

Тема: Нелинейные цепи.

Кафедра Радиоэлектроники.

**Преподаватель:
Лазаренко
Сергей Валерьевич.**

Учебные вопросы:

1. Основные определения.
2. Параметры нелинейных элементов.
3. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов.
4. Методы анализа нелинейных цепей.
5. Тригонометрический метод.
6. Метод коэффициентов Берга.

1. Основные определения.

Нелинейные системы, характерны тем, что в них связь между входным сигналом $u_{вх}(t)$ и выходной реакцией $u_{вых}(t)$ устанавливается функциональной нелинейной зависимостью

$$u_{вых}(t) = f(u_{вх}(t))$$

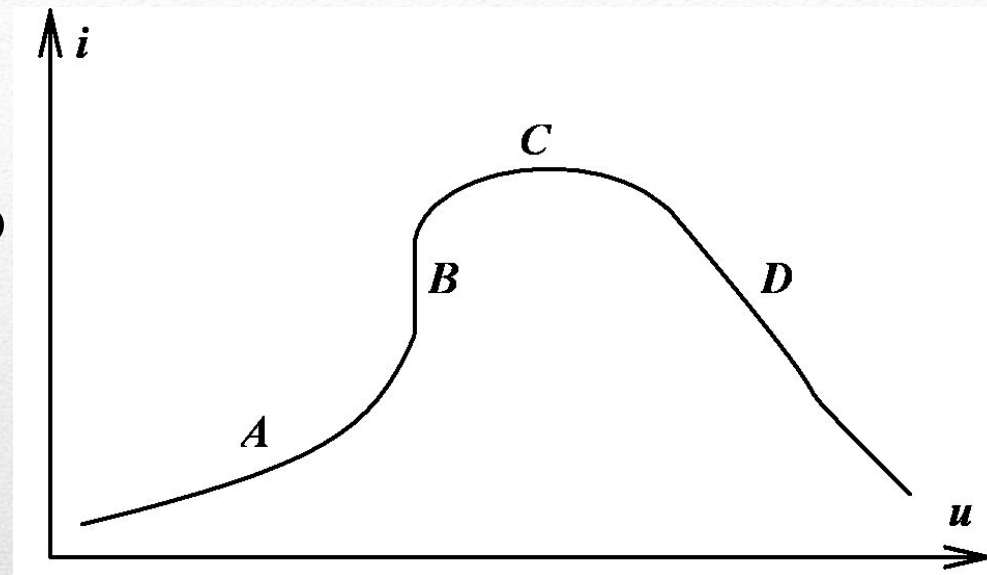
Нелинейными называются цепи, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями. Уравнения электрической цепи оказываются нелинейными, если цепь содержит хотя бы один нелинейный элемент (НЭ), т.е. элемент, параметры которого зависят от величины протекающего через него тока или приложенного к нему напряжения.

Нелинейные цепи находят широкое применение в радиотехнике, поскольку большинство основных радиотехнических преобразований сигналов осуществляется с помощью нелинейных цепей.

Различают резистивные нелинейные элементы (РНЭ), нелинейные индуктивности и нелинейные емкости. Наиболее распространенными РНЭ являются варисторы, изготовляемые из керамических полупроводников на основе карбида кремния, а также электронные лампы, транзисторы и полупроводниковые диоды. РНЭ являются практически безынерционными НЭ.

2. Параметры нелинейных элементов.

Полное представление о НЭ можно составить на основе характеристик, отражающих зависимости между электрическими величинами. Для РНЭ такой характеристикой является зависимость между током и напряжением $i=f(u)$, называемой вольтамперной характеристикой (ВАХ).



Различают статические, дифференциальные и усредненные параметры НЭ. Статическое сопротивление РНЭ (сопротивление постоянному току) рассчитывается по формуле

$$R_{ст} = \frac{u}{i}$$

и определяется углом наклона прямой, проведенной из начала координат в данную точку ВАХ.

