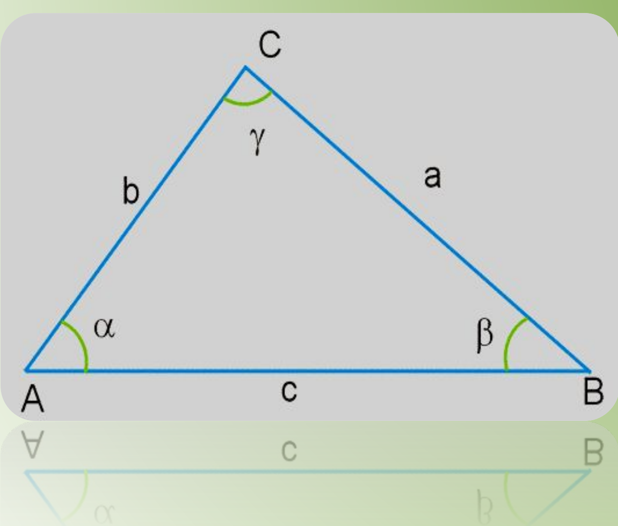
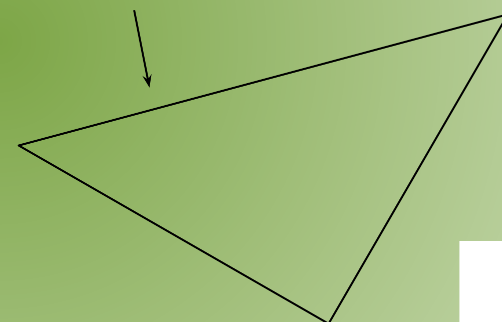
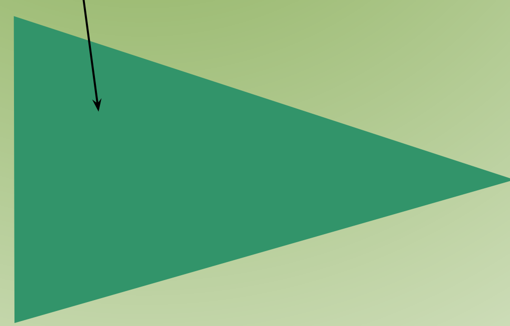
Треугольник и все что его касается.

Треугольник

- простейший многоугольник, имеющий 3 вершины (угла) и 3 стороны;
- часть плоскости, ограниченная тремя точками, и тремя отрезками, попарно соединяющими эти точки;
- замкнутая ломаная линия с тремя звеньями.

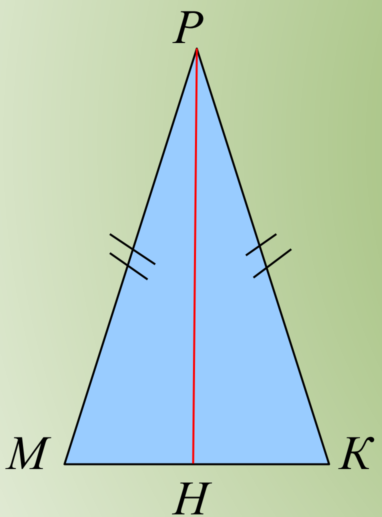






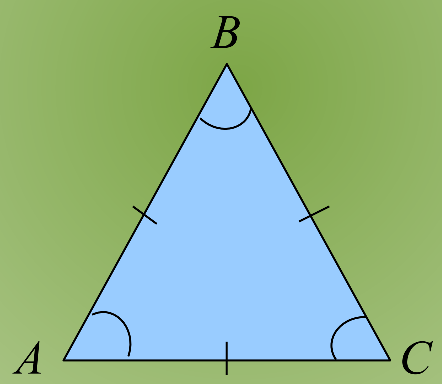
Виды треугольников по сторонам

Равнобедренный



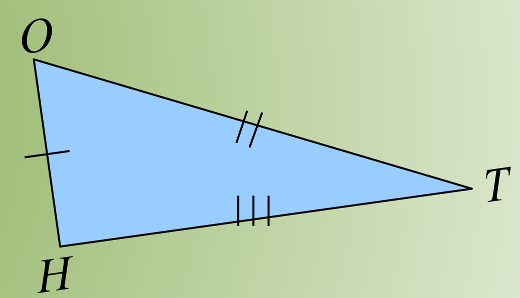
1) Углы при основании равны;
2) Медиана является биссектрисой и высотой.

Равносторонний



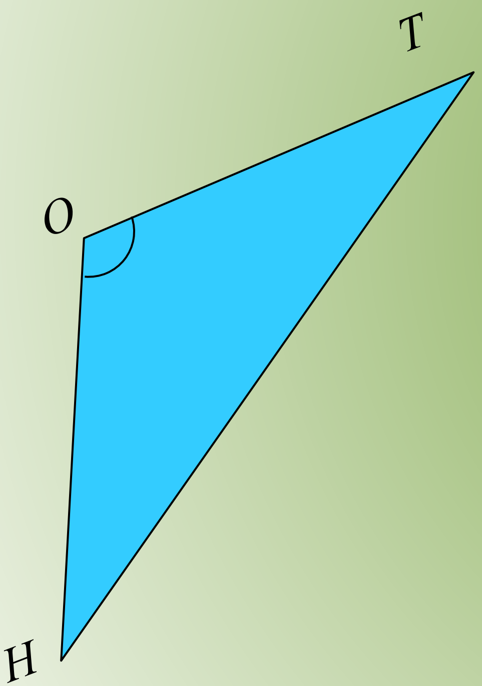
1) Все углы равны 60°.

