

Формулы сокращённого умножения.



Проект подготовили ученики 8 “Б” класса:
Францкевич Михаил и Иващенко Егор.

Преподаватель: Ильина Наталья
Виниаминовна.

Цель:

Рассмотреть формулы сокращённого умножения для их применения при решении сложных задач.

Задачи:

3

1. Описать принципы умножения многочленов при помощи формул сокращённого умножения.
2. Изучить формулы сокращённого умножения при увеличении количества слагаемых.
3. Рассмотреть построение треугольника Паскаля и его применение для определения коэффициентов многочлена.
4. Проанализировать формулу бинома Ньютона.
5. Провести исследования скорости вычислений без применения и с применением формул.
6. Познакомить с формулами одноклассников.

Введение:

4

В современной жизни каждому человеку часто приходится выполнять огромное количество расчётов и вычислений. Поэтому цель нашей работы – показать лёгкие, быстрые и точные методы вычислений. Основопологающим элементом вычислительной культуры являются сознательные и прочные вычислительные навыки.

Владение вычислительными умениями и навыками имеет большое значение для усвоения изучаемого материала. Однако, в последнее время уровень вычислительных навыков, преобразований выражений имеет тенденцию к снижению, все часто используют калькулятор и компьютер, что отрицательно сказывается на уровне математических знаний.

Поэтому данный материал полезен для изучения.



Принципы умножения многочленов при помощи формул сокращённого умножения:

Для упрощения выражений, разложения многочленов на множители, приведения многочленов к стандартному виду используются формулы сокращенного умножения. Формулы сокращенного умножения нужно знать наизусть.

1. Квадрат суммы двух выражений $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Квадрат разности двух выражений $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Разность квадратов двух выражений $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
4. Куб суммы двух выражений $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. Куб разности двух выражений $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. Сумма кубов двух выражений $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
7. Разность кубов двух выражений $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Название «Формулы сокращенного умножения» совсем не случайно.

Возьмем самую простую первую формулу квадрат суммы $(a + b)^2$ и попробуем последовательно возвести сумму в скобках в квадрат, то есть, умножить $(a + b)$ само на себя:

$$(a + b) * (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

приводим подобные слагаемые:

$$a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Таким образом выводятся все формулы сокращенного умножения. Можно выводиться их каждый раз самостоятельно, а можно не тратить на это время и быстро посчитать необходимый пример, зная конечное значение формул.

Конечно, квадрат суммы посчитать вручную не так сложно, но что насчет куба суммы или куба разности?



Куб суммы означает, что необходимо $(a+b)$ само умножить на себя три раза: $(a+b) * (a+b) * (a+b) = a^3 + ab^2 + ba^2 + b^3 + \dots$ И т.д.

И это мы расписали перемножение только первой скобки, а тоже самое необходимо сделать со второй и с третьей... Согласись, запутаться очень легко, а, как правило, от того, как ты посчитаешь это простое действие, зависит ответ всего примера.

Таким образом, формулы сокращенного умножения позволяют сократить трудоемкое перемножение членов друг на друга и получить быстрый результат.

Как они могут пригодиться просто так, в жизни?

Это очень просто! Сколько будет 103^2 ? Не нужно кидаться перемножать 103 на 103 в столбик, и уж тем более не стоит набирать цифры на калькуляторе. Просто представь 103, как сумму 100 и 3 и возведи ее в квадрат:

$$103^2 = (100+3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609$$

С помощью формул квадрат суммы и квадрат разности мы можем легко находить квадраты больших чисел, не используя калькулятор и не считая в столбик. Необходимо просто представить число в виде суммы (или разности) чисел, квадрат которых мы хорошо знаем.

