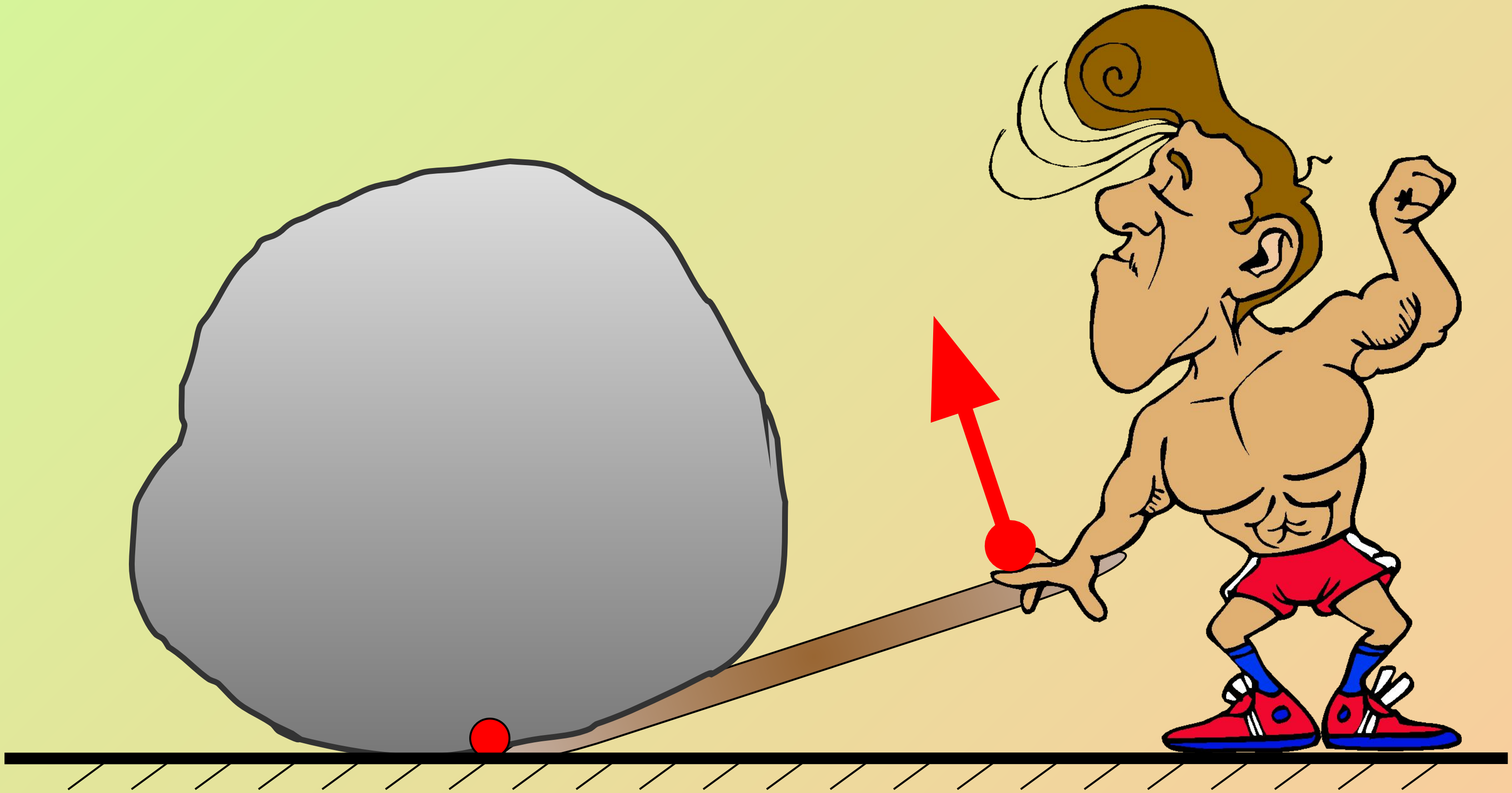
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

