ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЦЕЛИ УРОКА

Образовательные:

- изучить теоремы сложения и умножения вероятностей;
- научить в процессе реальной ситуации определять термины теории вероятностей;
- научить решать реальные жизненные задачи.

Воспитательные:

- развивать развивать у учащихся коммуникативные компетенции (культуру общения, умение работать в группах, элементы ораторского искусства);
- способствовать развитию творческой деятельности учащихся, потребности к самообразованию.

Развивающие:

- способствовать развитию общения как метода научного познания, аналитического мышления, смысловой памяти, внимания; умения работать с дополнительной литературой;
- развитию навыков исследовательской деятельности.

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

События **А** и **В** называются ***несовместными,*** если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого

(испытание: стрельба по мишени

А-выбивание четного числа очков;

В- не четного).

Вероятность появления одного из двух ***несовместных*** событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Сумма вероятностей ***противоположных*** событий равна 1

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

События **A** и **B** называются ***совместными***, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого(A- в аудиторию вошел учитель; B- вошел студент).

Вероятность появления хотя бы одного из двух ***совместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

ЗАДАЧА 1

В лотерее участвуют 100 билетов, из которых на 5 билетов падает выигрыш 20 рублей, на 10 билетов – 15 руб., на 15 билетов – 10 руб., на 25 билетов – 2 рубля.

Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10 рублей.

Решение.

Пусть A,B,C – события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20,15 и 10 руб.

Т.к. события A,B и C несовместны, то

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = 0{,}3$$

Ответ: 0,3.

ЗАДАЧА 2

В коробке 250 лампочек, из них
100 по 100 Вт, 50 – по 60 Вт, 50 - по 25 Вт,
50 - по 15 Вт.
Вычислить вероятность того, что мощность любой взятой наугад лампочки
не превысит 60 Вт.

РЕШЕНИЕ

Пусть A – событие, состоящее в том, что мощность лампочки равна 60 Вт, B – 25 Вт, C – 15 Вт, D – 100 Вт. События A,B,C,D образуют полную систему, т.к.все они несовместны и одно из них обязательно наступит в данном испытании (выборе лампочки), т.е.

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = 1.$$

События «мощность лампочки не более 60 Вт» и

«мощность лампочки более 60 Вт» – противоположные.

По свойству противоположных событий

$$P(A)+P(B)+P(C) = 1- P(D),$$

$$P(A+B+C) = 1- \frac{100}{250} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$$

Ответ: 0,6

ЗАДАЧА 3

В коробке лежат 30 галстуков, причем 12 из них красные, остальные белые. Определить вероятность того, что из 4 наудачу вынутых галстуков все они окажутся одного цвета.

Решение

- Пусть А – событие, состоящее в том, что все 4 галстука будут красные,
- В – все 4 галстука будут белыми

4 галстука из 30 можно выбрать

4 галстука из 30 можно выбрать

$$C_{30}^{4}=\frac{30!}{4!26!}=\frac{27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{2\cdot 3\cdot 4}=27405$$ способами

4 галстука из 12 красных можно выбрать

$$C_{12}^{4}=\frac{12!}{4!8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4}=495$$ способами, аналогично

4 белых - $C_{18}^{4}=\frac{18!}{4!14!}=\frac{15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{2\cdot 3\cdot 4}=3060$ способами.

Вероятность того, что все 4 галстука будут красные, равна

$$P=P(A)+P(B)=\frac{495}{27405}+\frac{3060}{27405}=\frac{79}{609}=0,13$$

Ответ: 0,13

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- 4. Производят три выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов произойдет только одно попадание.
- 5. У продавца имеется 10 оранжевых,8 синих, 5 зеленых и 15 желтых шаров. Найти вероятность того, что купленный шар окажется оранжевым, синим или зеленым.
- 6. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 100 денежных выигрышей. Найти вероятность выигрыша денежного или вещевого на один лотерейный билет.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- 7. Вероятность того, что новая кофемолка прослужит больше года, равна 0,91. Вероятность того, что она прослужит больше двух лет, равна 0,78.