Дифференциальное сопротивление РНЭ определяется по формуле

$$R_d = \frac{du}{di}$$

Дифференциальная проводимость РНЭ, называемая чаще крутизной ВАХ, рассчитывается по формуле

$$S = \frac{di}{du}$$

Средняя крутизна, например, определяется как отношение амплитуды первой гармоники тока I_{m1} через РНЭ к амплитуде гармонического напряжения U_m , приложенного к этому элементу

$$S_{cp} = \frac{I_{m1}}{U_m}$$

Анализ ВАХ РНЭ показывает, что:

- в отличие от линейного резистора статическое и дифференциальное сопротивления РНЭ не равны друг другу, и их величина зависит от приложенного к элементу напряжения;
- статическое сопротивление РНЭ всегда конечно и положительно;
- дифференциальное сопротивление может быть положительным, равным нулю, бесконечности и даже становиться отрицательным.

3. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов.

Сущность метода заключается в том, что для проверки гипотезы о виде функциональной зависимости $s=s(x)$, заданной множеством значений $\{s_j, x_j\}$, переменные x и s заменяют некоторыми новыми переменными $X=f_1(x, s)$; $S=f_2(x, s)$, которые выбирают так, чтобы при сделанных допущениях о виде функции $s=s(x)$ переменные S и X были связаны между собой линейной зависимостью

$$S = K_1 X + K_0 \quad (1)$$

Если предполагается, что заданная зависимость описывается степенной функцией $s = a \cdot x^b$ (2)

то, логарифмируя левую и правую части выражения (2)

$$\lg s = \lg a + b \cdot \lg x$$

нетрудно прийти к выводу о том, что зависимость между вспомогательными переменными $S=\lg s$ и $X=\lg x$ должна иметь линейный характер:

$$S = \lg a + b \cdot X \quad (3)$$

Если зависимость между величинами x и s аппроксимируется показательной функцией $s = a \cdot e^{bx}$ (4)

то линейной зависимостью $S = \ln a + b \cdot X$ (5)

связаны между собой переменные $S = \ln s$ и $X = x$.

Для степенного полинома второй степени $s = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$ (6)

линейный вид должна иметь зависимость $S = \Delta s$ от $X = x$, где $\Delta s = s_j - s_{j-1}$ - разность значений функции $s(x)$, соответствующих двум соседним значениям аргумента x_j и x_{j-1} (предполагается, что значения аргумента образуют арифметическую прогрессию с шагом $h = x_j - x_{j-1}$).

Если заданная зависимость $s = s(x)$ аппроксимируется экспоненциальным полиномом вида $s = a \cdot e^{bx} + c$ (7)

то линейной зависимостью $S = \lg a + (b \cdot \lg e) X$ (8)

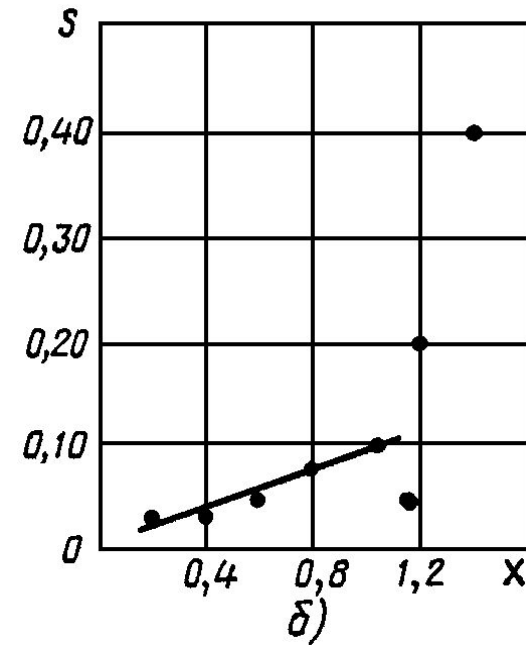
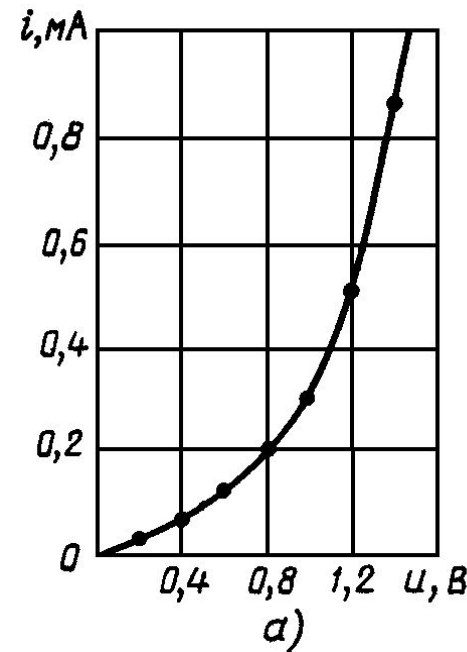
Для определения c выбирают три значения аргумента

