Высшая математика

Преподаватель: Лучникова Н.И.

Системы линейных уравнений

Тема 2. Системы линейных уравнений.

п.2.1.Основные понятия и определения

Определение. Уравнение называется **линейным**, если оно содержит переменные только <u>в первой степени</u> и не содержит произведений переменных.

<u>Пример</u>. $2x - 3y + 5 = 0$ – линейное уравнение.

Уравнение $3x + 4xy - 5y + 2 = 0$ не является линейным.

В общем виде система m линейных уравнений с n переменными записывается так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где числа a_{ij} ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$) называются **коэффициентами** при переменных, b_i ($i = 1, \ldots, m$) – **свободными членами**.

Системы линейных уравнений

Определение. Совокупность чисел (x_1, x_2, … , x_n) называется **решением системы** (1), если при подстановке их вместо переменных во все уравнения они обращаются в верные равенства.

Определение. Система (1) называется **несовместной**, если у нее нет ни одного решения и **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

Определение. Система (1) называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю, в противном случае система называется неоднородной.

Определение. <u>Совместная</u> система называется **определенной**, если она имеет только одно решение.

Системы линейных уравнений

Матричная форма записи системы линейных уравнений

Системе линейных уравнений (1) соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемая **матрицей системы**.

Запишем систему (1) в матричной форме. Пусть

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxtimes \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \boxtimes \\ b_m \end{pmatrix}$$

– матрицы-столбцы переменных и свободных членов.

Тогда легко показать, что система (1) может быть записана в следующей матричной форме:

$$A\overline{x} = \overline{b} \qquad (2)$$

Действительно, произведение $A\overline{x}$ определено, т.к. число столбцов A равно числу строк $\overline{x}$:

$$A\overline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxtimes \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots + & a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Две матрицы **равны**, если равны их соответствующие элементы.

Поэтому, приравнивая соответствующие элементы $A\overline{x}$ и $\overline{b}$, получим систему (1). Итак, систему (1) можно записать в компактной матричной форме (2).

Перейдем теперь к рассмотрению способов решения систем линейных уравнений.

Системы линейных уравнений

п.2.2. Методы решения системы n линейных уравнений с n переменными

1.Матричный способ решения систем линейных уравнений

Рассматривается система линейных уравнений (1), когда число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Эту систему представим в матричной форме

$$A\overline{x} = \overline{b}\,.$$

Пусть $det\,A = \Delta \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части матричного уравнения на A^{-1} слева. Получаем:

$$A^{-1}(A \cdot \overline{x}) = A^{-1}\overline{b}\,;$$

$$(A^{-1}A)\ \overline{x} = A^{-1}\overline{b}\,;$$

$$A^{-1}A = E \Rightarrow$$

$$E\overline{x} = A^{-1}\overline{b}\,;$$

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}\text{, т.к. } E\overline{x} = \overline{x}\,.$$

Таким образом, решение системы можно найти по формуле

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}\,.$$

Системы линейных уравнений

Пример. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

матричным способом.

Решение.

Запишем систему в матричной форме $A\overline{x} = \overline{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения имеет вид:

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}.$$

Поскольку обратная матрица равна (убедиться самим):

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то имеем:

$$\overline{x} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126 & +70 & -208 \\ -90 & -56 & +128 \\ -18 & +14 & +16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = -2.$

Системы линейных уравнений

2. Правило Крамера

Рассмотрим систему линейных уравнений (1), когда число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

Систему (3) принято называть **квадратной**, ей соответствует матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема Крамера. Если определитель системы (3) $\Delta \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение, вычисляемое по формулам Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \, (i = 1,\ 2,\ \ldots n),$$

где Δ_i — определитель, получаемый из определителя Δ путем замены i - го столбца столбцом свободных членов.

Т.е. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

и т.д.

Системы линейных уравнений

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение. Легко убедиться, что определитель системы Δ = -10. Поэтому система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ_i получается из определителя Δ заменой в нем i - го столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -20$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10.$$

Определители вычесляются, например, по правилу треугольника (см. тему Определители).