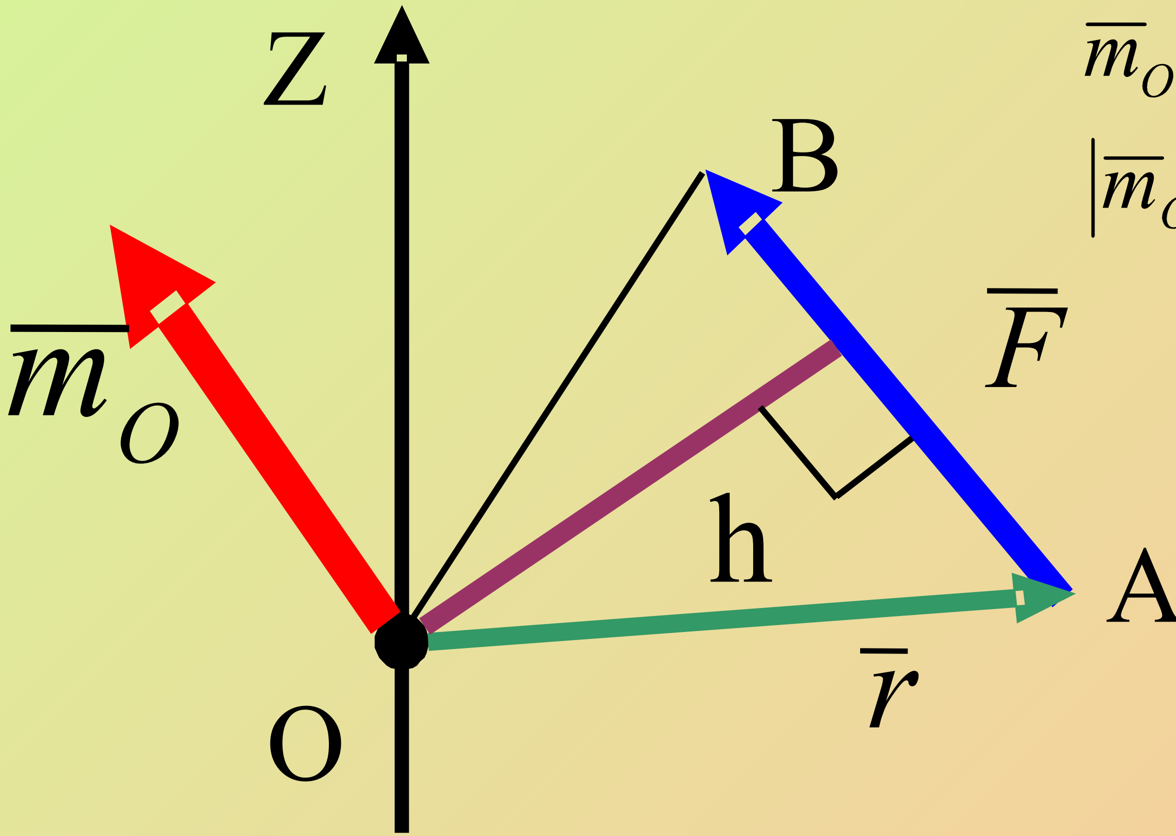
Лекция №2

2.1 Момент силы относительно центра (точки)



Момент силы относительно центра

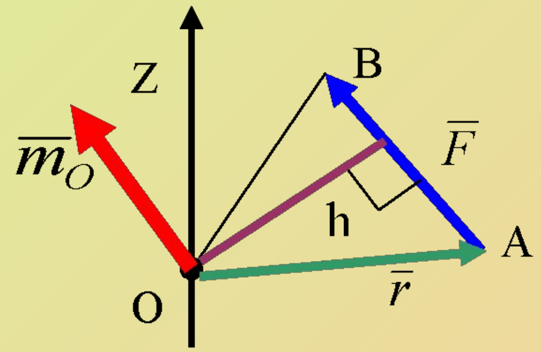
▪



$$\overline{m}_O = \overline{r} \times \overline{F}$$

$$\left|\overline{m}_O\right| = F \cdot h$$

Моментом силы $\overline{F}$ ***относительно центра (точки) О*** называется вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ равный **векторному произведению** радиуса вектора $\overline{r}$, проведенного из центра О в точку А приложения силы, и вектора силы $\overline{F}$:



$$\boxed{\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}}$$

Вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ приложен в точке O и направлен $\perp$ плоскости, проходящей через центр O и силу $\overline{F}$, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O *против хода часовой стрелки.*

Модуль $\left|\overline{m}_O(\overline{F})\right|$ равен произведению модуля силы $\overline{F}$ на плечо h:

$$\boxed{\left|\overline{m}_O\right| = \mathrm{F} \cdot \mathrm{h}},$$

где ***плечо h – перпендикуляр, опущенный из центра О на линию действия силы*** $\overline{F}$ **.**

Момент $\overline{m}_O(\overline{F})$ характеризует ***вращательный эффект силы*** $\overline{F}$ относительно центра (точки) O.

Свойства момента силы:

- Момент силы относительно центра не изменяется при переносе силы вдоль линии ее действия в любую точку.
- Если линия действия силы проходит через центр O (h = 0), то момент силы относительно центра O равен нулю.
- Для плоской системы сил при вычислении моментов сил относительно точки (центра), находящейся в той же плоскости, пользуются понятием ***алгебраического момента силы относительно точки***.