Разносторонний

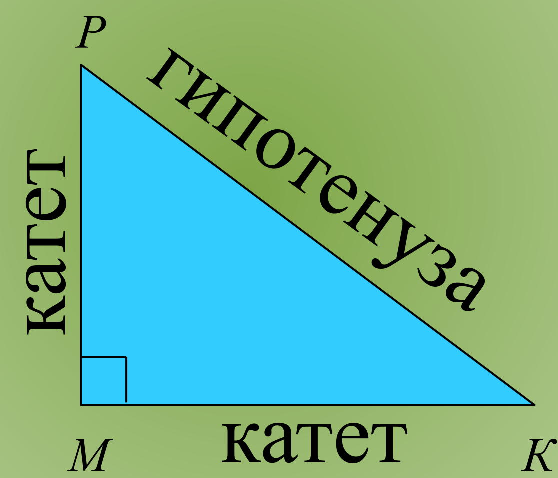


Виды треугольников по углам

Тупоугольный

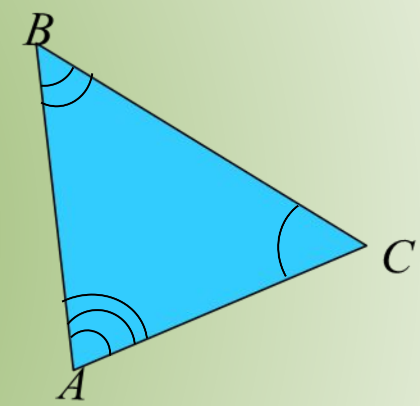


Прямоугольный



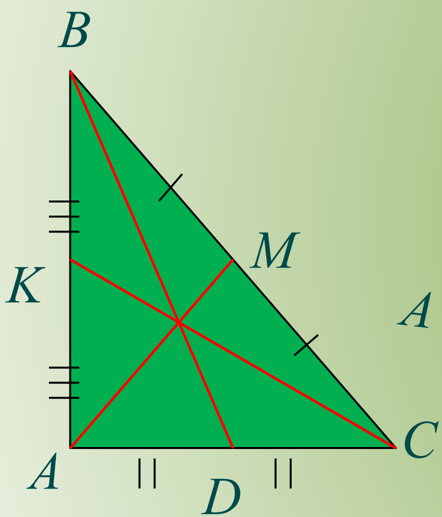
$\angle$PMK=90°-прямой

Остроугольный



Элементы треугольника

Медиана

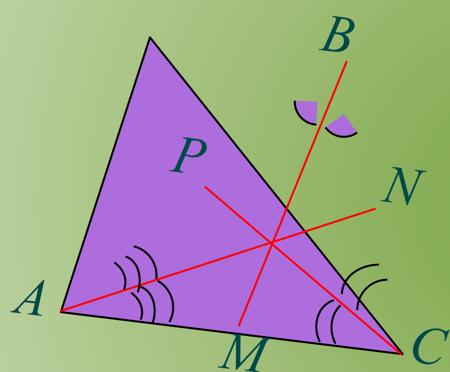


$BM = MC$

$AD = DC$

$AK = KB$

Биссектриса

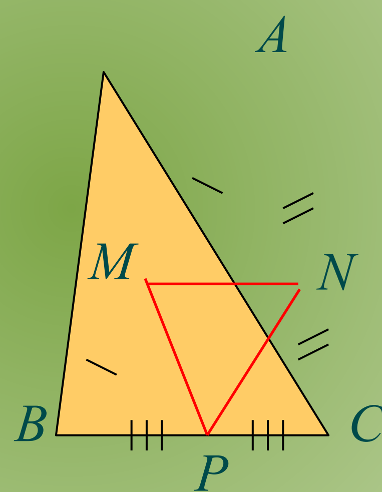


$\angle ABM = \angle MBC$

$\angle BCP = \angle PCA$

$\angle CAN = \angle NAB$

Средняя линия



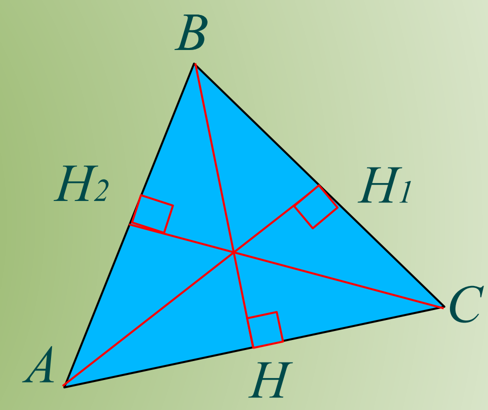
$BM = MA$

$AN = NC$

$MN \parallel BC$

$BC = 2 \cdot MN$

Высота



$BH \perp AC$

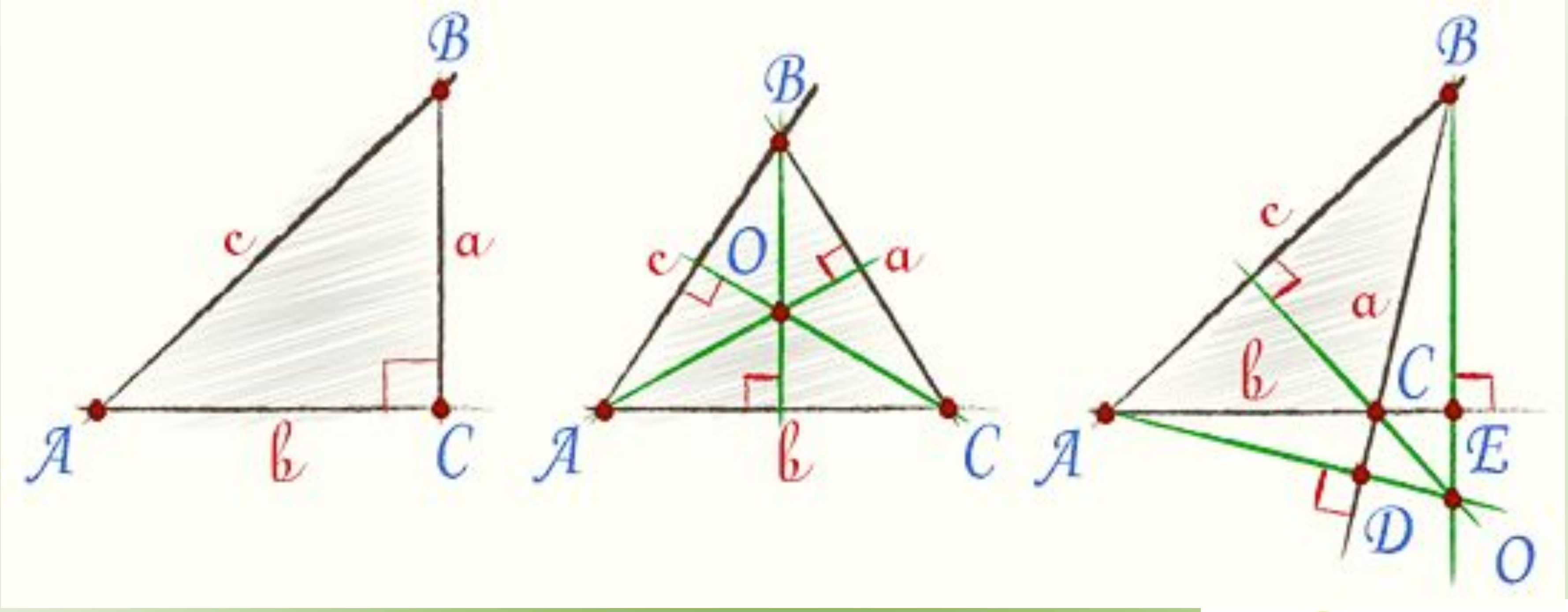
$AH_1 \perp BC$

$CH_2 \perp AB$

- **Свойства медиан треугольника:**
- 1. Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1(считая от вершины треугольника).
- 2. Медиана делит треугольник, равных по площади на два треугольника.

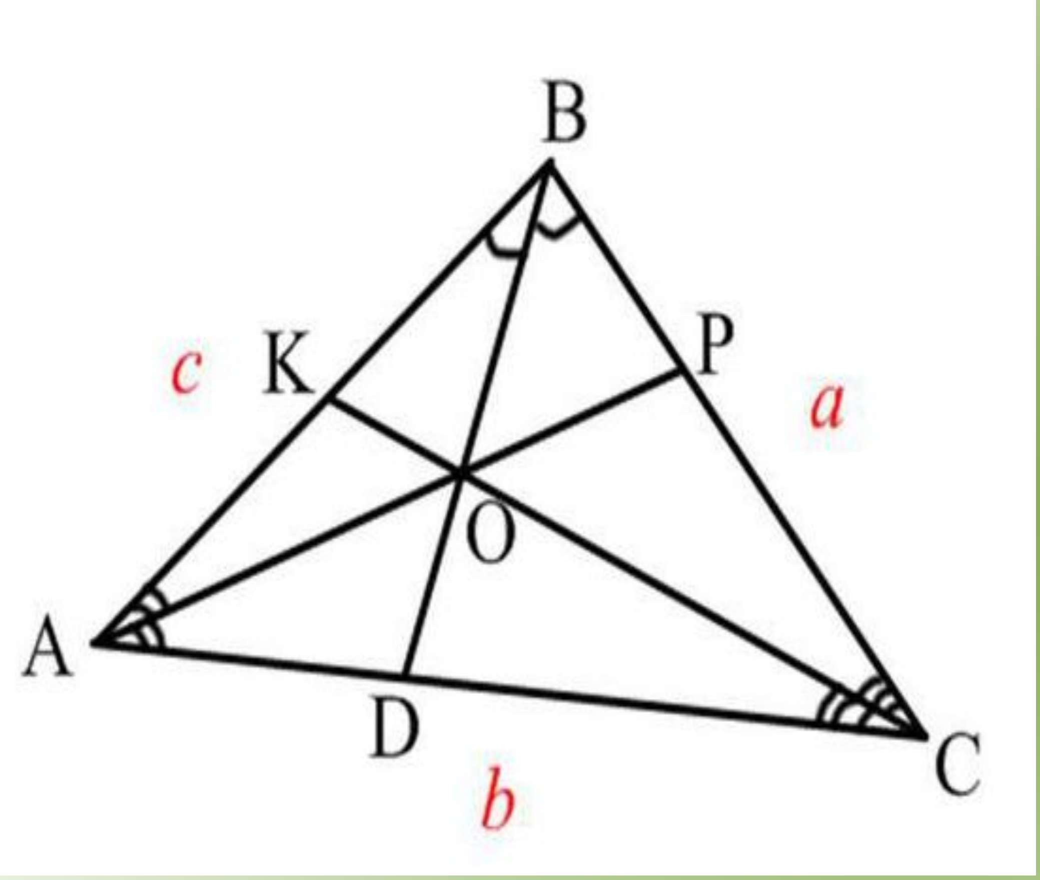
$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Высота треугольника.