Формулы сокращённого умножения при увеличении количества слагаемых:

Полезной бывает формула возведения в квадрат суммы трех, четырех и большего количества слагаемых вида: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_3 + 2 \cdot a_1 \cdot a_4 + \dots + 2 \cdot a_1 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_1 \cdot a_n + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2 \cdot a_4 + \dots + 2 \cdot a_2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_2 \cdot a_n + \dots + 2 \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

Она читается так: **квадрат суммы n слагаемых равен сумме квадратов всех этих слагаемых и удвоенных произведений всех возможных пар этих слагаемых (с учетом правила знаков).**

Для примера возведем в квадрат с использованием этой формулы сумму трех слагаемых a, b и c, имеем $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$.

Выведем еще несколько формул:

- ☐ Квадрат разности трёх слагаемых $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.
- ☐ Квадрат разности трёх слагаемых $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$.
- ☐ Квадрат разности трёх слагаемых $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$.
- ☐ Квадрат суммы четырёх слагаемых $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$.

Бином Ньютона:

9

Бином Ньютона — формула разложения произвольной натуральной степени двучлена $(a+b)^n$ в многочлен. Бином (лат. *bis* — дважды, *nomēn* — имя) или двучлен — частный случай полинома (многочлена), состоящего из двух слагаемых мономов (одночленов).

Биномиальная формула Ньютона.

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \dots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \dots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$

Числа C_m^n — биномиальные коэффициенты

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Где m — порядковый номер слагаемого в многочлене.

Факториал — произведение натуральных чисел от 1 до n , то есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ — обозначается $n!$, например,

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

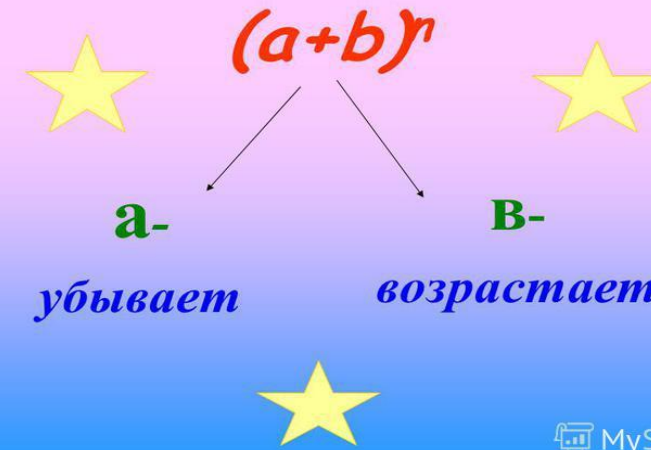
Свойства Бинома Ньютона

10

$(a+b)^n \rightarrow n+1$ слагаемых

- $(a+b)^2 \rightarrow 3$
- $(a+b)^3 \rightarrow 4$
- $(a+b)^7 \rightarrow 8$
- $(a+b)^5 \rightarrow 6$
- $(a+b)^9 \rightarrow 10$
- $(a+b)^{99} \rightarrow 100$

MyShared



MyShared

Биномиальные
коэффициенты,
равноудаленные от концов,
равны.

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$4=4$$

$$1=1$$

MyShared

Если n четное – одно
центральное слагаемое

Если n нечетное – два
центральных слагаемых

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

MyShared

Сумма показателей a и b в
каждом слагаемом равна n

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2+0=2$$

$$1+1=2$$

$$0+2=2$$

MyShared

Биномиальные коэффициенты обладают многими замечательными свойствами:

- все они целые положительные числа;
- крайние коэффициенты равны единице;
- коэффициенты членов, равноотстоящих от концов, одинаковы;
- коэффициенты возрастают от краев к середине;
- сумма всех коэффициентов равна 2^n .

