Кафедра маркшейдерского дела

Математика, часть 2

Основные сведения из теории вероятностей

Лектор: проф., д.т.н.

Снетков Вячеслав Иванович

ЛИТЕРАТУРА

- **Гмурман В.С.** Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972-2004. – 368 с.
- **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. –М.: Наука, 1969-2002. –516с.
- **Снетков В.И.** Математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. Изд-во ИрГТУ. – Иркутск, 2003. – 105с.

**То, что случилось однажды,
может не повториться никогда,
но то, что случилось во второй раз,
непременно произойдёт и в третий.**
(Восточная мудрость)

- Событием называется факт, который в результате опыта или испытания может либо произойти, либо нет.
- Все события обычно делят на три вида:
  - достоверные,
  - невозможные
  - случайные.
- Достоверным называют событие, которое непременно произойдёт, если будет осуществлена определённая совокупность условий S.
- Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдёт, если будет осуществлена совокупность условий S.

То, что случилось однажды,
может не повториться никогда,
но то, что случилось во второй раз,
непременно произойдёт и в третий.
(Восточная мудрость)

- Случайным событием называют событие, которое в результате опыта может либо произойти, либо нет при сохранении постоянства условий S.
- Несовместными случайными событиями называют, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример I. Из ящика с буровыми коронками наудачу извлечена одна коронка. Появление стандартной коронки исключает появление нестандартной коронки. События «появилась стандартная коронка» и «появилась нестандартная коронка» — несовместные.

Пример 2. Брошена монета. Появление герба исключает появление цифры. События «появился герб» и «появилась надпись» — несовместные.

- События называют ***единственно возможными,*** если в результате испытания появление одного и только одного из них является достоверным событием.
- События называют ***равновозможными,*** если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.
- **Пример 3.** Появление герба и появление цифры при бросании монеты есть события равновозможные. Предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму, а наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Теория вероятностей *изучает вероятностные закономерности в массовых случайных явлениях и предсказывает на этой основе наиболее вероятный (средний) результат*.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события *А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех единственно возможных и равновозможных элементарных исходов испытания*.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где *m* - число элементарных исходов, благоприятствующих событию ; *n* - число всех возможных элементарных исходов испытания.

Свойства вероятности:

- **Вероятность достоверного события равна единице.** Если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае *m=n* и вероятность события равна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

- ***Вероятность невозможного события равна нулю.*** Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае m=0 и, следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

- **Вероятность случайного события** есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Основные сведения из теории вероятностей

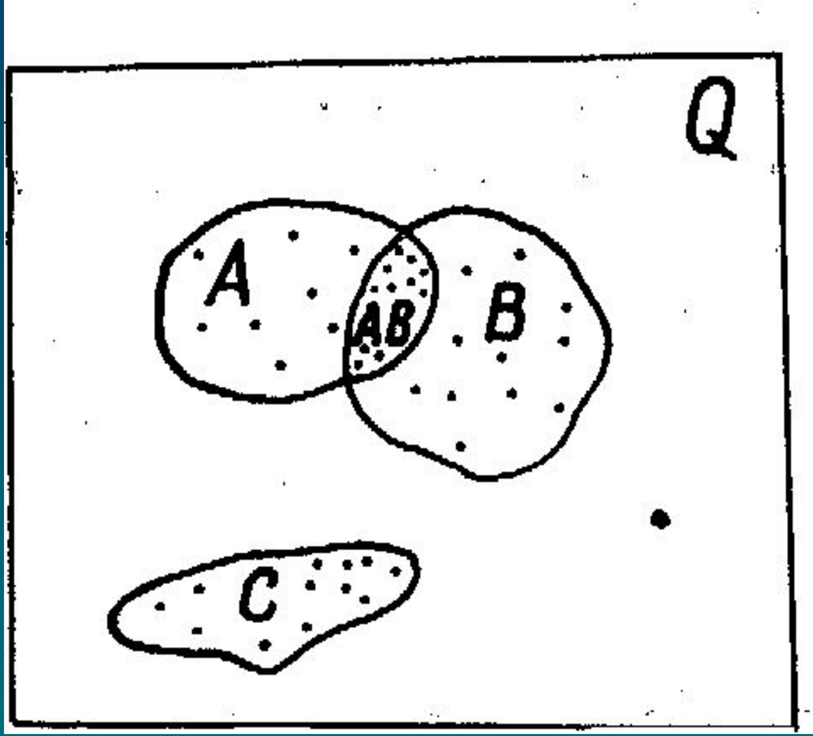
- Чему равна вероятность события Q?

$$P(Q) = \frac{Q}{Q} = 1$$

- Чему равна вероятность попадания точки на площадь *V*, которая находится вне площади *Q*?

$$P(V) = 0$$

- Чему равна вероятность попадания точки в область А?



$$P(A) = \frac{A}{Q}$$

Статистическая вероятность.

