, Агарев В.А. и др. Сопротивление материалов 1986.-775 с