Остается привести решение системы уравнений:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1;\ \boldsymbol{x_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2;\ \boldsymbol{x_3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Системы линейных уравнений

3. Метод Гаусса

Метод Гаусса – *метод последовательного исключения переменных* – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

!!!!! Это универсальный метод, который позволяет решать не только системы линейных уравнений, где $m=n$, но и при $m \neq n$. Поэтому рассмотрим более общий случай.

Системы линейных уравнений

Система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными (общий случай)

Рассмотрим теперь общий случай системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (4)$$

Данной системе соответствует матрица

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемая **расширенной матрицей системы**.

Матрица $\overline{A}$ вполне определяет систему (4): по ней полностью можно воспроизвести систему (4) с точностью до обозначения неизвестных.

Системы линейных уравнений

Приведем без доказательства **критерий совместности систем линейных уравнений**.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (4) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу её расширенной матрицы, т.е. $r(A) = r(\overline{A})$.

Этот критерий позволяет установить совместность или несовместность системы без предварительного её решения.

Без доказательства приведем одно очевидное утверждение.

Утверждение. Элементарным преобразованиям матрицы А системы (4) соответствуют элементарные преобразования уравнений этой системы:

(а) вычеркивание уравнения с нулевыми коэффициентами;

(б) перестановка двух уравнений системы местами;

(в) умножение строки на число, неравное нулю;

(г) прибавление к строке другой строки, умноженной на произвольное число.

Из элементарной математики нам известно, что при элементарных преобразованиях системы получается новая система, эквивалентная данной.

Системы линейных уравнений

БОЛЕЕ ПОДРОБНО О МЕТОДЕ ГАУССА.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения переменных из уравнений системы. Смысл метода заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последних переменных, определяются остальные неизвестные.

Метод Гаусса состоит из прямого и обратного хода. Если **прямым ходом** заданная система приводится к ступенчатому виду, то решение системы находится **обратным ходом** метода Гаусса.

Системы линейных уравнений

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

Далее, расширенную матрицу $\overline{A}$ с помощью элементарных преобразований приведем к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & \underline{5} & \underline{-1} & \underline{-16} & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & \underline{-1} \end{array}\right) = B$$

Матрица В имеет ступенчатый вид и, следовательно, ранг расширенной матрицы равен 3. Заметим, что и матрица системы (до вертикальной черты) одновременно тоже приведена к ступенчатому виду, но она имеет ранг $r = 2$, т.е. $r(A) \neq r(\overline{A})$. По теореме Кронекера-Капелли система не является совместной.

Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_2 - x_3 - 16x_4 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1 \end{cases}$$

Видно, что не существует таких числовых значений x_1, x_2, x_3, x_4, чтобы последнее уравнение выполнялось, а значит, система **несовместна**.

Системы линейных уравнений

!!!!! Всегда, если в ступенчатом виде расширенной матрицы <u>есть строка, в которой до вертикальной черты стоят только нули, а за вертикальной чертой стоит ненулевой элемент, можно сделать вывод о несовместности системы уравнений</u>.

!!!!! Если же $r(A) = r(\overline{A})$, т.е. ранги расширенной матрицы и матрицы системы совпадают, то ступенчатая форма матрицы B заканчивается нулевыми строками.

В этом случае исходная система <u>совместна</u> согласно теореме Кронекера-Капелли.

Научимся теперь находить решения системы линейных уравнений в случае ее <u>совместности.</u>

Системы линейных уравнений

Пример. Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x11_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса):

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -11 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & =1 & 0 \\ 0 & 5 & -14 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & \underline{1} & \underline{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B$$

Поскольку после элементарных преобразований расширенной матрицы и матрицы системы остались 3 ступеньки, то $r(A) = r(\overline{A})$ и система **совместна**.

Равносильная ступенчатая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Мы отбросили последнее уравнение, которое выполняется тождественно (при всех значениях x_1, x_2, x_3, x_4 имеем $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$).

Системы линейных уравнений

Обратный ход метода Гаусса начинается с того, что объявляем переменные x_1, x_2, x_3 («связанные» с угловыми элементами) главными, а переменную x_4 – свободной.