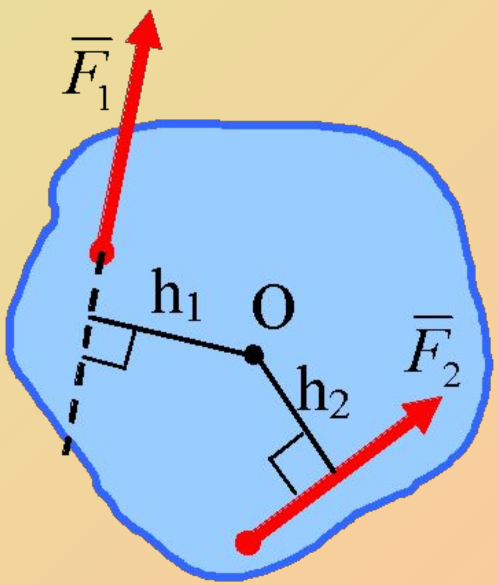
Алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно точки O равен взятому с соответствующим знаком ***произведению модуля силы на ее плечо:***

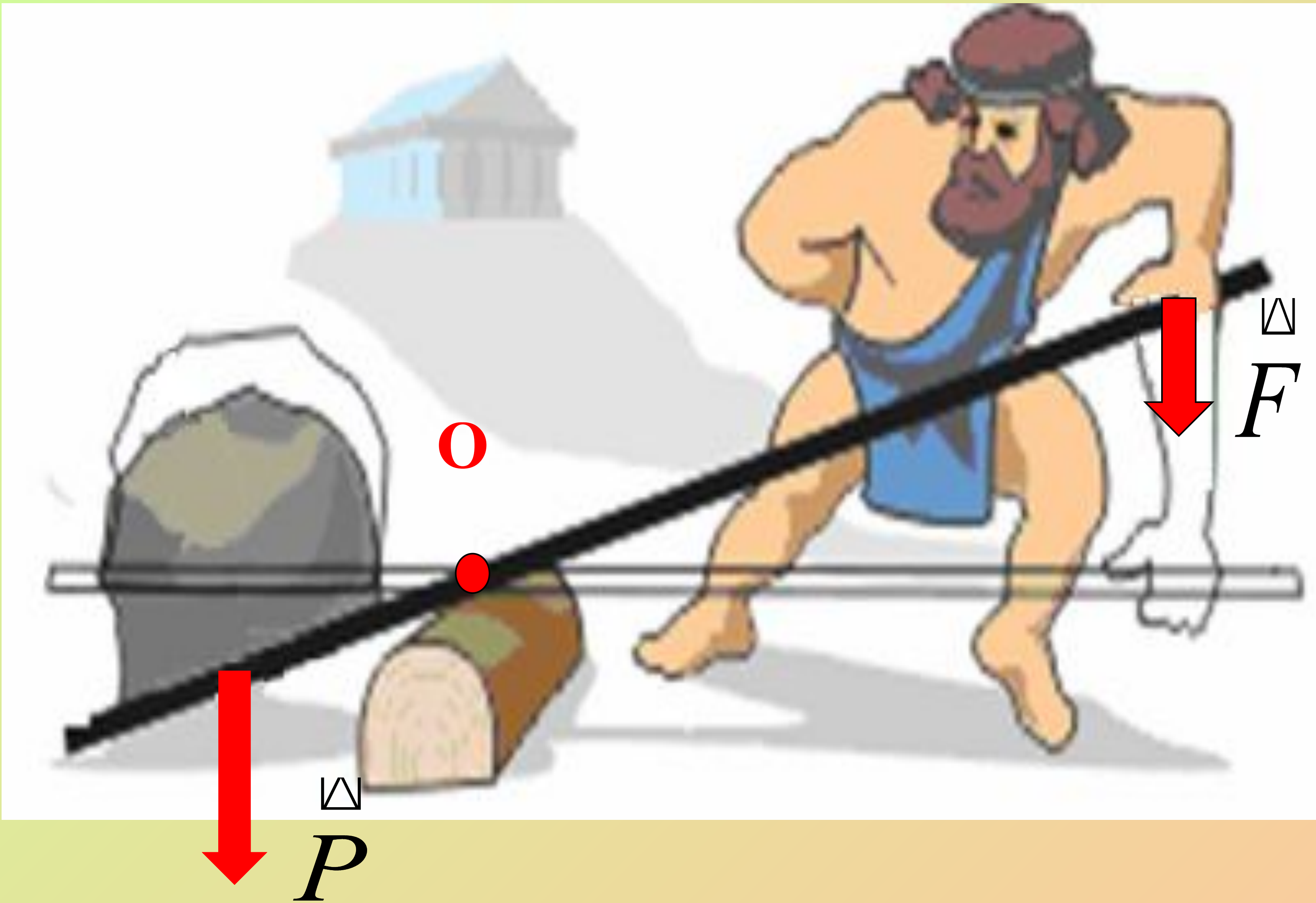
$$m_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h.$$