$x_1, x_2, x_3 = (x_1 + x_2)/2$ и соответствующие им три значения функции s_1, s_2, s_3 , которые затем подставляют в выражение

$$c = \frac{s_1 \cdot s_2 - s_3^2}{s_1 + s_2 - 2s_3} \quad (9)$$

Пример 1. На рисунке изображена прямая ветвь ВАХ полупроводникового диода.

Проверим, можно ли аппроксимировать эту характеристику полиномом второй степени (б).



Выбираем шаг изменения аргумента $h = 0,2$ В, рассчитываем значения вспомогательной переменной $S = \Delta s = i_j - i_{j-1}$, соответствующие выбранным значениям аргумента (рисунок 1, б). Как видно из рисунка, зависимость S от X практически совпадает с линейной при изменении $X = x = u$ в пределах от 0 до 1 В. Следовательно, в этой области рассматриваемая ВАХ может быть аппроксимирована полиномом второй степени.

Пример 2. Проверим, можно ли аппроксимировать ВАХ диода с помощью экспоненциального полинома вида (7).

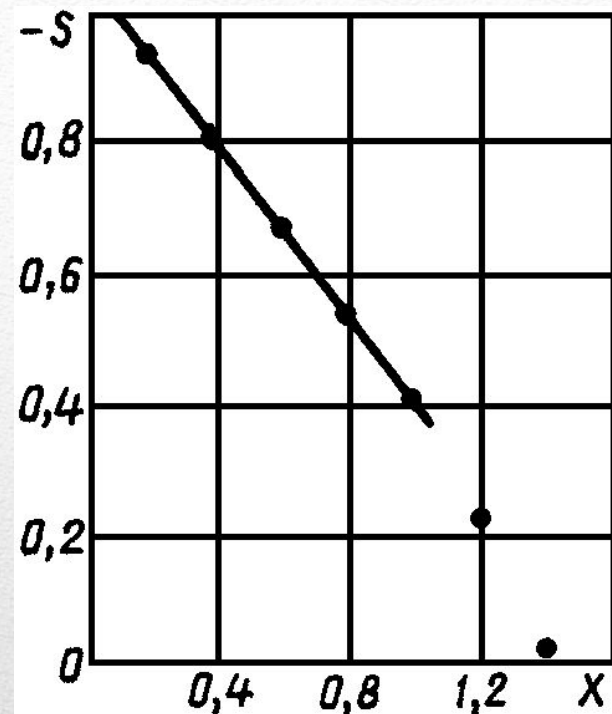
Для определения константы с выберем три значения аргумента $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0,5$ найдем соответствующие им значения функции:

$s_1=0$, $s_2=0,3$, $s_3=0,095$. Подставляя эти

значения в выражение (9), получаем

$c=-0,082$. Далее строим зависимость

вспомогательной функции $S=\lg(s-c)$ от $X=x$



Как видно из рисунка, в пределах от $X=0$ до $X=1$ зависимость $S(X)$ практически совпадает с линейной, следовательно, в этой области ВАХ может быть аппроксимирована экспоненциальным полиномом рассматриваемого типа.