  Найти вероятность того, что кофемолка прослужит меньше двух лет, но больше года.

ОТВЕТЫ

- 4. 0,375
- 5. $\dfrac{23}{38}$
- 6. 0,025
- 7. 0,13

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Два события называются ***независимыми***, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

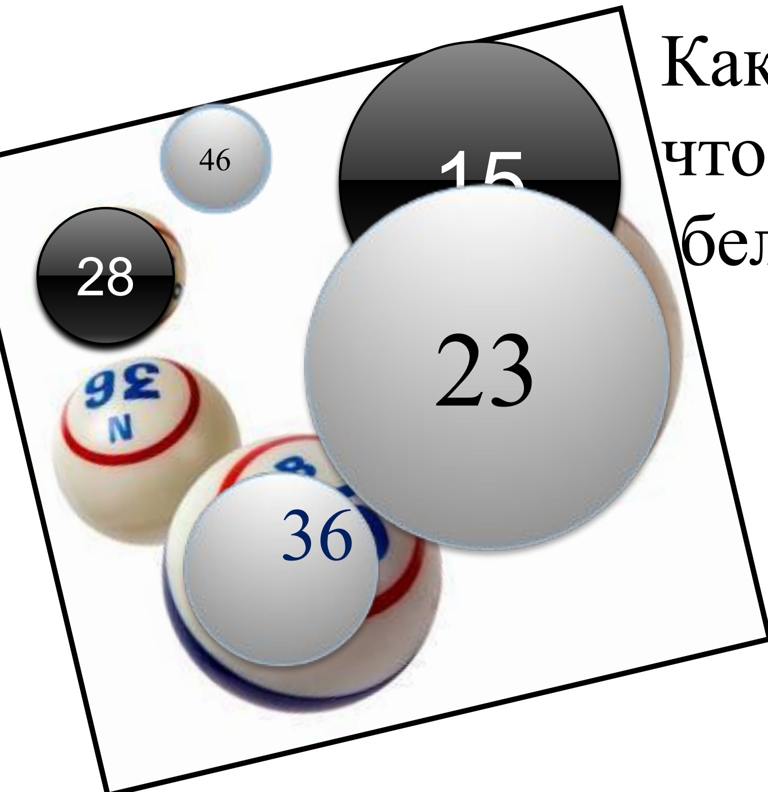
Условной вероятностью P(B/A) называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило.

Для независимых событий **P(A)=P(A/B) или P(B)=P(B/A)**

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: **P(AB)=P(A) P(B/A)**

Задача 1

В первой урне находятся
6 черных и 4 белых шара,
во второй – 5 черных и 7 белых.
Из каждой урны извлекают
по одному шару.
Какова вероятность того,
что оба шара окажутся
белыми?



РЕШЕНИЕ

Пусть A_1 – из первой урны извлечен белый шар;

A_2 – из второй урны извлечен белый шар.

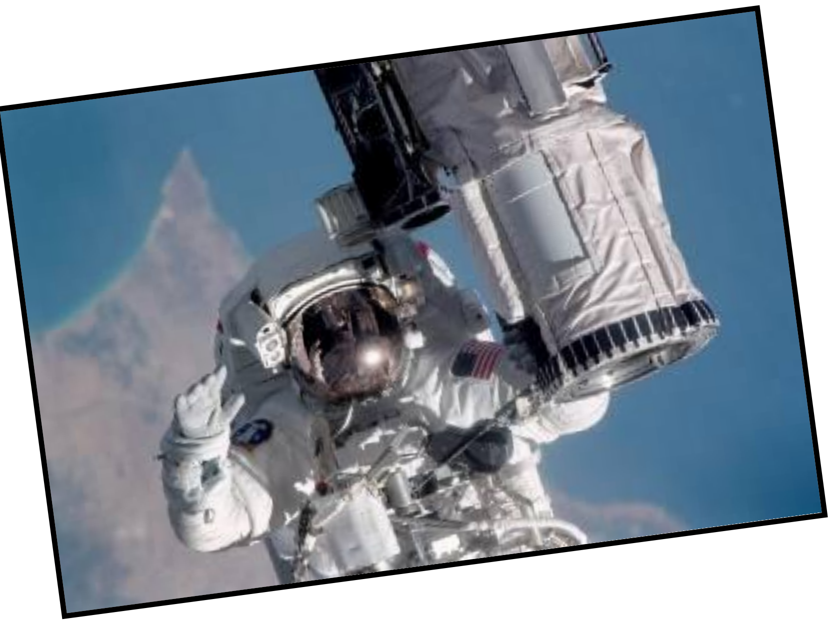
События A_1 и A_2 независимы.