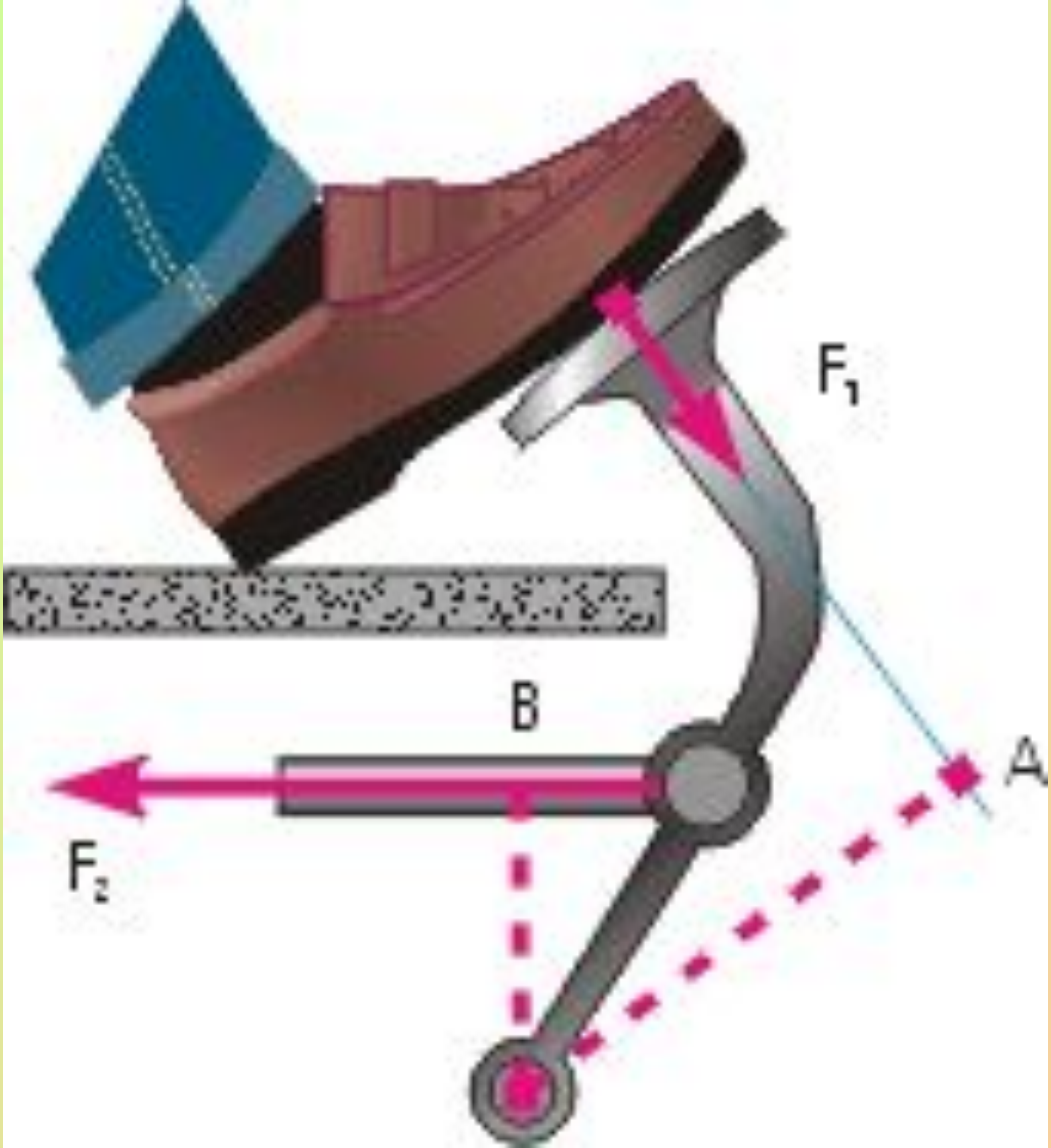
Момент считается *положительным*, если сила стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки, и *отрицательным* – по ходу часовой стрелки:

$$m_O(\overline{F}_1) = -F_1 \cdot h_1;$$

$$m_O(\overline{F}_2) = +F_2 \cdot h_2.$$

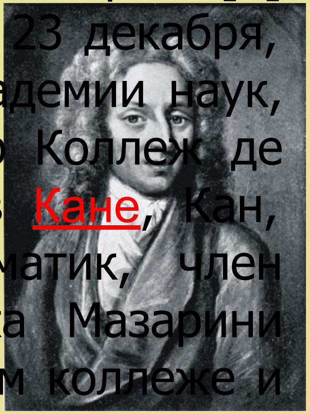



O
$\vec{F}$
$\vec{P}$



F_1
B
A
F_2

Пьер Вариньон



математики коллежа Мазарини (1688), профессор Коллеж де Франс.[1] Обучался в иезуитском коллеже и университете, Кан, 1654 — 23 декабря, 1722, Париж) — французский математик, член Парижской Академии наук, профессор математики коллежа Мазарини (1688), профессор Коллеж де Франс.[1] Обучался в иезуитском коллеже и университете в Кане, Кан, 1654 — 23 декабря, 1722, Париж) — французский математик, член Парижской Академии наук, профессор математики коллежа Мазарини (1688), профессор Коллеж де Франс.[1] Обучался в иезуитском коллеже и университете в Кане, где стал магистром, Кан, 1654 — 23 декабря, 1722, Париж) — французский математик, член Парижской Академии наук, профессор математики коллежа Мазарини (1688), профессор Коллеж де Франс.[1] Обучался в иезуитском коллеже и университете в Кане, где стал магистром в 1682 году.

Вариньон был другом НьютонаВариньон был другом Ньютона, ЛейбницаВариньон был другом Ньютона, Лейбница и БернуллиВариньон был другом Ньютона, Лейбница и Бернулли. Основной вклад Вариньон совершил в статикуВариньон был другом Ньютона, Лейбница и Бернулли. Основной вклад Вариньон совершил в статику и механикуВариньон был другом Ньютона, Лейбница и Бернулли. Основной вклад Вариньон совершил в статику и механику; кроме того, труды Вариньона посвящены анализу бесконечно малыхВариньон был другом Ньютона, Лейбница и Бернулли. Основной вклад Вариньон совершил в статику и механику; кроме того, труды Вариньона посвящены анализу бесконечно малых, геометрииВариньон был другом Ньютона, Лейбница и Бернулли. Основной вклад Вариньон совершил в статику и механику; кроме того, труды

Теорема Вариньона

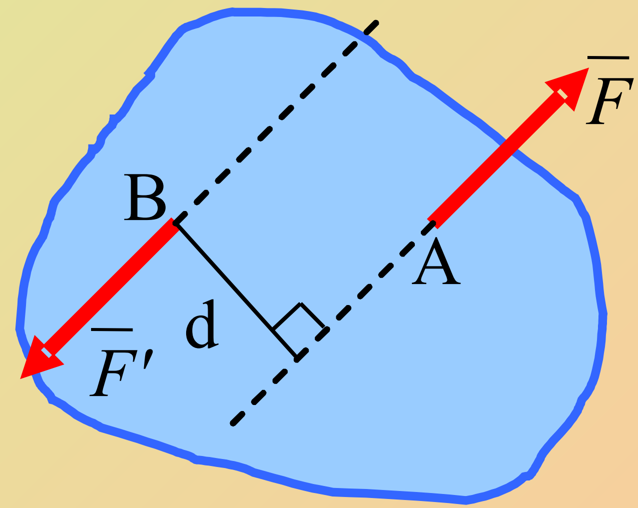
При определении алгебраического момента силы относительно точки в случае, когда сложно найти плечо h, следует *разложить силу на составляющие*, плечи которых найти проще, (часто параллельно осям координат), и применить ***теорему Вариньона***:

если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любой точки* О *равен сумме моментов составляющих сил, относительно той же точки

$$\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k), \text{ где } \overline{R} = \sum \overline{F}_k.$$

2.2 Теория пар сил, свойства пар сил

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил ($\overline{F} = -\overline{F}'$). Плоскость, в которой лежат силы $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, называется ***плоскостью пары***, а кратчайшее расстояние d между линиями действия сил – ***плечом пары***.



Пара сил не может быть заменена одной эквивалентной ей силой, т.е. не имеет равнодействующей, так как $\overline{R} = \overline{F} + \overline{F}' = 0$.

Пара может быть уравновешена только другой парой сил.

Под действием пары сил тело вращается. Вращательный эффект пары, характеризуется моментом пары.

Момент пары сил

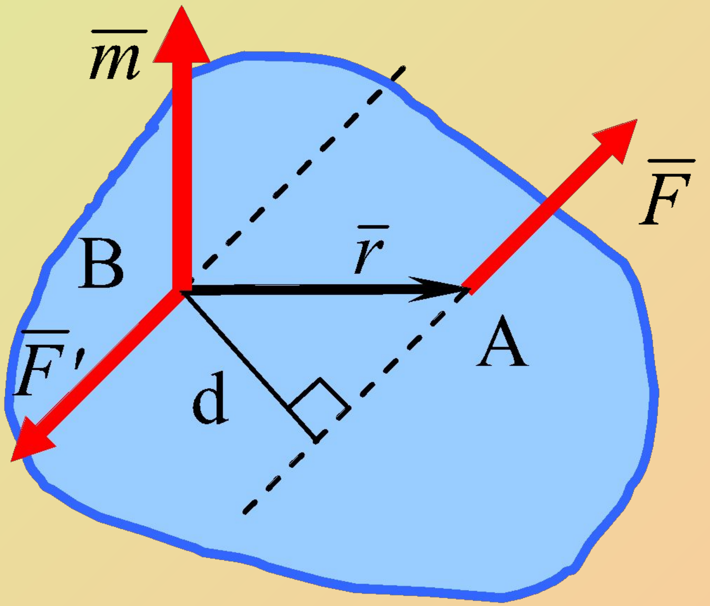
Моментом пары называется ***вектор*** равный векторному произведению