Если для аппроксимации ВАХ, задаваемой множеством точек $\{s_j, x_j\}$, выбрана функция $s = s(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ (10)

имеющая $n+1$ неизвестных постоянных коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n , то для определения этих коэффициентов выбирают $n+1$ наиболее характерных точек ВАХ, лежащих в пределах рабочей области. Подставляя значения x_j и s_j в каждой из выбранных точек в выражение (10), получают систему из $n+1$ уравнений

$$s_j = s(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n)$$

В отличие от метода выбранных точек метод наименьших квадратов обеспечивает наименьшую сумму квадратов отклонений Q значений аппроксимирующей функции $s = s(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ от значений исходной функции $s_j = s_j(x_j)$ в произвольном числе точек m , не связанном с числом неизвестных коэффициентов $n+1$:

$$Q = \sum_{j=1}^m [s(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n) - s_j]^2$$

Приравнявая к нулю первые производные Q по каждому из коэффициентов, получаем систему из $n+1$ уравнений для определения $n+1$ неизвестных числовых значений коэффициентов:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_{j=1}^m 2[s(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n) - s_j] \frac{\partial s(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n)}{\partial a_0} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_{j=1}^m 2[s(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n) - s_j] \frac{\partial s(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n)}{\partial a_1} = 0$$

.....

$$\frac{\partial Q}{\partial a_n} = \sum_{j=1}^m 2[s(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n) - s_j] \frac{\partial s(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n)}{\partial a_n} = 0 \quad (11)$$

На практике для аппроксимации характеристик нелинейных элементов в основном используют степенные полиномы

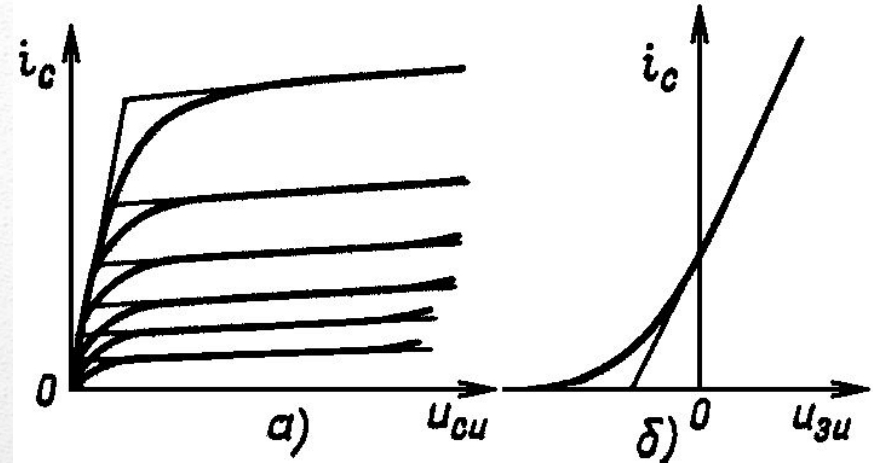
$$s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (12)$$

Пусть ток и напряжение некоторого нелинейного резистивного элемента в рабочей точке равны i_p и u_p . Выражение для тока i этого элемента, соответствующее некоторому новому значению напряжения $u = u_p + \Delta u$, можно представить в виде ряда Тейлора:

$$i = i(u_p) + \frac{1}{1!} i'(u_p) \Delta u + \frac{1}{2!} i''(u_p) \cdot (\Delta u)^2 + \dots \quad (13)$$