$$P(A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5};P(A_2)=\frac{7}{12};$$

$$P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{30}$$

Ответ: $\frac{7}{30}$

Задача 2



Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо.

Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2;

Вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3.

Найти вероятность того, что:

а) оба элемента выйдут из строя;

б) оба элемента будут работать.

Решение

Пусть событие A – выход из строя первого элемента,
событие E – выход из строя второго элемента.
Эти события независимы (по условию).

а) одновременно появление A и E есть событие AE

$$P(AE) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$$

б) если работает первый элемент, то имеет место событие $\bar{A}$ (противоположное событию A – выходу этого элемента из строя);

Если работает второй элемент – событие $\bar{E}$, противоположное событию E

$$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \text{ и } P(\bar{E}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\bar{A}\bar{E}$.

$$P(\bar{A}\bar{E}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{E}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

Ответ: **0,56.**

Задача 3

В Санкт-Петербурге – 16 мест на практику,
в Киеве – 10, в Баку – 5.
Какова вероятность того, что три студента попадут в один город?

Решение

Событие E – определенные три студента попадут в один город.

Это событие может реализоваться:

или в виде события C1 – указанные 3 студента попадут в С.- Петербург;

или в виде события C2 – попадут в Киев;

или в виде события C3 – попадут в Баку.

Каждое из этих событий можно рассматривать как совмещение трех событий.

Например, событие C1 – в С.-Петербург попадут и первый из указанных студентов (событие A1), и второй студент (событие A2), и третий из указанных студентов (событие A3).

Вероятности этих событий

$$P(A1) = \frac{15}{30},\ P(A2) = P(E/A1) = \frac{14}{29},\ P(A3) = P(E/A1) = \frac{13}{28}$$

Аналогично можно рассматривать и события C2 и C3.

По правилам сложения и умножения вероятностей

$$P(E) = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{88}{609}$$

Ответ: $\mathbf{\frac{88}{609}}$ **.**

ЗАДАЧА 4

В ящике 6 белых и 8 красных шаров. Из ящика вынули 2 шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

РЕШЕНИЕ

Пусть событие А – появление белого шара при первом вынимании; событие В – появление белого шара при втором вынимании. События зависимы, поэтому

P(AB)=P(A) P(B/A)

P(A)= $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

P(B/A)= $\frac{6-1}{14-1} = \frac{5}{13}$

$$P(AB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

$$Ответ: \frac{15}{91}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- 4.В следующих испытаниях найдите вероятности «успеха» и «неудачи»:

а) Бросают пару различных монет. «Неудача» – выпадение двух орлов.

б) Бросают игральный кубик. «Успех» – выпадение числа,

кратного трем.

в) Бросают пару различных кубиков. «Неудача» – выпадение двух четных чисел.

г) Из 36 игральных карт берут 5. «Успех» – среди них нет дамы пик.

- 5. В экзаменационные билеты включено по 2 теоретических вопроса и по 1 задаче. Всего составлено 28 билетов. Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, студент ответит на все вопросы, если он подготовил 50 теоретических вопросов и 22 задачи.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- 1. В урне 2 белых и 10 черных шаров; во второй – 8 белых и 4 черных шара. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность, что

  а) оба шара белые;

  б) один белый и один черный;

  в) оба черные.

- Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,75; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Какова вероятность того, что

  а) все три попадут в цель;

  б) в цель попадет хотя бы один стрелок.