$$H = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Биссектриса треугольника.



Свойства биссектрис треугольника:

1. Биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

2.Биссектриса треугольника делит площадь треугольника в отношении, пропорциональном прилежащим сторонам.

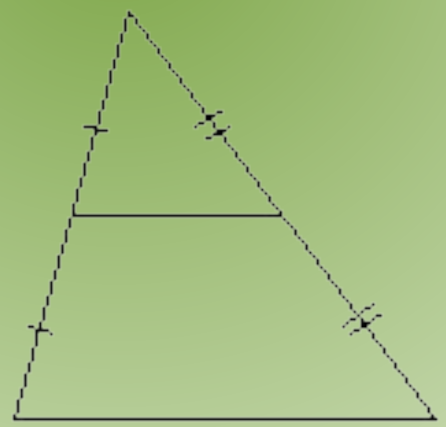
3. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



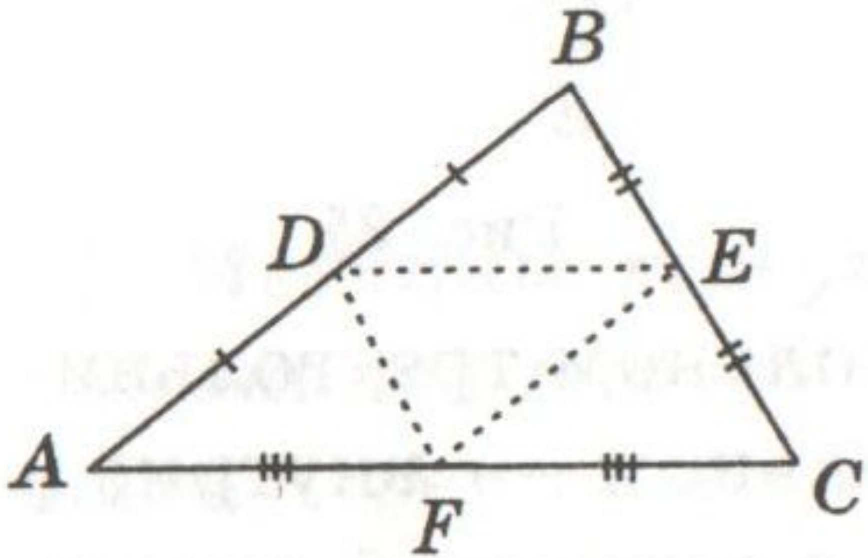


Рис. 37

2. Средняя линия треугольника отсекает от треугольника подобный треугольник. Площадь отсекаемого треугольника относится к площади основного треугольника в отношении 1:4.

$$a + b > c,\ c < a - b;$$
$$a + c > b,\ b < a - c;$$
$$b + c > a,\ a < b - c.$$

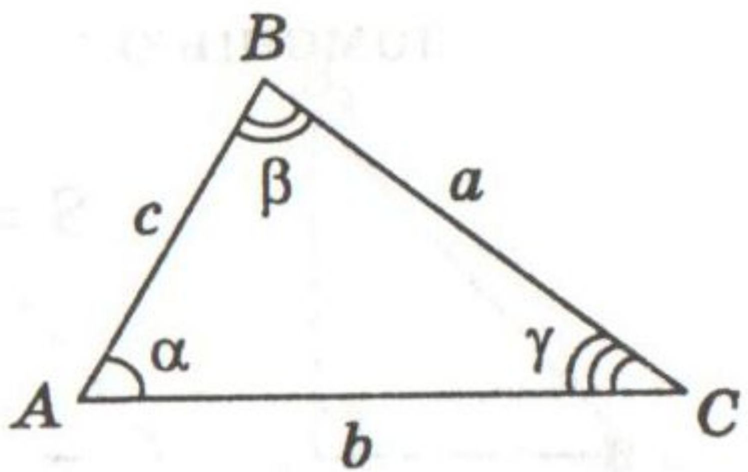
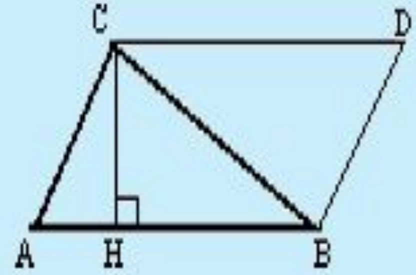


Рис. 38

Площадь треугольника.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.



Пусть S - площадь треугольника ABC. Примем сторону AB за основание треугольника и проведем высоту CH. Докажем что

S = 1/2 *AB*CH

Достроим треугольник ABC до параллелограма ABDC так, как показано на рисунке. Треугольники ABC и BCD равны по трем сторонам (BC - их общая сторона, AB = CD и AC = BD как противоположные стороны параллелограма ABCD), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограма ABCD, т.е.

S = 1/2 *AB*CH

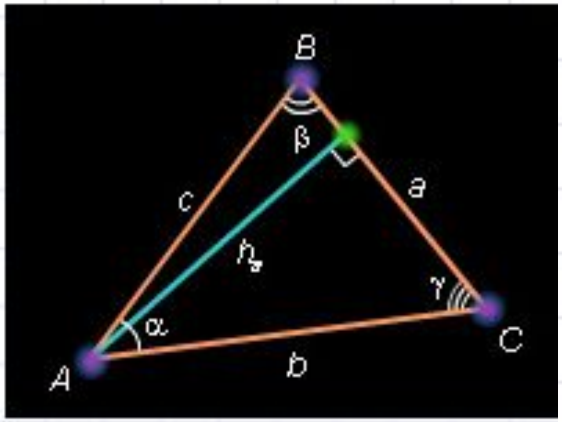
Теорема доказана.

Следствие 1 : Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов

Следствие 2 : Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

$$1.\ S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\ \sin\alpha$$

Доказательство:



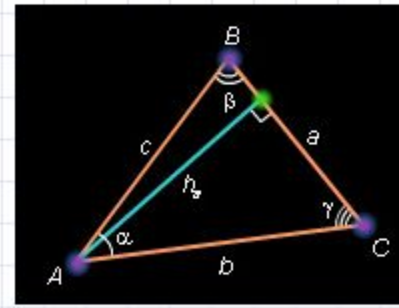
Из основной формулы $S=\frac{1}{2}h_a\cdot a$.

С другой стороны $h_a=b\cdot\ \sin\gamma$.

По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$, откуда $a=\frac{c\cdot\ \sin\alpha}{\sin\gamma}$.