$$\overline{m} = \overline{r} \times \overline{F},$$

модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо

$$|m| = |F| \cdot |d|.$$

Вектор $\overline{m}$ направлен перпендикулярно плоскости пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки. Момент пары $\overline{m}$ – ***свободный вектор***, т. е. его можно прикладывать в любой точке тела.

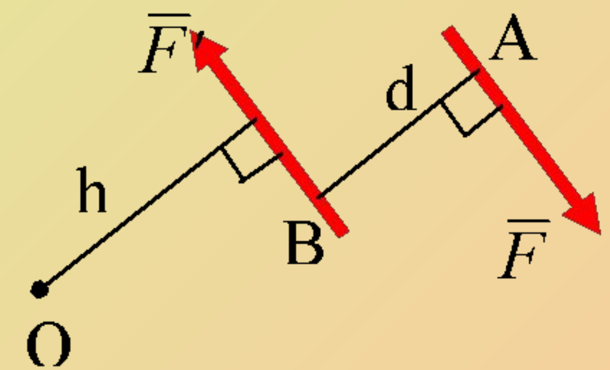


Свойства пар сил

1. Момент пары равен сумме моментов сил пары относительно произвольного центра (точки) O:

$$\overline{m}_O = \overline{m}_O(\overline{F}) + \overline{m}_O(\overline{F}').$$

2. Момент пары относительно любого центра m_O равен моменту пары m:



$$m_O = F' \cdot h - F \cdot (h + d) = -F \cdot d = m.$$

$$m_O = m$$

3. Момент пары равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары:

$$\overline{m} = \overline{m}_B(\overline{F}) = \overline{m}_A(\overline{F}').$$

4. *Теорема.* Пары сил с равными моментами эквивалентны.
Следствия:

Пару сил, приложенную к твердому телу, ***можно заменить другой парой*** в той же плоскости, если при такой замене ***не изменяется величина момента*** пары и его направление:

Пару сил можно переносить в плоскость, параллельную плоскости пары.

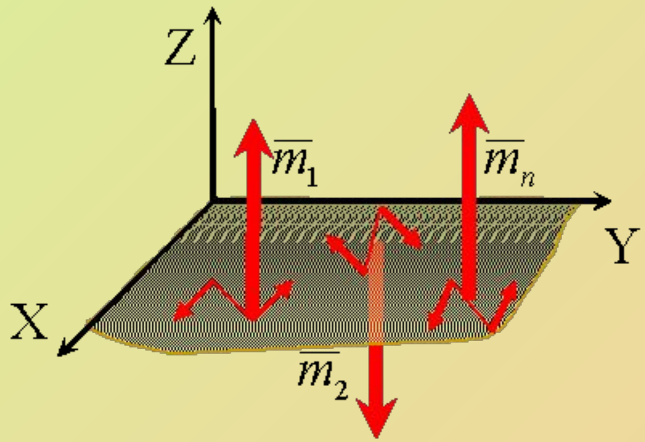
5. *Теорема.* Совокупность нескольких пар с моментами $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots \overline{m}_n$ эквивалентна одной паре, момент $\overline{m}$ которой равен геометрической сумме моментов данных пар:

$$\overline{m} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \ldots + \overline{m}_n.$$

6. Если на тело действует пространственная система пар, то тело находится в равновесии, если векторная сумма моментов пар равна нулю:

$$\sum \overline{m} = 0.$$

7. ***Если пары лежат в одной плоскости***, то момент пары считают величиной ***алгебраической***, так как в этом случае все вектора моментов пар параллельны.



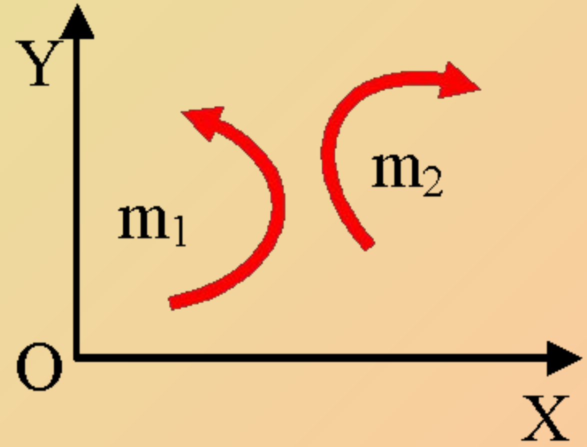
Алгебраический момент пары равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на плечо пары:

$$\boxed{m = \pm F \cdot d}.$$

Знак «+» соответствует повороту тела под действием пары ***против хода часовой стрелки***,

«–» – ***по ходу часовой стрелки***.