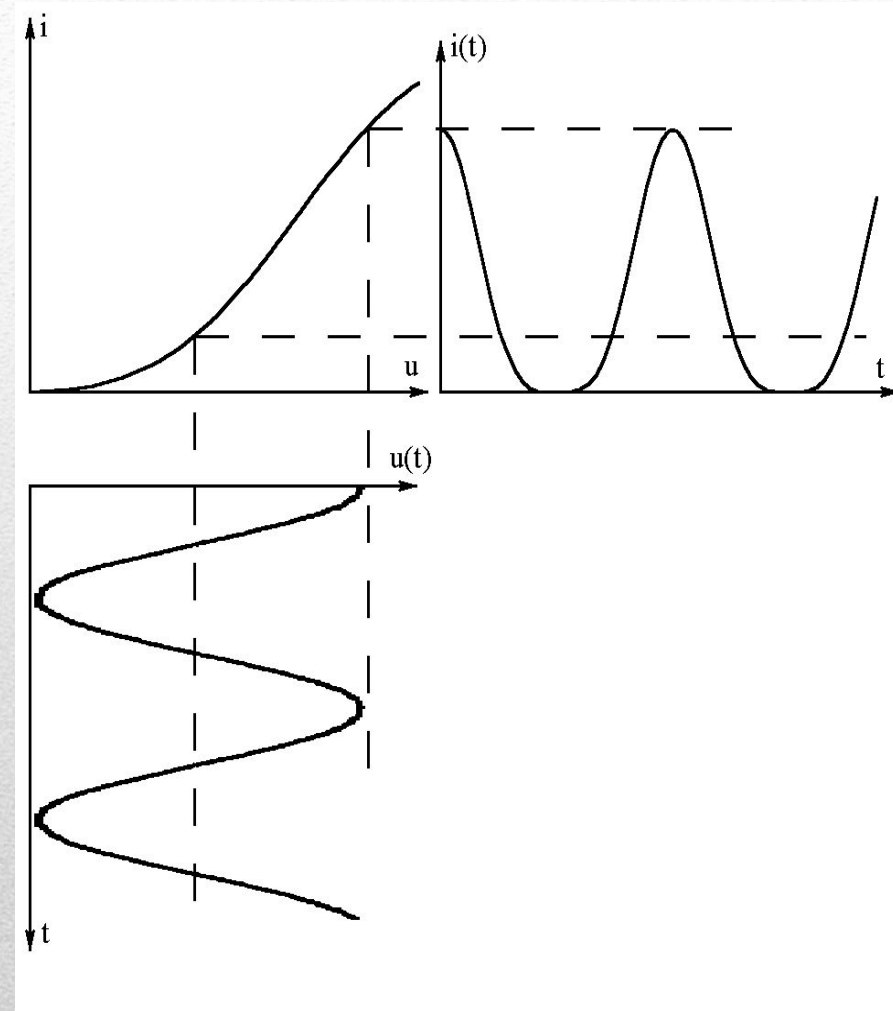
Здесь $i(u_p) = i_p$ - значение тока в рабочей точке; $i'(u_p)$, $i''(u_p)$ - значения производных тока по напряжению в рабочей точке, определяемые либо по заданной функции $i = i(u)$, аппроксимирующей ВАХ в широком диапазоне токов и напряжений, либо по табличным значениям функции $i_j(u_j)$ с помощью формул численного дифференцирования:

$$i'(u_j) = \frac{i(u_{j+1}) - i(u_{j-1}))}{u_{j+1} - u_{j-1}} \quad i''(u_j) = \frac{i(u_{j+1}) - 2i(u_j) + i(u_{j-1}))}{(u_{j+1} - u_j)^2}$$



4. Методы анализа нелинейных цепей.

Простейшие графические построения, приведенные на рисунке показывают, что при моногармоническом воздействии форма тока в НЭ отлична от формы приложенного к нему напряжения. Причина искажения привой тока очевидна: одинаковым приращениям напряжения отвечают неодинаковые приращения тока, поскольку $\Delta i = S_q(u) \Delta u$, а дифференциальная крутизна ВАХ на различных участках различна.



