Лекция №3

Раздел 1. Основанные понятия и основные законы теории вероятностей.

Тема 2. Основные законы теории вероятностей.

Цель лекции: дать знания об основных законах теории вероятностей.

Вопросы лекции:

1.14. Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем.

1.15. Формула полной (средней) вероятности.

1.16. Формула Байеса (теорема гипотез).

1.17. Теорем о повторении опытов (формула Я. Бернулли).

1.14. Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем.

- ***Надежностью системы*** называется ее способность выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени или требуемой наработки.
- Одним из основных количественных показателей надежности системы является **вероятность *P(t)* безотказной работы** за время t, которая представляет собой вероятность того, что система проработает безотказно в течение времени t, начав работать в момент времени $t = 0$, или вероятность того, что время работы системы до отказа T окажется больше заданного времени работы t: $P(t) = P(T>t)$.
- При объединении элементов в систему различают их последовательное (основное), параллельное (резервное) и смешанное соединения.
- Соединение элементов в систему называется *последовательным*, если отказ системы происходит при отказе любого ее элемента.
- Вычислим вероятность $P = P(t)$ безотказной работы системы при последовательном соединении элементов.
- Надежная работа системы (событие A) представляет собой произведение событий A_i, состоящих в безотказной работе каждого элемента: $A = A_1 A_2 \ldots A_n$. Так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то в соответствии с теоремой умножения будем иметь

$$P = P(A) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i .$$

Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем

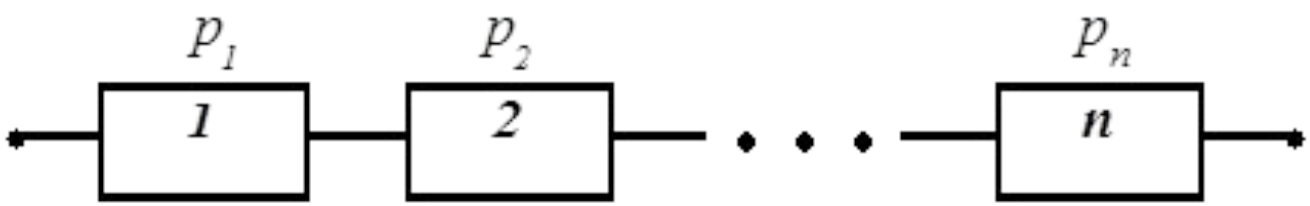

Рис. 1.16. Последовательное соединение элементов в систему

1.14. Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем.

- Соединение элементов в систему называется *параллельным*, если отказ системы происходит при отказе всех ее элементов.
- Для определения надежности системы при параллельном соединении элементов в систему рассмотрим следующие события: $\overline{A}$ отказ системы; $\overline{A_i}$ отказ *i*-го элемента,
- $$P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - p_i \quad i = 1,2,\ldots,n.$$ Очевидно, что
- $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}$. Так как события $\overline{A_i}$, *i= 1,2,…,n* - независимы, то по теореме умножения получим

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n}) = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i).$$

- Безотказная работа системы является событием А, противоположным отказу. Поэтому

$$P = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i).$$ • (1.14.2)

- Формула (2) показывает, что с увеличением числа элементов в системе надежность системы при параллельном соединении увеличивается, причем вероятность безотказной работы системы превышает вероятность безотказной работы любого элемента, в том числе и самого надежного. При резервировании структура системы усложняется. Поэтому на практике применяют не поэлементное резервирование, а поблочное, при котором надежность хотя и ниже, чем при поэлементном резервировании, но выше, чем при резервировании всей системы.
- Вероятности безотказной работы элементов берутся или из прошлого опыта эксплуатации, или оцениваются с помощью проведения испытании элементов на надежность.

Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем

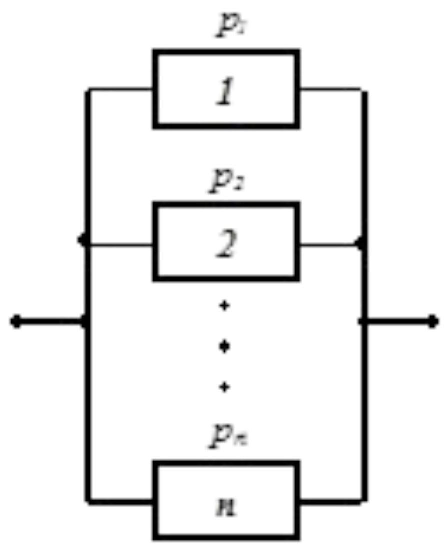

Рис. 1.17.
Параллельное
соединение
элементов в
систему

1.15. Формула полной (средней) вероятности

- Иногда событие A может произойти как случайное следствие одного из несовместных событий H_1, $H_2,\dots H_n$, которые входят в полную группу и называются *гипотезами*.
- Полная (средняя) вероятность $P(A)$ события A, которое может произойти вместе с одной из гипотез H_1, H_2,...H_n, равна сумме произведений вероятностей гипотез $P(H_i)$ на условные вероятности $P(A/H_i)$ события A при каждой из гипотез:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i), \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad (1.15.1)$$

- Докажем это утверждение. Событие A осуществляется тогда и только тогда, когда осуществляются события ИЛИ AH_1, ИЛИ $AH_2,\dots$, ИЛИ AH_n, которые, как и события H_1, H_2,...H_n несовместны. Поэтому

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i.$$

- По теореме сложения несовместных событий имеем

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i).$$

- Применив теорему умножения к слагаемым, получим

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

- Следовательно

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

- Формула полной вероятности (1) применяется тогда, когда рассматриваемое событие может появиться по нескольким каналам.

1.16. Формула Байеса (теорема гипотез)

- Пусть событие A может произойти только при появлении одного из несовместных событий (гипотез) H_1, H_2,...H_n. Предполагается, что известны априорные вероятности гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$,...,$P(H_n)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$, $i = 1,2,\dots,n$, события A при каждой из гипотез. Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Необходимо определить, с какой из гипотез следует связывать появление события A, т.е. определить, следствием какой гипотезы явилось это событие. Иначе говоря, требуется определить обратные вероятности гипотез $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$,…, $P(H_n/A)$ при условии, что событие A произошло. Если событие A произошло, то это, очевидно, должно вызвать переоценку вероятностей гипотез H_i, $i = 1,2,\dots,n$. Количественную оценку изменения вероятностей гипотез дает формула Байеса.
- Вероятность гипотезы $P(H_i/A)$ равна отношению вероятности $P(H_iA)$ совместного появления событий H_i и A к полной вероятности $P(A)$ события A:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}. \qquad (1.16.1)$$

- Правая часть выражения (1) состоит из двух сомножителей: априорной вероятности $P(H_i)$, характеризующей неопределенность гипотезы H_i до опыта и коэффициента

$$\frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)},$$

- уточняющего априорную вероятность на основе эксперимента. Апостериорная вероятность $P(H_i/A)$ гипотезы H_i характеризует пересмотренное значение априорной вероятности $P(H_i)$ после получения дополнительной информации о появлении события A. Вероятность $P(A/H_i)$ события A (наблюдения, сообщения и т.п.) в предположении, что верна гипотеза H_i иногда называют *правдоподобием гипотезы* H_i.

1.17. Теорема о повторении опытов (формула Я. Бернулли)

- Если производится n независимых опытов, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p, а вероятность противоположного события есть q= 1-p, то вероятность $P_n(k)$ того, что при этих опытах событие A появится ровно k раз, где k = 0, 1, 2,...,n, равна

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1.17.1)$$

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k},$$

- С помощью формулы Бернулли можно решать также следующие задачи.
- 1. Вычислить вероятность того, что при n независимых опытах событие A появится не менее m раз, т.е. k= m, m+1,…,n:

$$P_n(k\ge m)=\sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1.17.2)$$

- 2. Определить вероятность того, что при n опытах событие A появится не более m раз, т.е. когда k= 0, 1,…,m:

$$P_n(k\le m)=\sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1.17.3)$$

- 3. Найти вероятность того, что при n опытах событие A появится от m_1 до m_2 раз, т.е. когда k= m_1,..., m_2:

$$P_n(m_1\le k\le m_2)=\sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1.17.4)$$

- 4. Определить вероятность того, что при n опытах событие A появится хотя бы один раз, т.е. когда k= 1, 2,…,n:

$$P_n(k\ge 1)=\sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1.17.5)$$