Подставляя выражения для h_a и a в основную формулу, получим искомое выражение.

$$2.\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



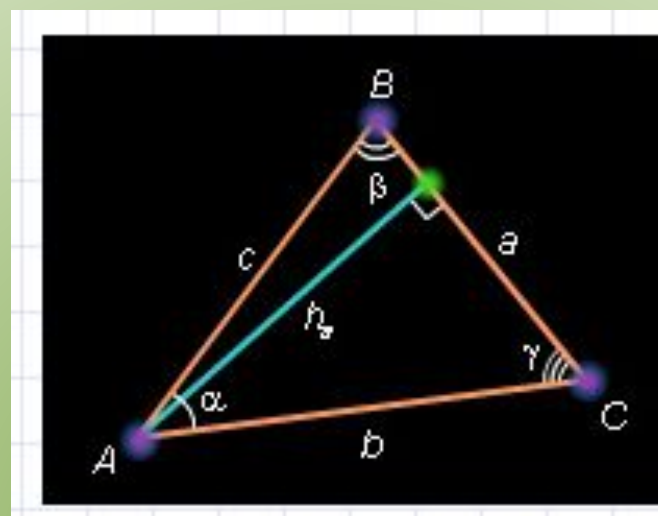
$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{2bc}\sqrt{\left(2bc^2\right)-\left(b^2+c^2-a^2\right)}=\frac{1}{2bc}\sqrt{\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2bc}\sqrt{\left(a^2-(b-c)^2\right)\left((b+c)^2-a^2\right)}=\frac{1}{2bc}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(a+c-a)(b+c+a)}=$$

$$=\frac{4}{2bc}\sqrt{(p-b)(p-c)(p-a)p},$$

где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Подставляя полученное выражение в формулу $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$, получим искомую формулу.

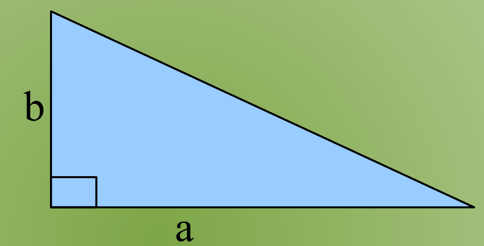


$$S = \frac{abc}{4R}.$$

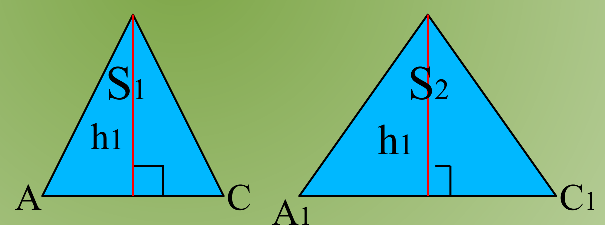
$$S = pr.$$

Площадь треугольника

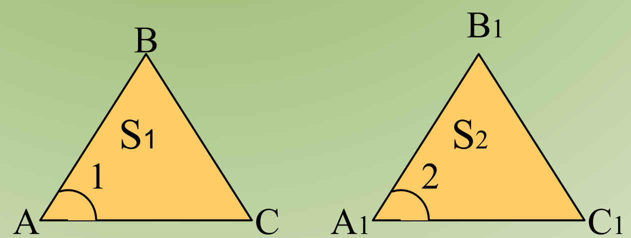
$$S\ (\text{п/у}\triangle) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b.$$



$$h_1 = h_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



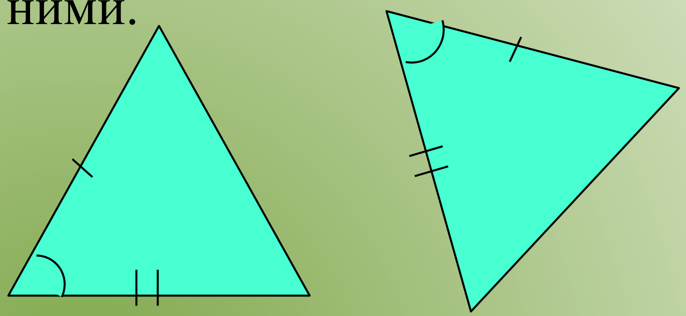
$$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC\cdot AB}{A_1C_1\cdot A_1B_1}$$



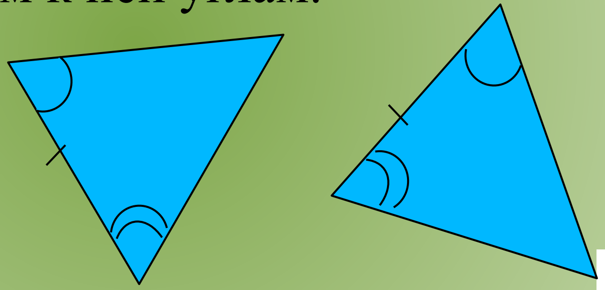
Равенство треугольников

Признаки равенства треугольников:

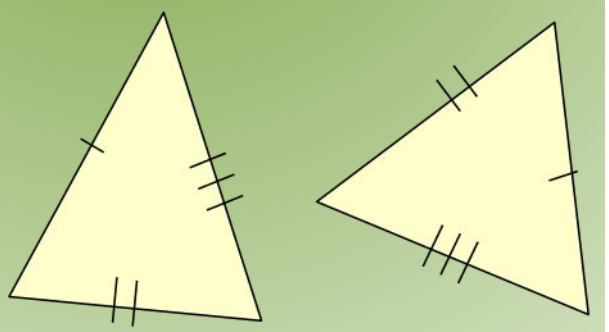
1. По двум сторонам и углу между ними.



2. По стороне и двум прилежащим к ней углам.



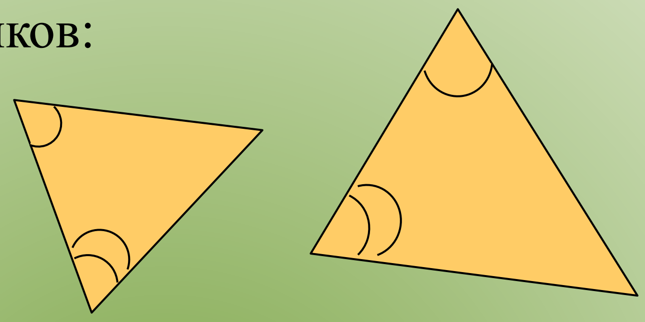
3. По трём сторонам.



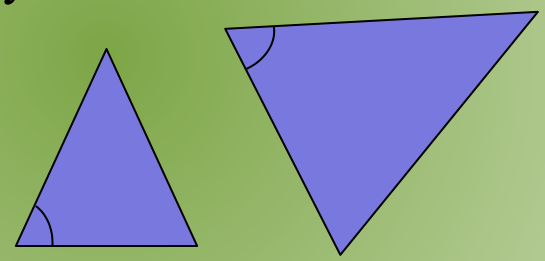
Подобие треугольников

Признаки подобия треугольников:

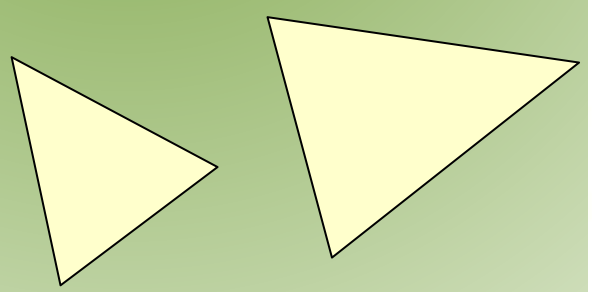
1. По двум углам.