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания — конечно. На практике чаще встречаются испытания, число возможных исходов которых - бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо.

- ***Наиболее слабая сторона классического определения состоит в том, что очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Обычно о равновозможности элементарных исходов испытания заключают из соображений симметрии. Так обстоит дело, например, при бросании игральной кости, когда предполагают, что она имеет форму правильного многогранника (куба). Однако задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются весьма редко***.

Статистическая вероятность.

- Поэтому наряду с классическим определением пользуются также *статистическим* определением вероятности, принимая за вероятность события *относительную частоту* или число, близкое к ней.
- **Например**, если в результате достаточно большого числа испытаний оказалось, что относительная частота весьма близка к числу 0.4, то это число можно принять за статистическую вероятность события.

Частота, относительная частота событий (частость)

Относительной частотой (частостью) **события называют отношение числа испытаний, в которых интересующее событие появилось (благоприятный исход), к общему числу фактически произведенных испытаний. Её обычно обозначают P'(A).**

$$P'(A) = \frac{k'}{N}$$

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, приходим к выводу, что:

- для определения **вероятности** ***не требуется*** проведения опытов,
- для определения **относительной частоты** фактически ***необходимо выполнить*** испытания.

Таким образом, ***вероятность*** вычисляют **до опыта**, а ***относительную частоту*** - **после опыта**.

Частота, относительная частота событий (частость)

Пример I. На месторождении отобрано 100 проб, в каждой из которых определено содержание полезного компонента. В результате оказалось, что в 62 пробах содержание ниже минимально промышленного содержания. Относительная частота появления некондиционных проб

$$P'(A) = \frac{62}{100} = 0.62$$

Пример 2. В практике работы проходческой бригады зарегистрировано 2 случая «отказа» из 210 обуренных и взорванных шпуров. Относительная частота появления «отказов» составила:

$$P'(A) = \frac{2}{210} = 0.01$$

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Относительная частота при соблюдении определённых условий может быть принята в качестве *эмпирической вероятности*.

Пример 4. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления герба. Результаты нескольких опытов приведены в таблице. Чему равна вероятность события Q?

Число бросаний	Число появлений герба	Относительная частота
4040 12000 24000	2048 6019 12012	0,5069 0,5016 0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой **двух событий** ***A*** **и** ***B*** **называют событие, состоящее в появлении события** ***A*** **или события** ***B*****, или обоих этих событий. Знак «+» также означает слово «или».**

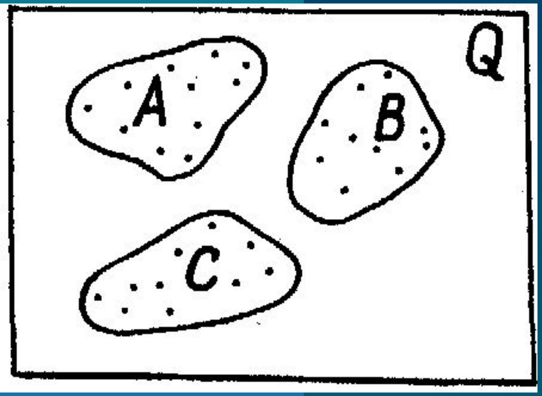
Пример 1. Если произведены два выстрела по мишени и *A* — попадание при первом выстреле, *B* — попадание при втором выстреле, то *A*+*B* — попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема. ***Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий***

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий



На рисунке показаны площади , которые не пересекаются, следовательно точка не может попасть одновременно в 2 или 3 области, то есть события несовместные.