Особенно важное значение имеет следующее свойство: сумма двух соседних коэффициентов в разложении $(a+b)^n$ равна определённому коэффициенту в разложении $(a+b)^{n+1}$; например, суммы $1+3$, $3+3$, $3+1$ соседних коэффициентов в формуле для $(a+b)^3$ дают коэффициенты 4, 6 и 4 в формуле для $(a+b)^4$. Вообще:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Видимо, для того чтобы облегчить этот труд, великий французский математик и физик Блез Паскаль триста пятьдесят лет назад придумал специальный инструмент — «треугольник Паскаля». В верхней строчке треугольника располагается одинокая единица. В остальных строках каждое число является суммой двух своих соседей этажом выше — слева и справа. Если какой-то из соседей отсутствует, он считается равным нулю. Треугольник бесконечно простирается вниз; здесь приведено лишь одиннадцать верхних строчек:

n										
0					1					
1				1	1					
2			1	2	1					
3		1	3		3	1				
4		1	4		6		4	1		
5		1	5		10	10	5	1		
6		1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
...			...	...	...					

Треугольник Паскаля

Diagram illustrating Pascal's Triangle (Треугольник Паскаля) for rows 0 to 7. The first column (leftmost) is highlighted in red, representing powers of 2. The other numbers are blue. Green arrows indicate the addition of two numbers from the row above to get the number below. Green numbers above the arrows indicate the sum.

0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	

.....

Единица соответствует выражению $(a + b)^0$, поскольку любое число, возведённое в нулевую степень, даёт единицу. Достраивая треугольник, ниже пишем ещё по единице. Это коэффициенты разложения того же двучлена, возведённого в первую степень: $(a+b)^1=a+b$.

Идём дальше. Стороны треугольника образуют единицы, а между ними — сумма двух единичек, находящихся сверху, то есть 2. Это и есть коэффициенты трёхчлена «квадрат суммы»: $a^2+2ab+b^2$.

Следующий ряд, как и предыдущий, начинается и заканчивается единицами, а между ними — суммы цифр, находящихся сверху: 1, 3, 3, 1. Мы получили коэффициенты разложения «куба суммы». Ряд коэффициентов двучлена четвёртой степени составят 1, 4, 6, 4, 1 и так далее.

Для примера с помощью треугольника Паскаля разложим в многочлен сумму двучленов в шестой степени: $(a + b)^6=a^6+6a^5b + 15a^4b^2+20a^3b^3 + 15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

Числа в n -ой строке треугольника являются биномиальными коэффициентами, то есть коэффициентами в разложении n -ой степени бинома Ньютона. Некоторые историки науки приписывают Блезю Паскалю авторство не только треугольника, позволяющего находить биномиальные коэффициенты, но и самой формулы бинома. Они считают, что Паскаль вывел её несколько раньше Ньютона, а тот лишь обобщил формулу для разных показателей степеней.

Исследования скорости вычислений без применения и с применением формул.

Мы провели исследование в нашем классе. Целью нашего исследования было узнать насколько увеличивает скорость вычислений применение формул сокращённого умножения

Класс был поделен на две группы. Первая группа решала задание без применения формул сокращённого умножения, а вторая группа решала с помощью формул.

Для эксперимента двум группам были предложены следующие примеры.

$$(y+2+3+x)^2$$

$$(2+6+3+5)^2$$

$$(x+5)^3$$

$$103^2$$

$$(9+3+2)^2$$

$$(1+1)^7$$

$$(2+3)^4$$

$$97^2$$

С заданием первая группа справилась за 10 минут, а вторая группа благодаря формулам сокращенного умножения справилась всего за 5 минут.

Заключение

15

В итоге разработки нашего проекта мы научились, применяя формулы сокращённого умножения, вычислять достаточно сложные и громоздкие выражения без применения вычислительных средств.

Изучили как можно, зная формулы, возводить в квадрат полиномы с любым количеством слагаемых.

Научились, применяя формулу бинома Ньютона и, находя по треугольнику Паскаля биномиальные коэффициенты, вычислять биномы любой степени.

Проверили и установили значительное различие во времени вычислений без применения и с применением формул сокращённого умножения (особенно очевидна разница при увеличении показателя степени, в которую возводится выражение).

И сделали вывод, что формулы сокращённого умножения – неисчерпаемый источник различных математических радостей!

Спасибо за внимание!