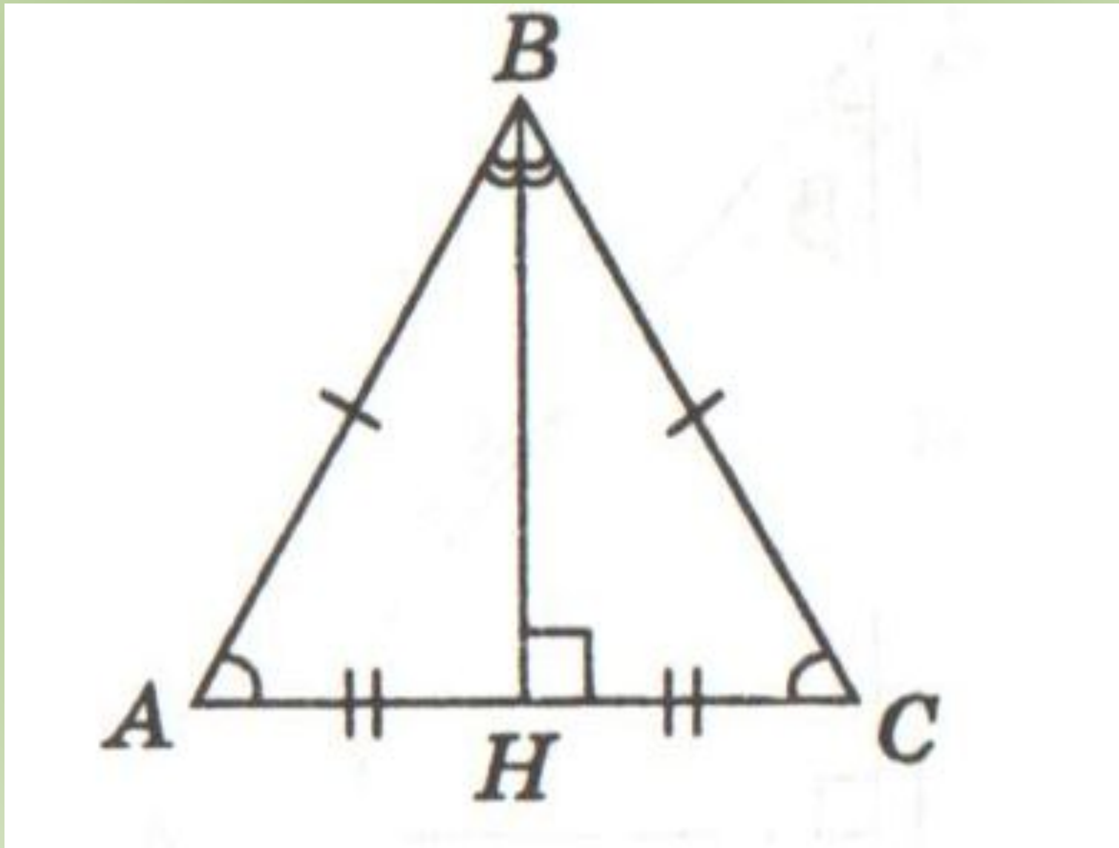
2. По двум сторонам и углу между ними.



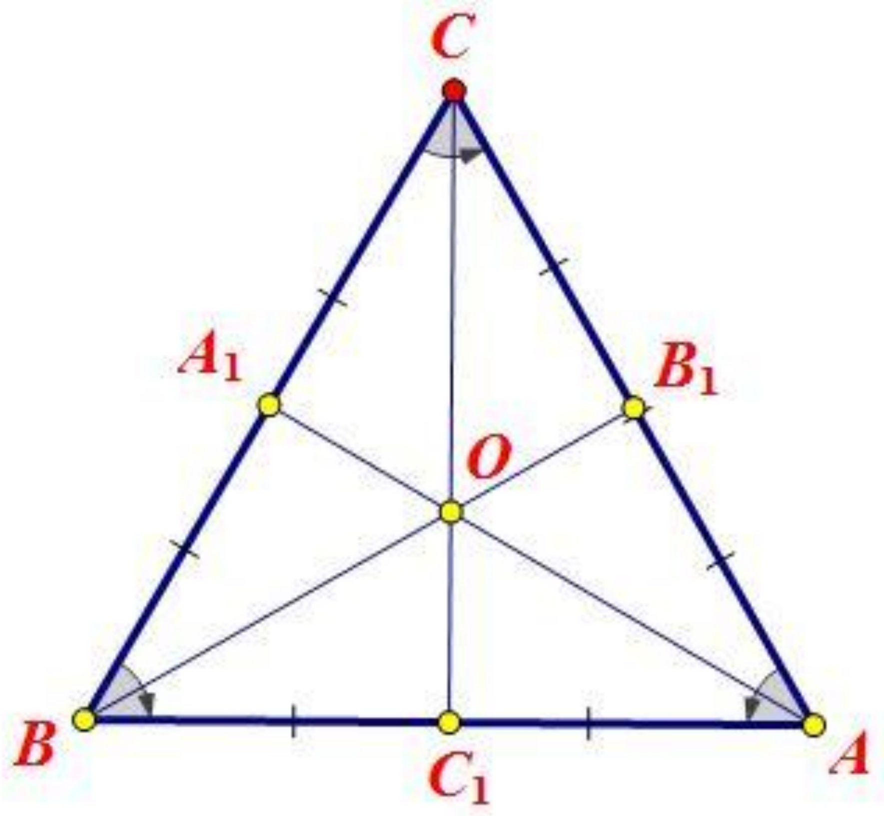
3. По трём сторонам.



Равнобедренный треугольник.



Равносторонний треугольник.



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

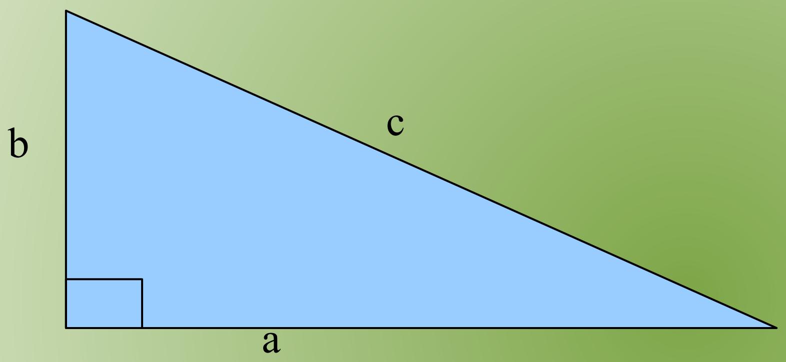
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

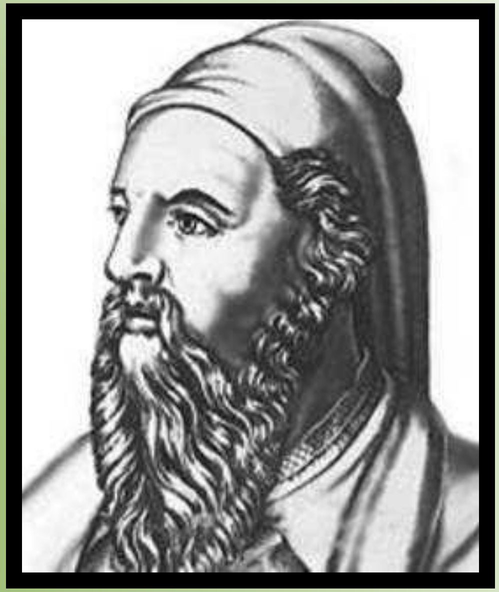
$$R = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

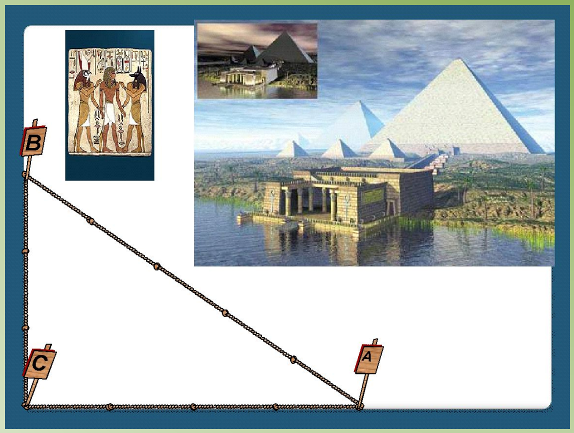
$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Теорема Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$







Доказательство теоремы Пифагора

Дано: a,b- катеты, c-гипотенуза.