Выражаем через эту свободную переменную x_4 остальные переменные: из последнего уравнения находим x_3, а затем, подставляя выражение для x_3 во второе уравнение, получаем выражение x_2 через x_4 и, поднимаясь ещё «выше», аналогично находим x_1.

Запишем общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -4x_4 - 14 \\ x_2 = -2x_4 - 9 \\ x_3 = -x_4 - 3 \end{cases}$$

или

$$\bar{x} = (-\ 4x_4 - 14;\ -\ 2x_4 - 9;\ -\ x_4 - 3;\ x_4).$$

Давая переменной x_4 конкретные числовые значения и вычисляя x_1, x_2, x_3, мы будем получать все новые и новые решения системы.

Например, если $x_4 = 0$, то $x_1 = -14$, $x_2 = -9$, $x_3 = -3$ и вектор $\bar{x} = (-14, -9, -3, 0)$ будет **частным решением** системы уравнений.

Т.о. система **совместна и неопределена** (т.е. имеет множество решений).

Системы линейных уравнений

Особо отметим ситуацию, когда система уравнений имеет единственное решение.

!!!! Это возможно тогда, когда угловых элементов в ступенчатой форме расширенной матрицы ровно столько, сколько переменных в задаче.

Пример. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся методом Гаусса. Для этого выпишем расширенную матрицу системы уравнений и приведем к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right)$$

(1) - переставили местами I и II строки;

(2) - к II и III строкам прибавили I-ю строку, умноженную соответственно на (-3) и (-4);

(3) - к III строке прибавили II-ю строку, умноженную на (-5).

Последней матрице соответствует матрица

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad - x_2 + 4x_3 = 5 \\ \quad\quad -11x_3 = -22 \end{cases}$$

Система приведена к треугольному виду, она имеет единственное решение:

$$x_3 = 2;\ x_2 = 4x_3 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 = 3;\ x_1 = x_3 - x_2 = 2 - 3 = -1.$$

Решением системы является вектор $\overline{\alpha} = (-1;\ 3;\ 2)$, система **совместная и определенная**.

Системы линейных уравнений

!!! Метод Гаусса по сравнению с другими методами имеет следующие достоинства:

- значительно менее трудоемкий;
- позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти ее решения (единственное или бесконечное множество);
- дает возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений – ранг матрицы системы.

Системы линейных уравнений

п.2.3. Нахождение базисных решений системы уравнений

1. Система ([redacted].1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы $(A|B)$ *(теорема Кронекера—Капелли).*

2. Пусть $r(A) = r$, $r < n$; r переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *основными (базисными)*, если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. *базисный минор*) отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются *неосновными* (или *свободными*).

Решение системы ([redacted]1), в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется *базисным.*

Совместная система ([redacted]1) имеет: *единственное* решение, если $r = n$, и *бесконечное множество* решений, если $r < n$; число базисных решений *конечно* и не превосходит C_n^r.

1 [redacted]5. Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & -10 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно, ранг матрицы системы $r(A) = 2$.

Определитель при переменных x_1, x_2 (базисный минор) отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, эти переменные берем за основные. Остальные, неосновные переменные x_3, x_4 (с их коэффициентами) переносим в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 2x_4 + 1, \\ x_2 = 5x_3 + x_4 + 5, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1 = -2\cdot(5x_3 + x_4 + 5) + 3x_3 + 2x_4 + 1 = -10x_3 - 2x_4 - 10 + 3x_3 + 2x_4 + 1 = -7x_3 - 9$.

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы:

$(x_1 = -7c_1 - 9,\ x_2 = 5c_1 + c_2 + 5,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2)$. ▶

Системы линейных уравнений

2.[redacted]. Найти все базисные решения системы, приведенной в примере [redacted]. 1

Решение. Так как ранг матрицы системы $r(A) = 2$ (см. пример 1 [redacted]), то одно из уравнений системы, например, третье, можно отбросить; тогда возможны следующие группы основных переменных:

$$x_1, x_2; \quad x_1 x_3; \quad x_1, x_4; \quad x_2, x_3; \quad x_2, x_4; \quad x_3, x_4.$$

Как видно из примера [redacted] 1, переменные x_1, x_2 могут быть основными (базисными). Приравнивая неосновные (свободные) переменные нулю, т.е. $x_3 = x_4 = 0$, получим $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 = 3 \end{cases}$, откуда $x_1 = -9$, $x_2 = 5$, т.е. первое базисное решение $(-9; 5; 0; 0)$.