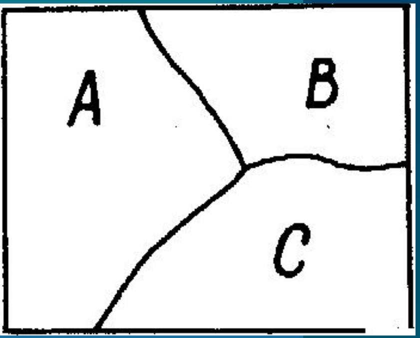
Тогда вероятность попадания точки в площадь А или В, или С (сумма площадей – это площадь благоприятных исходов) будет равна отношению площади благоприятных событий к области возможных исходов – Q, то есть:

$$P(A+B+C)=\frac{A+B+C}{Q}=\frac{A}{Q}+\frac{B}{Q}+\frac{C}{Q}=P(A)+P(B)+P(C)$$

Для любого числа событий можно записать:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

Полная группа событий



Определение 1. ***Полной группой*** **называют совокупность единственно возможных событий испытания.**

Определение 2. ***Полная группа событий* - события А, В, С, … несовместные, охватывающие все возможные случаи.**

Пример . Стрелок производит по мишени 2 выстрела. События (одно попадание), (два попадания) и (промах) образуют полную группу.

Теорема. Сумма вероятностей событий , $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ***образующих полную группу, равна единице.***

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n) = 1$$

Противоположные события

- **Противоположными событиями** ***называют*** ***два единственно возможных события, образующих полную группу*****.**
  - **Если одно из двух противоположных событий обозначено через А, то противоположное принято обозначать** $\overline{A}$ **(читается «не А»)*.***

Пример 5. Попадание и промах при выстреле по цели - противоположные события. Если *А* — попадание, то $\overline{A}$ **- промах.**

Противоположные события

- **Теорема**. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Примечание. Обозначим вероятность одного из двух противоположных событий буквой ***p***, а вероятность другого события - ***q***. Тогда связь между ними можно выразить формулой:

$$p = 1 - q$$

Теорема умножения вероятностей

- **Независимые и зависимые события.**

  Два события называют *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого.

  - **Пример**. Монета брошена 2 раза. Вероятность появления герба в первом испытании (событие *A*) не зависит от появления или непоявления герба во втором испытании (событие *B*). В свою очередь, вероятность выпадения герба во втором испытании не зависит от результата первого испытания. Таким образом, события A и B - ***независимые***.

Теорема умножения вероятностей

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы.

Два события называют *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или не наступления другого события

Теорема умножения вероятностей независимых событий.

Произведением двух событий А и В **называют событие А*В, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Знак умножения может быть заменён на «И».**

Например, если в ящике содержатся детали, изготовленные заводами № 1 и № 2, и событие А - появление стандартной детали, событие *В* - деталь изготовлена заводом № 1, то событие АВ - появление стандартной детали завода № 1 (знак умножения обычно опускается).

Теорема умножения вероятностей независимых событий.

Теорема. ***Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий***

$$P(AB) = P(A) * P(B)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания может появиться событий независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причём вероятности появления каждого из событий известны.

Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. ***Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий*** :

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пример 7. В карьере работает 4 буровых станка 2СБШ-250МН. Для каждого станка вероятность того, что он работает в данный момент, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один станок (событие *A*).

Решение. Так как события «станок работает» и «станок не работает» (в данный момент) противоположные, то сумма их вероятностей равна единице.

Вероятность того, что станок в данный момент не работает, равна:

$$q = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$$

.

Вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один станок, определится:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0.2^4 = 0.9984$$

.

Так как полученная вероятность весьма близка к единице, то, исходя из принципа практической невозможности маловероятных событий, заключаем, что в данный момент работает хотя бы один из станков.

Условная вероятность

Если вероятность события *B* не зависит от того, произошло событие *A* или нет, то событие *B* называется независимым от события *A*.

Рассмотрим зависимые и независимые события на примере схемы урн.

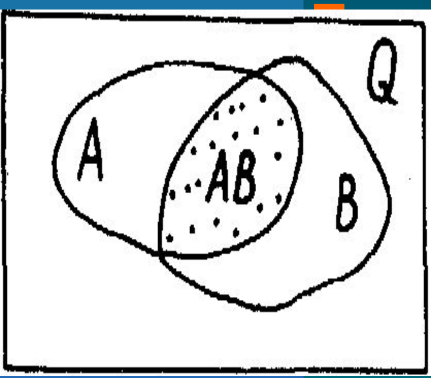
В урне 2 белых и 3 черных шара. Два раза вынимается шар, причем после первого вынимания шар возвращается в урну. Рассматриваются события: *A* - появление белого шара при первом вынимании. *B* - появление белого шара при повторном вынимании. В этом случае вероятность события *B* не зависит от того, какой шар оказался при первом вынимании. События *A* и *B* *независимые*.