Доказать: $a^2+b^2=c^2$.

Доказательство:

Достроим до квадрата со стороной (a+b).

$$S_1=(a+b)^2$$

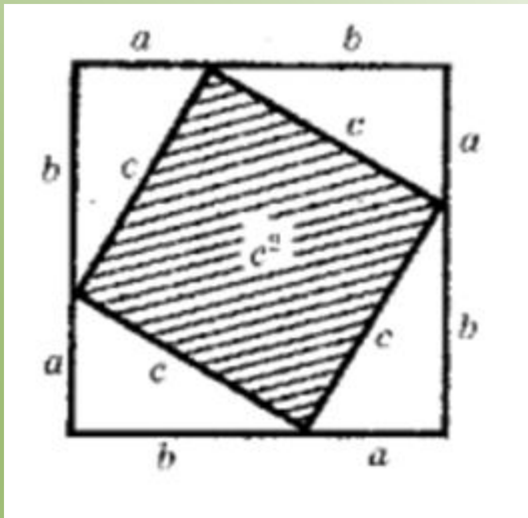
$$S_2=4(1/2ab)+c^2$$

Приравняем площади: $S_1=S_2$.

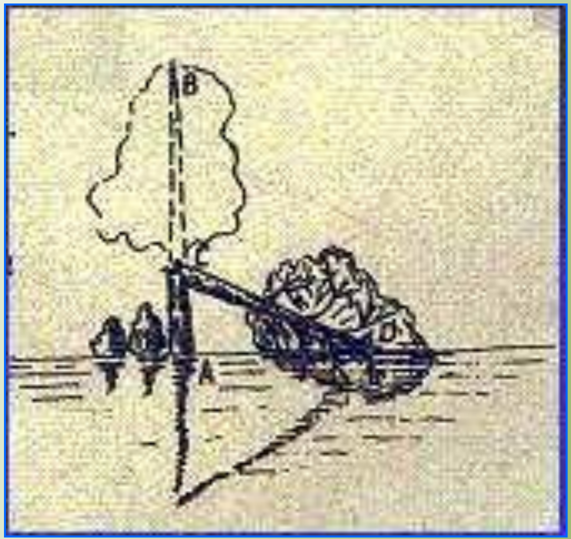
$$(a+b)^2=4(1/2ab)+c^2$$

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

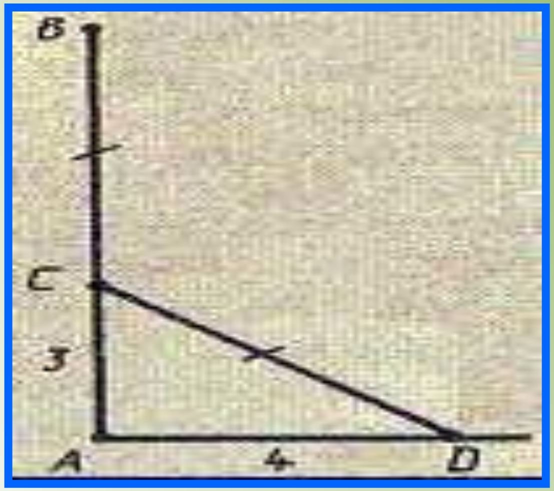


Задача



Вот задача индийского математика 12в. Бхаскары

На берегу реки рос тополь одинокий. Вдруг ветра порыв его ствол надломал. Бедный тополь упал. И угол прямой с теченьем реки его ствол составлял. Запомни теперь, что в том месте река в четыре лишь фута была широка. Верхушка склонилась у края реки. Осталось три фута всего от ствола, прошу тебя, скоро теперь мне скажи: у тополя как велика высота?



Решение:

По теореме Пифагора находим CD:

$CD^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow CD = 5.$

Высота тополя равна: CB+CA. Т.к.

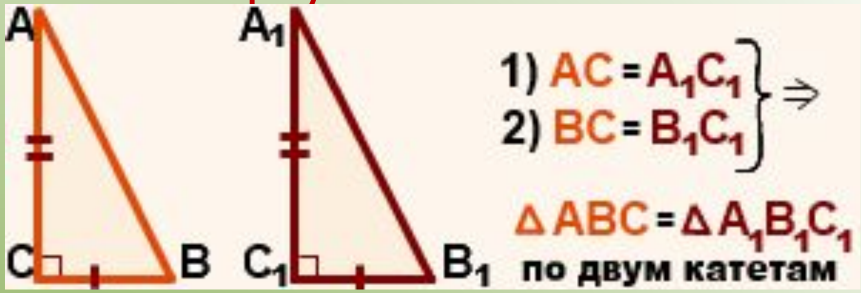
CD=CB =>

AB=AC+CD= 3 + 5 = 8.

Ответ: высота тополя 8 футов.

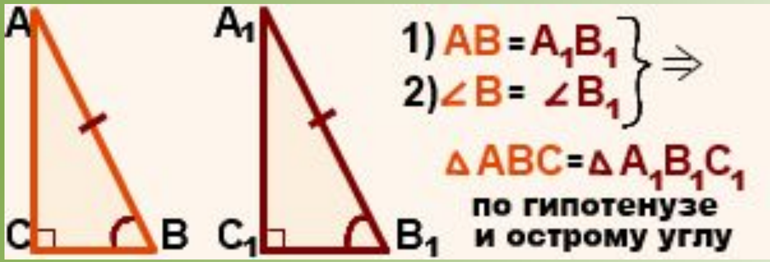
Признаки равенства прямоугольных треугольников.

Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам



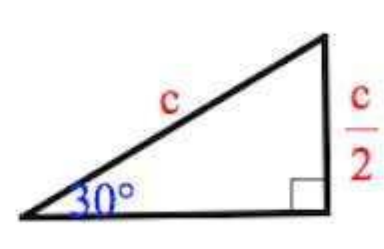
Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе

Признак равенства по гипотенузе и острому углу



Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и острому углу

Свойства прямоугольного треугольника



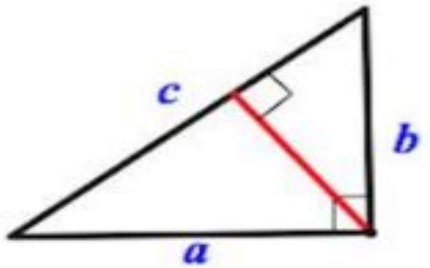
1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90˚.

2. Катет, противолежащий углу в 30˚, равен половине гипотенузы.