Возьмем в качестве основных переменные x_1, x_3: базисный минор $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Полагая неосновные переменные x_2, x_4 равными нулю, т.е. $x_2 = x_4 = 0$, получим $x_1 = -2$, $x_3 = -1$, т.е. второе базисное решение $(-2; 0; -1; 0)$.

Рассуждая аналогично, найдем еще три базисных решения:

$(-9; 0; 0; -5)$, $\left(0; -\frac{10}{7}; -\frac{9}{7}; 0\right)$, $\left(0; 0; -\frac{9}{7}; \frac{10}{7}\right)$. Переменные x_2, x_4 не могут быть основными, так как соответствующий базисный минор $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Системы линейных уравнений

п.2.3. Системы линейных однородных уравнений

Фундаментальная система решений

Определение: Система m линейных уравнений с n переменными называется *системой линейных однородных уравнений,* если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение (0; 0; ...; 0).

!!!

система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных, т.е. при $r(A) < n$.

Определение. Система линейно независимых решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называется ***фундаментальной***, если каждое решение системы является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Теорема. *Если ранг r матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений системы состоит из $n - r$ решений.*

Поэтому *общее решение* системы линейных однородных уравнений имеет вид

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ke_k,$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — любая фундаментальная система решений; $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные числа; $k = n - r$.

Системы линейных уравнений

Для нахождения фундаментальной системы решений системы уравнений ее r основных (базисных) переменных (с отличным от нуля базисным минором) выражают через неосновные (свободные) переменные. Затем поочередно заменяют $n - r$ неосновных переменных элементами каждой строки невырожденной квадратной матрицы порядка $n - r$, например, единичной E_{n-r}.

Системы линейных уравнений

(ПР) Определить имеет ли однородная система ненулевое решение (т.е ранг её матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных, т.е. $r(A)<n$).
Найти общее решение систем.

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение: 1) Приведём матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & -7 & -2 & 1 \\ -1 & -11 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} -\overline{I} \\ \overline{II} \\ \overline{III} \\ \overline{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & -7 & -2 & 1 \\ -1 & -11 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \overline{I} \\ \overline{II}+\overline{I} \\ \overline{III}+\overline{I} \\ \overline{IV}+2\overline{I} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \overline{I} \\ -\overline{II} \\ 2\overline{II}+\overline{III} \\ +\overline{II}+\overline{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A)=2<n=4$$

$2<4 \Rightarrow$

однородная система имеет ненулевое решение.

Системы линейных уравнений

2) Найдём фундаментальную систему решений. Она состоит из $k = n - r = 4 - 2 = 2$ решений.

Возьмём за базисные переменные x_1, x_2, т.к. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, тогда

x_3, x_4 – свободные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -3\left(-\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4\right) - x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{11}{4}x_4$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4$$

Решение имеет вид:

$$\left(-\frac{1}{4}x_3 + \frac{11}{4}x_4;\ -\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4;\ x_3;\ x_4\right) \quad (*)$$

где x_3, x_4 – любые числа.

Системы линейных уравнений

3) теперь полагаем:

а) $x_3 = 1 \quad x_4 = 0$

Подставим в (*) получим

$$\bar{e}_1 = \left(-\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{11}{4}\cdot 0; -\frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 0; 1; 0\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; 1; 0\right)$$ – первый вектор фундаментальной системы

б) $x_3 = 0 \quad x_4 = 1$

Подставим в (*) получим

$$\bar{e}_2 = \left(-\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{11}{4}\cdot 1; -\frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 1; 0; 1\right) =$$

$$= \left(\frac{11}{4}; -\frac{1}{4}; 0; 1\right)$$ – второй вектор фундаментальной системы

4) Находим <u>общее</u> решение нашей системы: $\bar{x}_{op} = c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2$

$$\bar{x} = c_1\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\cdot\begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$ где c_1 и c_2 – любые числа

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!