Подойдя к описанной задаче аналитически, заметим, что функция $i(t) = i(U_0 + U_m \cos \omega t)$ описывающая мгновенные значения тока, является периодической с периодом $T=2\pi/\omega$ и поэтому всегда может быть разложена в ряд Фурье:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \cos(n\omega t + \psi_n)$$

В общем плане задача ставится так: на вход РНЭ с ВАХ $i=f(u)$ действует гармоническое

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi)$$

бигармоническое

$$u(t) = U_{m1} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

или полигармоническое колебание

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\omega t + \psi_n)$$

Требуется определить спектр отклика, т.е. спектр тока.

Задача любого метода спектрального анализа заключается в такой аппроксимации ВАХ НЭ, при которой отклик (ток) представлялся бы в виде суммы гармонических слагаемых: амплитуды и частоты этих компонент определяют спектр отклика. Наибольшее распространение получили:

- тригонометрический метод (метод степенного полинома);
- метод угла отсечки (метод Берга);
- методы трех и пяти ординат;
- метод функций Бесселя от мнимого аргумента.

5. Тригонометрический метод.

Допустим, что режим работы НЭ выбран таким, что рабочий участок ВАХ удовлетворительно аппроксимируется степенным полиномом

$$\begin{aligned} i(u) &= a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3 + \dots = \\ &= i(U_0) + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

При входном сигнале

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \psi)$$

ток в цепи запишется в виде

$$i(t) = i(U_0) + a_1 U_m \cos(\omega t + \psi) + a_2 U_m^2 \cos^2(\omega t + \psi) + a_3 U_m^3 \cos^3(\omega t + \psi) + \dots$$

Для представления тока в виде суммы гармоник используем тригонометрические формулы кратных аргументов (отсюда и название метода - тригонометрический):

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2x) \quad , \quad \cos^3 x = \frac{1}{4} \cdot (3 \cos x + \cos 3x) \quad ,$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cdot (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x) \quad \text{и т.д.}$$

Полагаем $x = \omega t + \psi$. Тогда выражение для тока $i(t)$ преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} i(t) = & [i(U_0) + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots] + (a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots) \cos(\omega t + \psi) + \\ & + (\frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots) \cos(2\omega t + 2\psi) + (\frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots) \cos(3\omega t + 3\psi) + \\ & + (\frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots) \cos(4\omega t + 4\psi) + \dots = I_0 + I_{m1} \cos(\omega t + \psi) + I_{m2} \cos(2\omega t + 2\psi) + \\ & + I_{m3} \cos(3\omega t + 3\psi) + \end{aligned}$$

Из полученного соотношения видны следующие проявления нелинейности ВАХ НЭ и особенности спектра тока при моногармоническом воздействии:

- ток в цепи является периодической функцией времени, но форма его отлична от гармонической;

- спектр тока дискретен и содержит гармоники с частотами $n\omega$, кратными частоте приложенного напряжения ω . Гармоники с частотами $2\omega, 4\omega, 6\omega, \dots$ обусловлены четными степенями, а гармоники с частотами $\omega, 3\omega, 5\omega, \dots$ - нечетными степенями аппроксимирующего полинома. При этом номер наивысшей гармоники в спектре равен степени используемого полинома;
- постоянная составляющая тока I_0 не равна току покоя $i(U_0)$ и определяется коэффициентами a_2, a_4, \dots при четных степенях полинома;
- амплитуда n -ной гармоники тока зависит от членов полинома n -ной и более высоких степеней и не зависит от членов с меньшими степенями;
- начальная фаза тока n -ной гармоники в n раз больше начальной фазы воздействующего напряжения ($\psi_n = n\psi$).

6. Метод коэффициентов Берга.