3. И обратно, если в треугольнике катет вдвое меньше гипотенузы, то напротив него лежит угол в 30˚**.**

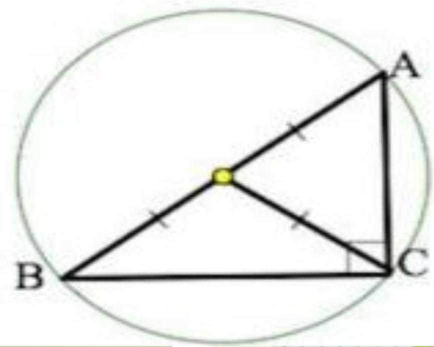
4. Площадь S прямоугольного треугольника с катетами a, b: $S = \frac{1}{2}ab$

5. Высота h прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе выражается через катеты a, b и гипотенузу c следующим образом: $h = \frac{ab}{c}$

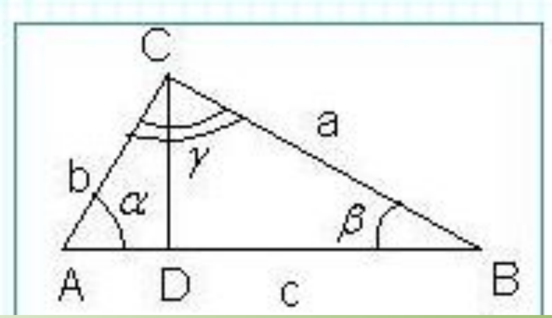


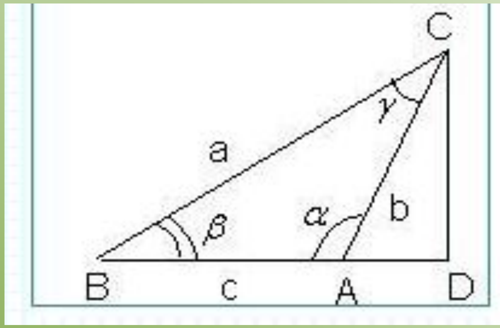
6. Центр описанной окружности – есть середина гипотенузы.

7. Радиус R описанной окружности есть половина гипотенузы c: $R = \frac{c}{2}$



Теорема синусов и теорема косинусов.





Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство. Рассмотрим ΔABC со сторонами a, b, c и противолежащими углами α, β, γ. Докажем, что

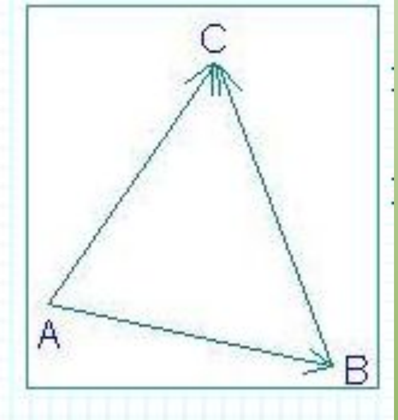
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Из вершины C треугольника ABC опустим высоту CD. Из прямоугольного ΔACD, если α – острый угол, получаем $CD=b\sin\alpha$. Если α – тупой угол, то $CD=b\sin(180^\circ-\alpha)=b\sin\alpha$.

Аналогично из прямоугольного ΔBCD получаем $CD=a\sin\beta$. Таким образом, $a\sin\beta=b\sin\alpha$, т.е.

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$. Опуская высоту в треугольнике ABC из вершины A, аналогично имеем $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$. Итак,

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$



Теорема косинусов.

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство. Дан ΔАВС. Рассмотрим векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$ (рис. 13). Очевидно, $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$. Возведем это равенство скалярно в квадрат:

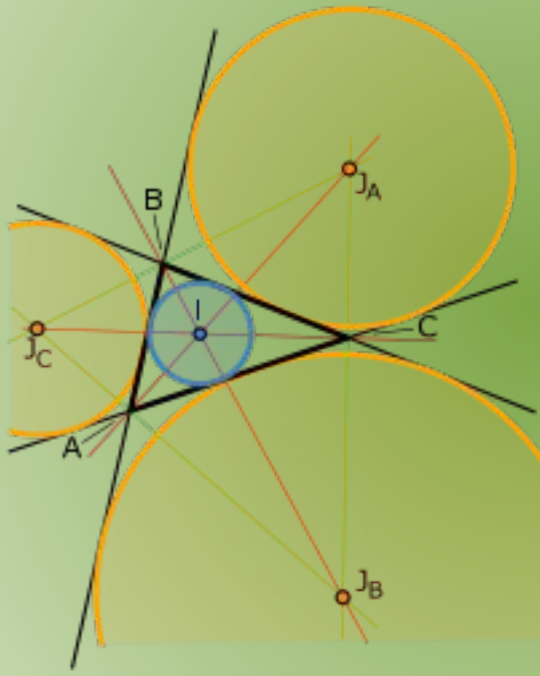
$$\vec{BC}^2 = \vec{BC}\cdot\vec{BC} = (\vec{AC} - \vec{AB})\cdot(\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AC}^2 - \vec{AC}\cdot\vec{AB} - \vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{AB}^2 = \vec{AC}^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{AB}^2$$

Используя теперь определение скалярного произведения векторов, имеем

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A$, где $AB = |\vec{AB}|$, $AC = |\vec{AC}|$, $BC = |\vec{BC}|$ - длины сторон ΔАВС, <А – угол между сторонами АВ и АС. Теорема доказана.

Вневписанная окружность

Вневписанная окружность треугольника- окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.



Свойство: длина отрезка касательной, проведенной к вневписанной окружности из противоположной вершины, равна полупериметру треугольника.

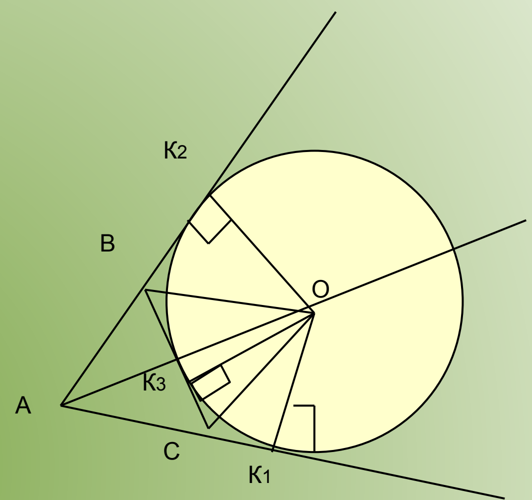
Доказательство:

1)Пусть точки К2 и К3- точки касания вневписанной окружности с прямыми АВ и ВС соответственно.

2)СК1=СК3 (по свойству ВК2=ВК3 касательных к АК1=АК2 окружности).

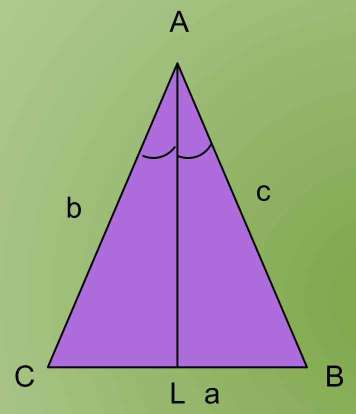
3)Р=АС+СВ+АВ=АС+СК3+ВК3+АВ=АС+СК1+ВК2+АВ=АК1+АК2=2·АК1.

Значит, АК1=Р/2.



Расстояние от инцентра треугольника до его вершин

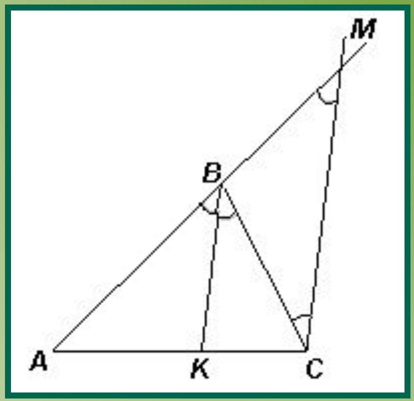
Теорема 1: Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные соответствующим боковым сторонам.