Пары сил на плоскости часто *изображается дуговой стрелкой*, показывающей направление поворота тела парой.



8. Если ***на тело действует плоская система пар***, то тело находится в равновесии, если сумма моментов пар равна нулю:

$$\boxed{\sum m_k = 0}.$$

2.3 Приведение системы сил к заданному центру

Теорема Пуансо

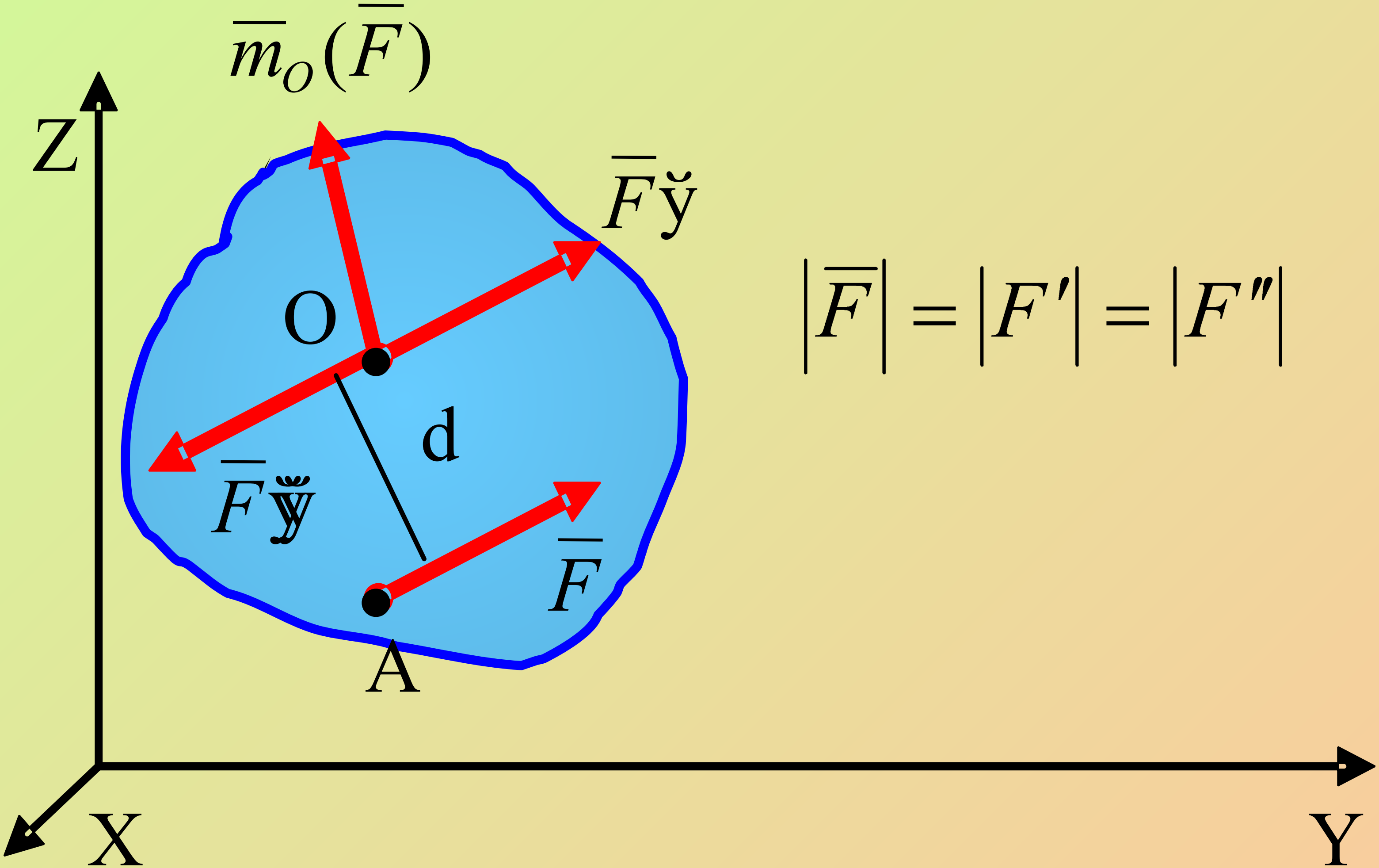
Пуансо Луи

Пуансо (Poinsot) Луи (3.1.1777, Париж, — 5.12.1859, там же), французский математик и механик, член Парижской АН с 1813. Окончил Политехническую школу в Париже (1797), с 1809 профессор там же. В период Июльской монархии — в Министерстве народного образования. Пэр Франции (1846), сенатор (1852). Первые работы П. посвящены теории правильных звездчатых многогранников. В 1803 опубликовал "Элементы статики", в которых применил разработанные им геометрические методы исследования к учению о равновесии твёрдых тел и их систем. В 1834 построил теорию вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Впервые ввёл понятие эллипсоида вращения.