Аналитическое выражение аппроксимированной характеристики НЭ, очевидно, имеет вид:

$$i(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < U_3, \\ S(u - U_3) & \text{при } u > U_3 \end{cases}$$

где S - крутизна ВАХ НЭ;

U_3 напряжение запирания НЭ.

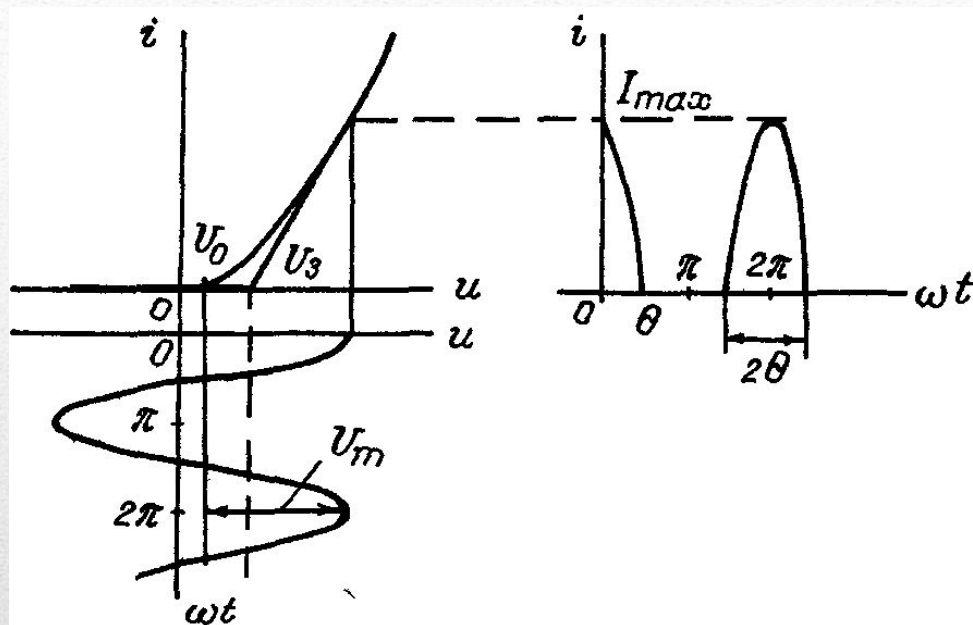
Мгновенное значение приложенного напряжения $u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t$

Подставив его в выражение для тока, получим $i(t) = S(U_0 - U_3 + U_m \cos \omega t)$

Из определения угла отсечки следует, что при $\omega t = \theta$ ток $i = 0$. Значит,

$$0 = S(U_0 - U_3 + U_m \cos \theta)$$

откуда
$$\cos \theta = \frac{U_3 - U_0}{U_m}$$



Подставив в уравнение для тока значение $U_3 - U_0 = U_m \cos \theta$, получим еще одно выражение для мгновенного значения тока:

$$i(t) = SU_m (\cos \omega t - \cos \theta)$$

Если положим здесь $\omega t = 0$, найдем максимальное значение тока

$$I_{\max} = SU_m (1 - \cos \theta)$$

Зная угол отсечки, можно разложить выражение для тока в ряд Фурье, т.е. найти гармонические составляющие тока. Учитывая четность функции $i(\omega t)$, получим

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) \cos n \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) \cos n \omega t d\omega t = \\ &= \frac{2}{\pi} SU_m \frac{\sin n \theta \cos \theta - n \cos n \theta \sin \theta}{n(n^2 - 1)} = SU_m \gamma_n(\theta) \end{aligned}$$