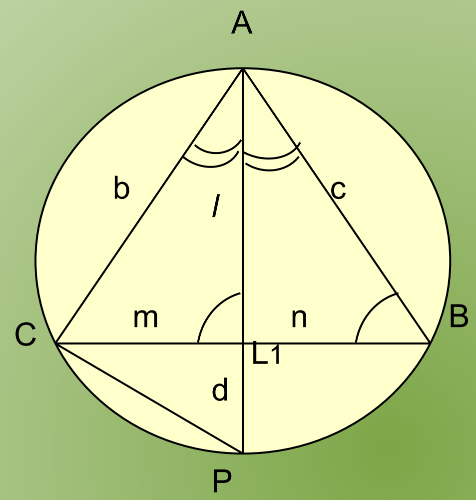
Следствие: Пусть AL-биссектриса $\angle A$ в ΔABC. Тогда отрезки CL и LB находятся по формулам: $\boxed{CL=\frac{ab}{b+c}}$, $\boxed{BL=\frac{ac}{b+c}}$.

Дано: ВК- биссектриса, СМ||ВК

Доказательство: Так как ВК – биссектриса ∠АВС, то ∠АВК=∠КВС. Далее, ∠АВК=∠ВМС, как соответственные углы при параллельных прямых, и ∠КВС=∠ВСМ, как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Отсюда ∠ВСМ=∠ВМС, и поэтому треугольник ВМС – равнобедренный, откуда ВС=ВМ. По теореме о параллельных прямых, пересекающих стороны угла, имеем АК/КС=АВ/ВМ=АВ/ВС, что и требовалось доказать.



Теорема 2: Пусть в ΔABC из вершины $\angle A$ проведена биссектриса l, которая делит сторону CB на отрезки CL=m, LB=n. Тогда справедливо равенство: $\boxed{l^2 = b \cdot c - m \cdot n.}$



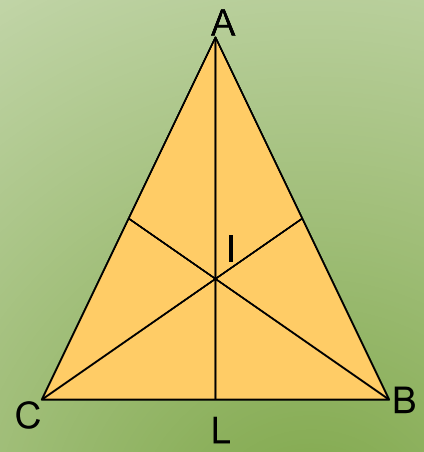
Теорема 3: Для всякого ΔABC справедливы равенства:

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{p(p-a)}$$

$$l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \cdot \sqrt{p(p-b)}$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{p(p-c)}$$

Инцентр- точка пересечения биссектрис треугольника.



Расстояние от инцентра треугольника до его вершин вычисляется по формулам:

$$AI = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$$

$$BI = \sqrt{\frac{ac(p-b)}{p}}$$

$$CI = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}$$

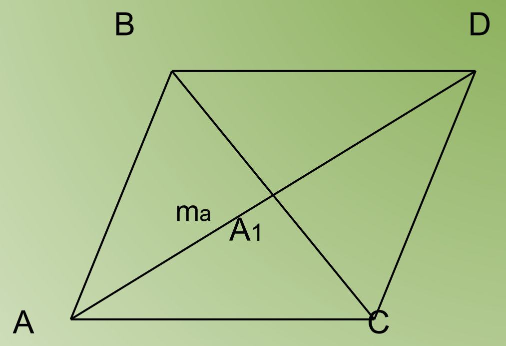
Свойства медиан

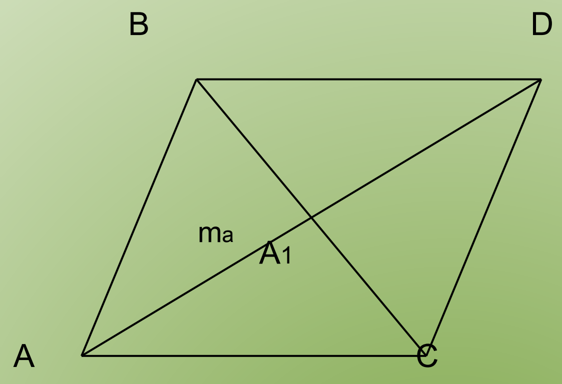
Теорема: Если a, b, c- стороны ΔABC (рис.34), m_a, m_b, m_c- его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедливы формулы:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$





Доказательство:

На продолжении медианы AA_1 треугольника ABC отложим отрезок A_1D равный отрезку AA_1. Тогда по теореме о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, имеем:
$AD^2+BC^2=2AB^2+2AC^2$

или $4m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$,

откуда $$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Следствие 1: Если a, b, c- стороны ΔABC, m_a, m_b, m_c- его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедлива формула:

$$\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{4}.$$

Следствие 2: Если a, b, c- стороны ΔABC, m_a, m_b, m_c- его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедливы формулы, выражающие строны треугольника через его медианы:

$$a^2=\frac{4}{9}\cdot\left(2m_b^2+2m_c^2+m_a^2\right),$$

$$b^2=\frac{4}{9}\cdot\left(2m_a^2+2m_c^2+m_b^2\right),$$

$$c^2=\frac{4}{9}\cdot\left(2m_a^2+2m_b^2+m_c^2\right).$$

Следствие 3: В треугольнике ABC $\angle C=90°$ тогда и только тогда, когда

$$m_a^2+m_b^2=5m_c^2.$$

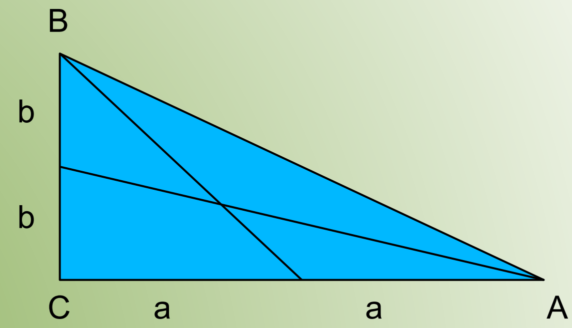
Задача

Дано: в прямоугольном треугольнике медианы катетов $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$.

Найти: $S_{\Delta ABC}$.

Решение:

Каждая из медиан катетов образует с прямым углом прямоугольный треугольник. Обозначим длину половины каждого катета как a и b. Тогда, по теореме Пифагора получим:



$$a^2 + 4b^2 = (\sqrt{73})^2$$

$b^2 + 4a^2 = (\sqrt{52})^2$, откуда $a^2 = 73 - 4b^2$, подставим выражение во второе уравнение $b^2 + 4\cdot(73 - 4b^2) = 52$

$$\begin{cases} b^2 + 292 - 16b^2 = 52 \\ 15b^2 = 240,\ b^2 = 16,\ b = 4 \end{cases}$$

Соответственно, $a^2 = 73 - 4\cdot 16 = 9$, $a = 3$.

Таким образом, катеты прямоугольного треугольника равны (2a и 2b) 8 и 6 см.

Откуда площадь прямоугольного треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6 = 24 \text{ см}^2.$$

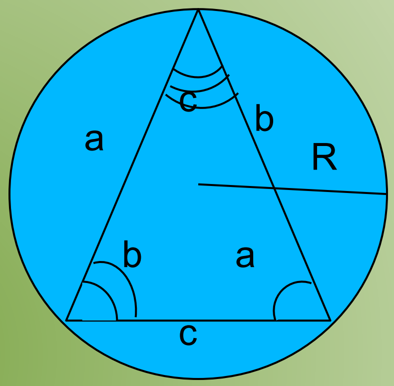
Ответ: Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2.

Спасибо за внимание!

Теорема синусов и косинусов

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c} = 2\cdot R.$$



Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos a.$$