Если же первый шар не возвращается в урну, то положение меняется. Для данного примера вероятность события *А* равна 2/5. Если известно, что при первом вынимании был вынут белый шар, то есть произошло интересующее нас событие, то вероятность вынуть белый шар при втором вынимании изменится – Р(В)=1/4. Вероятность события *В*, вычисленная при условии, что имело место событие *А*, называется *условной* вероятностью события *В* и обозначается Р(В/А).

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

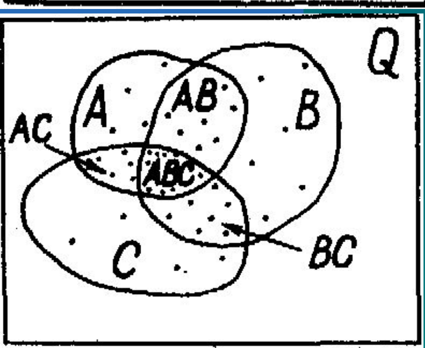
Теорема. **Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие имело место:**

$$P(AB) = P(A) * P(B/A)$$



Проведём доказательство теоремы в графическом виде

$$P(AB) = \frac{A}{Q} * \frac{AB}{A} = P(A)P(B/A)$$



Для трех событий

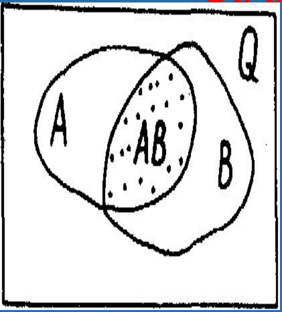
$$P(ABC) = \frac{ABC}{Q} * \frac{A}{A} * \frac{AB}{AB} = P(A) * P(B/A) * P(C/AB)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример. Событие *A* - появление четырех очков при бросании игральной кости; событие *B* — появление четного числа очков. События *A* и *B* — совместные.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления



$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B)=\frac{A+B-AB}{Q}=\frac{A}{Q}+\frac{B}{Q}-\frac{AB}{Q}=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Формула полной вероятности

Теорема. **Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:**

$$P(A) = P(B_1) * P(A/B_1) + P(B_2) * P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) * P(A/B_n)$$

Формула полной вероятности

Пример 1. На столе эксперта обогатительной фабрики драги лежат два набора алмазов, извлечённых из руды в **1** и **2** смены. Качество алмазов зависит от формы, трещин, цвета, наличия сколов и т.п. Вероятность того, что кристалл алмаза первого набора ювелирный, равна **0,2**, а второго - **0,3**. Найти вероятность того, что взятый наудачу алмаз (из наудачу взятого набора) - ювелирный.

Формула полной вероятности

Решение. Обозначим через А событие – взятый кристалл ювелирный.

Алмаз может быть извлечен либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2). Вероятность того, что деталь будет вынута из первого набора или второго, найдётся:

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечен ювелирный алмаз $p(A/B_1)=0.2$; условная вероятность того, что из второго набора будет извлечен кристалл ювелирного качества $p(A/B_2)=0.3$.

Вычислим вероятность того, что взятый наудачу алмаз (из наудачу взятого набора) - ювелирный:

$$P(A) = P(B_1) * P(A/B_1) + P(B_2) * P(A/B_2) = 0.5 * 0.2 + 0.5 * 0.3 = 0.25$$

Формула Бернулли

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события А. В разных независимых испытаниях событие А может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность.

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Будем считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность не наступления события A в каждом испытании также постоянна и равна q = 1- p.

Поставим своей задачей вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно m раз и, следовательно, не осуществится n—m раз.

Формула Бернулли

Искомая вероятность (появления **m** раз события ***A*** в ***n*** испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Формула Бернулли

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии при работе гидромонитора в течении одних суток не превысит установленной нормы, равна p=0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

- **Решение.** Вероятность нормального расхода электроэнергии на продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна p= 0,75. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна q = 1-p = 1- 0.75 = 0.25. Вероятность того, что в течение 6 суток событие появится ровно 4 раза, может быть определена по формуле Бернулли:

$$P_6^4 = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{(1*2*3*4*5*6)}{(1*2*3*4)*(1*2)} * 0.75^4 * 0.25^2 = 0.30$$