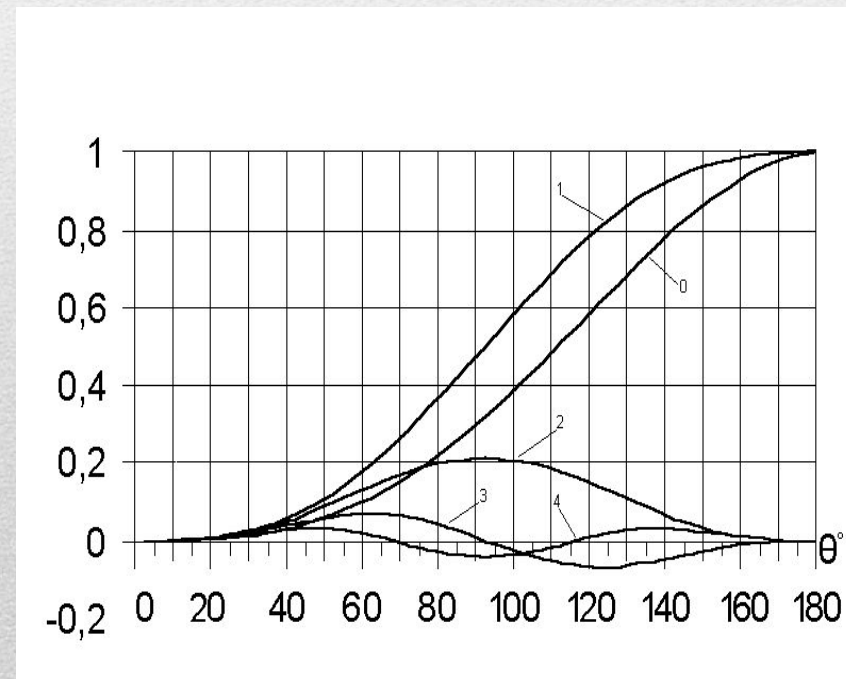
Важно подчеркнуть, что коэффициенты $\gamma_n(\theta)$ зависят только от угла отсечки. Это делает расчеты по методу Берга достаточно простыми и занимающими мало времени. Ключевым моментом в них является определение угла отсечки.

Обобщая сказанное, можно заключить, что гармонический анализ методом угла отсечки включает в себя следующие этапы:

- 1) по известным значениям U_0 , U_3 и U_m рассчитывается угол отсечки θ ;
- 2) для найденного угла отсечки по графикам или из таблиц определяются коэффициенты $\gamma_n(\theta)$;
- 3) рассчитываются амплитуда гармоник тока по формуле (3).

Анализ зависимостей $\gamma_n(\theta)$ позволяет сделать следующие выводы:

1. Амплитуда гармоник тока сильно зависят от угла отсечки и достигают наибольших значений при $\theta_{n\text{ опт}} = 180^\circ/n$. Так, нормированная амплитуда второй гармоники тока максимальна при $\theta=90^\circ$, третьей - при $\theta=60^\circ$ и т.д. Чем больше номер гармоники, тем меньше оптимальный угол отсечки и меньше амплитуда тока данной гармоники. Эти соображения оказываются решающими при выборе режима работы НЭ в схемах умножителей частота и ряде других преобразований сигнала..



2. Амплитуда всех нечетных гармоник (за исключением первой) обращаются в нуль $\theta=90^\circ$. Это позволяет в ряде схем избавиться от нежелательных гармонических составляющих

Иногда амплитуда гармоник тока выражают через максимальное значение тока I_{max} (нормируют к I_{max}). Тогда спектр тока рассчитывается по формуле

$$I_{mn} = I_{max} \gamma_n(\theta) / (1 - \cos\theta) = I_{max} \alpha_n(\theta)$$

где $a_n(\theta)$ - коэффициенты гармоник, зависящие только от угла отсечки и называемые коэффициентами Берга.

Графики $a_n(\theta)$ приведены на рисунке

Максимальные значения коэффициентов

$a_n(\theta)$ достигаются при

$$\theta_{n\text{ опт}} = 180^\circ/n.$$

Связь между коэффициентами $a_n(\theta)$ и

$\gamma_n(\theta)$ устанавливается соотношением

$$\alpha_n(\theta) = \frac{\gamma_n(\theta)}{1 - \cos\theta} \quad (5)$$

