Лекция № 5
Спектральный анализ непериодических сигналов

Между сигналом $u(t)$ и его спектральной плотностью $S_1(j\omega)$ существует однозначное соответствие.

Для практических приложений является важным установление связи между преобразованием сигнала и соответствующим этому преобразованию изменением спектральных характеристик. Рассмотрим следующие важные преобразования сигналов:

- смещение сигнала во времени;
- сжатие (растяжение) сигнала во времени;
- суммирование сигналов;
- дифференцирование сигнала;
- интегрирование сигнала.

Спектральный анализ непериодических сигналов

Спектральная плотность сигнала, смещенного во времени

Функция времени задержанного сигнала при сохранении его формы запишется в виде: $u_2(t) = u_1(t - t_0)$.

Спектральная плотность задержанного сигнала $S_2(j\omega)$ очевидно имеет вид:

$$S_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} u_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования $\tau = t - t_0$, получим:

$$S_2(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} u_1(\tau) e^{-j\omega(t_0+\tau)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} S_1(j\omega).$$

Итак, задержка во времени сигнала на интервал t_0 приводит к изменению спектра фаз на величину $(-\omega t_0)$

Спектральный анализ непериодических сигналов

Спектральная плотность сигнала, сжатого во времени

Пусть сигнал $u_1(t)$ длительностью τ подвергся сжатию во времени так , что новый сжатый сигнал $u_2(t)$ связан с исходным соотношением:

$$u_2(t) = u_1(nt), \; n > 1.$$

Длительность сжатого сигнала очевидно равна τ/n .

Определим спектральную плотность $S_2(j\omega)$ сжатого сигнала:

$$S_2(j\omega) = \int_0^{\tau/n} u_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau/n} u_1(nt) e^{-j\omega t} dt$$

Вводя новую переменную интегрирования $x = nt$, получаем:

Спектральный анализ непериодических сигналов

Спектральная плотность сигнала, сжатого во времени:

$$S_2(j\omega) = \int_0^{\tau} u_1(x) e^{-j\omega \frac{x}{n}} \frac{dx}{n} = \frac{1}{n} \int_0^{\tau} u_1(x) e^{-j\frac{\omega}{n}x} dx$$

Интеграл в правой части выражения есть не что иное, как спектральная плотность исходного сигнала при частоте ω/n, то есть:

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{n} S_1(j\frac{\omega}{n}).$$

Итак, при сжатии сигнала в n раз на временной оси имеем:

- уменьшение модуля спектральной плотности в n раз;
- расширение во столько же раз его спектральных составляющих на оси частот.

Спектральный анализ непериодических сигналов

Спектральная плотность на выходе сумматора сигналов

Преобразование Фурье, определяющее спектральную плотность заданного сигнала, является *линейным преобразованием.* Если на вход сумматора подать некоторую совокупность сигналов $u_1(t),\ u_2(t),\ u_3(t),...,$ обладающих спектральными плотностями соответственно $S_1(j\omega), S_2(j\omega), S_3(j\omega),...,$ то взвешенной сумме сигналов на выходе сумматора $\sum_i a_i u_i(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \ldots$

будет соответствовать спектральная плотность:

$$S(j\omega) = a_1 S_1(j\omega) + a_2 S_2(j\omega) + \ldots = \sum_i a_i S_i(j\omega),$$

где a_i – произвольные числовые коэффициенты.

Спектральный анализ непериодических сигналов

Спектральная плотность продифференцированного сигнала

Подадим сигнал на вход линейного устройства, осуществляющего дифференцирование сигнала. Сигнал на выходе дифференцирующего устройства будет иметь вид:

$$u_{вых} = \tau_0 \, {du(t)}/{dt} \quad , \ \tau_0 = const.$$

Используя свойство преобразования Фурье, записываемое в виде:

$$F_0\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j\omega F_0\left[x(t)\right],$$

получим:

$$S_{вых}(j\omega) = j\omega\tau_0 S(j\omega).$$

Спектральный анализ непериодических сигналов

Спектральная плотность сигнала на выходе интегратора

Сигнал на выходе интегратора пропорционален интегралу от входного воздействия $u(t)$:

$$u_{вых}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int u(t) dt ,$$

где τ_0 – константа преобразования.

По аналогии с операцией дифференцирования нетрудно найти формулу связи спектральных плотностей сигналов на входе и выходе интегратора:

$$S_{вых}(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{j\omega\tau_0} .$$

Спектральный анализ непериодических сигналов

Практическая ширина спектра сигнала

Реальные сигналы всегда ограничены во времени, следовательно, их амплитудный спектр теоретически неограничен. Однако реальные сигналы генерируются и передаются устройствами, содержащими инерционные элементы (например, емкости и индуктивности в электрических цепях и прочих преобразователях). Поэтому они не могут содержать гармонических составляющих сколь угодно высоких частот.

В связи с этим возникает необходимость ввести в рассмотрение модели сигналов, обладающих как конечной длительностью, так и ограниченным спектром. При этом в соответствии с каким-либо критерием дополнительно ограничивается либо ширина спектра, либо длительность сигнала, либо оба параметра одновременно.

Чаще всего в качестве такого критерия используют энергетический критерий, согласно которому практическую ширину амплитудного спектра $\Delta\omega_{np}$ выбирают так, чтобы в нем была сосредоточена подавляющая часть энергии сигнала.

Спектральный анализ непериодических сигналов

Практическая ширина спектра сигнала

Для ее оценки используют равенство Парсеваля, позволяющее выразить энергию сигнала через $|S(\omega)|$:

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\, dt = \int_0^{T_n} |u(t)|^2\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |S(\omega)|^2\, d\omega$$

Практическая ширина спектра сигнала, сосредоточенная в диапазоне частот от 0 до некоторого значения , определяется из соотношения:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_{гр}} |S(\omega)|^2\, d\omega = \frac{\eta}{\pi}\int_0^{\infty} |S(\omega)|^2\, d\omega$$

Здесь $\omega_{гр}$ – граничная частота, определяющая верхнее значение спектра сигнала; η – коэффициент, значение которого выбирают в интервале от 0.9 до 0,998 в зависимости от требований к качеству воспроизведения сигнала.

Спектральный анализ непериодических сигналов

Практическая ширина спектра экспоненциального импульса

Задача: ***определить граничную частоту спектра сигнала вида:***

$$u(t) = u_0 e^{-at}, t \geq 0,$$

ориентируясь на практическую ширину спектра сигнала с $\eta = 0,95.$

Спектральные характеристики такого сигнала равны:

$$S(j\omega) = \frac{u_0}{a + j\omega}; \qquad \left|S(\omega)\right| = \frac{u_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$$

Трансцендентное уравнение, решение которого позволяет определить , имеет вид: $\omega_{гр}$

$$u_0^2 \int_0^{\omega_{гр}} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = 0,95 u_0^2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Спектральный анализ непериодических сигналов

Практическая ширина спектра экспоненциального импульса

Задача: ***определить граничную частоту спектра сигнала вида:***

$$u(t) = u_0 e^{-at}, t \geq 0,$$

ориентируясь на практическую ширину спектра сигнала с $\eta = 0,95.$

Принять $aек\ 10^3\ 1/$.

Исходя из трансцендентного уравнения, решение которого позволяет определить $\omega_{гр}$, получаем:

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{\omega}{a} \bigg|_0^\infty = \frac{1}{a} \times \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда: $arctg\left({\omega_{гр}}/{a} \right) = 0,95 \times \frac{\pi}{2},$ и $\omega_{гр} = 1,37 \times 10^4\ {1}/{c}.$