# *§15. Предел числовой последовательности*

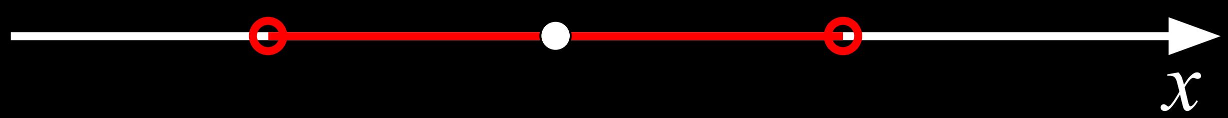
## п.1. Кванторы.

— квантор существования («существует»)

— квантор общности («для любого»)

*Окрестностью* точки называется любой интервал, содержащий эту точку.


*ε - окрестностью* точки $a$ называется интервал



# п.2. Основные понятия.

*Числовой последовательностью* называется правило, согласно которому каждому натуральному числу $n$ поставлено в соответствие действительное число $x_n$.

Обозначение:

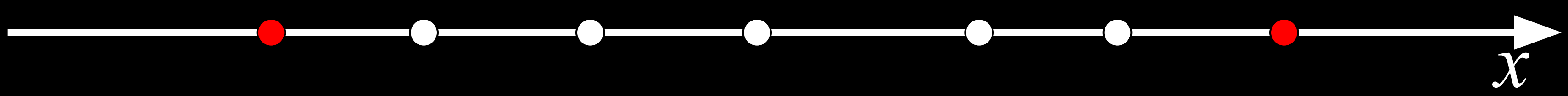
Примеры.

1) **2, 4, 6, 8, …**

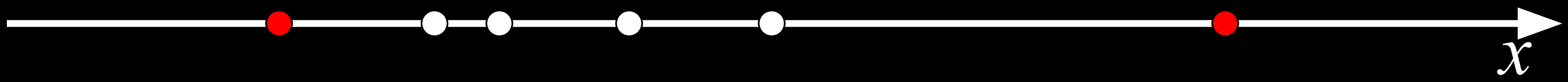
2)

Последовательность называется *ограниченной*, если

Геометрическая интерпретация



Пример.




Самостоятельно: привести еще 2 примера.

Последовательность называется *неограниченной*, если

Пример.

Самостоятельно: привести еще 2 примера.

Последовательность называется *постоянной*, если

---

Пример.

Последовательность называется *возрастающей*, если

Пример. — целая часть $x$.

0,1,1,2,2,3,3,…

Самостоятельно: привести еще 2 примера.

Последовательность называется *убывающей*, если

---

Пример.

Самостоятельно: привести еще 2 примера.

---

Возрастающие Убывающие

*Монотонные* последовательности

Последовательность называется *строго возрастающей*, если

Пример.

Последовательность называется *строго убывающей*, если

Пример.

Самостоятельно: привести еще по 2 примера.

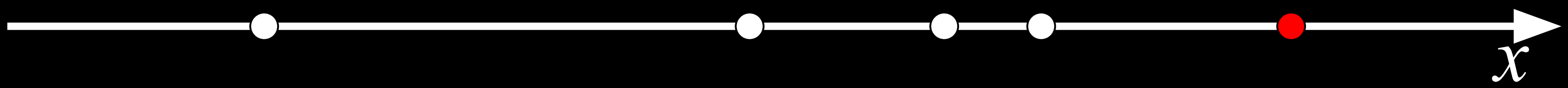
Строго возрастающие Строго убывающие

*Строго монотонные* последовательности

Самостоятельно: привести 2 примера последовательностей, не являющихся монотонными.

# п.3. Предел числовой последовательности.

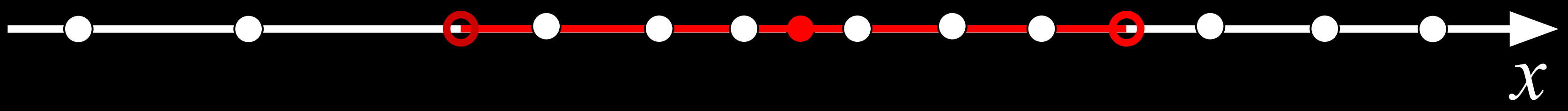
Пример.



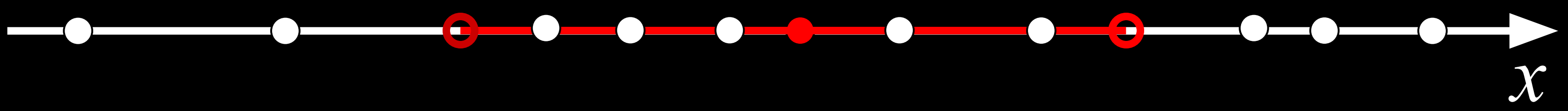
Число $a$ называется *пределом последовательности* если для любого действительного числа $\varepsilon$ можно указать такое натуральное число $N_0$, что для всех элементов последовательности с номерами большими, чем $N_0$, будет выполняться неравенство

# Примеры.

# Геометрический смысл предела последовательности




Пример.



Последовательность называется *бесконечно малой (БМП)*, если

---

Пример.

Самостоятельно: привести еще 2 примера.

# *Свойства БМП*

1. Сумма двух БМП есть БМП.

Доказательство.

– БМП – БМП

– БМП ?

– БМП

– БМП

– БМП

2. БМП — ограниченная последовательность.

3. Произведение двух БМП есть БМП.

4. Произведение БМП и ограниченной последовательности есть БМП.

5. Если — постоянная и БМП, то

Последовательность называется *бесконечно большой (ББП)*, если

Примеры.

Самостоятельно: привести еще 2 примера.

# *Свойства ББП*

1. ББП — неограниченная последовательность.

2. Произведение двух ББП есть ББП.

3. Сумма ББП и ограниченной последовательности есть ББП.

4. ББП не может являться постоянной последовательностью.

*Замечание 1.* Сумма двух ББП не обязательно является ББП.

Пример.

# *Связь между БМП и ББП*

***Теорема 1.*** Если — ББП и

то — БМП.

Обратно, если — БМП и

то — ББП.

Самостоятельно: проиллюстрировать теорему на двух примерах.

*Замечание 2.*

1) Если                    то говорят, что

сходится к числу                    — сходящаяся.

---

2) Если                    то говорят, что

сходится к

---

3) Если         не имеет предела, то говорят, что

расходится.

Пример.

## п.4. Свойства сходящихся последовательностей.

1. Для того, чтобы последовательность имела своим пределом число $a$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность была БМП.

– БМП

Доказательство самостоятельно.

Самостоятельно: проиллюстрировать теорему на двух примерах.

2. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство самостоятельно.

---

3. Сходящаяся последовательность ограниченна.

Самостоятельно: проиллюстрировать теорему на двух примерах.

*Замечание 3.* Обратное не верно.

Пример.

# 4. Алгебраические свойства сходящихся последовательностей.

а)

б)

в)

г)

Доказать самостоятельно свойство а).

Самостоятельно: проиллюстрировать каждый пункт на двух примерах.

## п.5. Предельный переход в неравенствах.

***Теорема 2.*** Если и, начиная с

некоторого номера то

*Следствие.*

***Теорема 3 (Вейерштрасс).***

Монотонная ограниченная последовательность сходится.

---

Пример.

— возрастающая