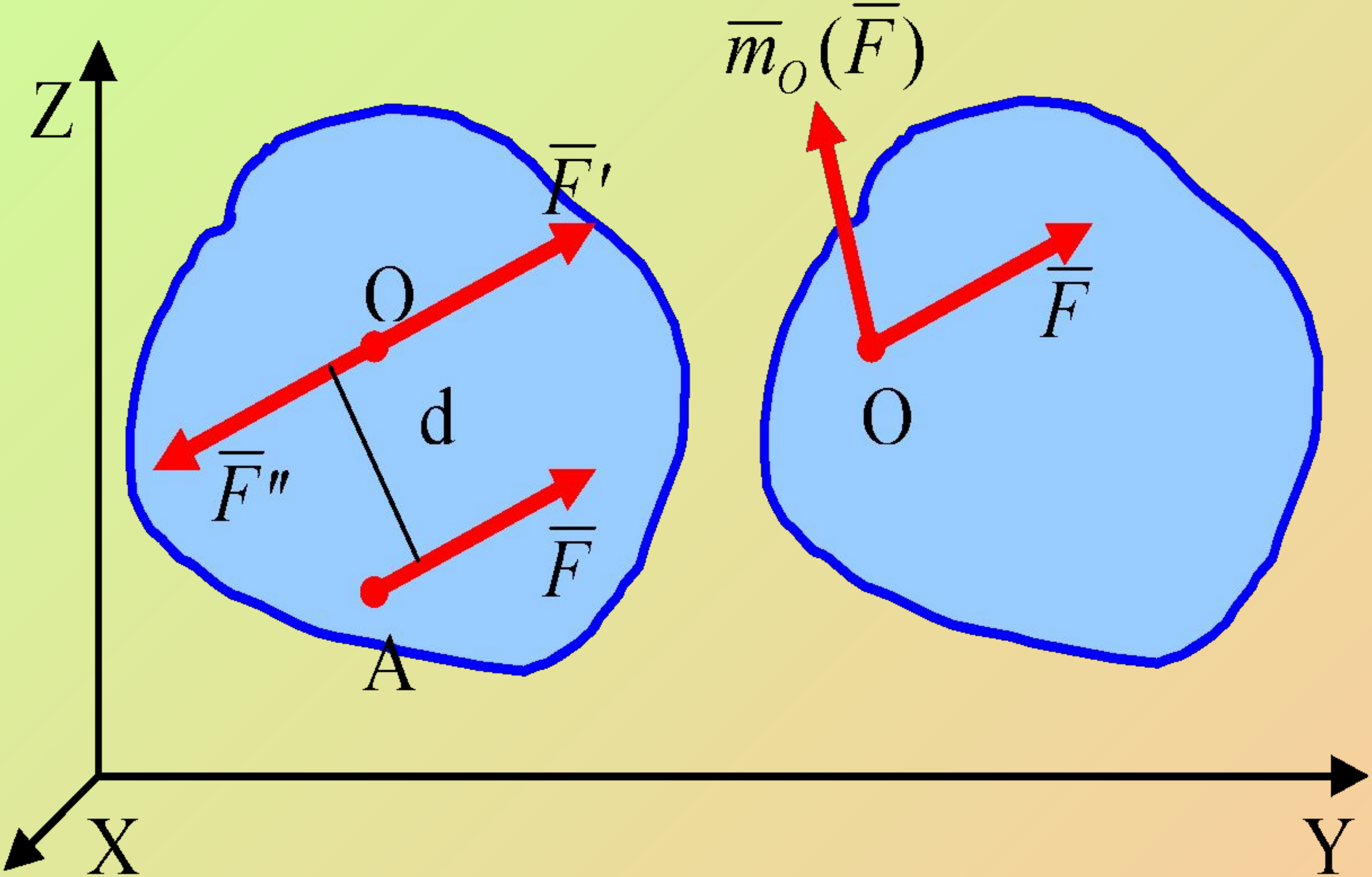
Теорема1 - О параллельном переносе силы (лемма Пуансо):

- силу $\overline{F}$, не изменяя ее действия на абсолютно твердое тело, можно переносить из данной точки *A* в любую другую точку *O* тела, прибавляя при этом пару с моментом $\overline{m}$ равным моменту переносимой силы относительно точки *O*, в которую переносится сила $\overline{F}$.

Доказательство



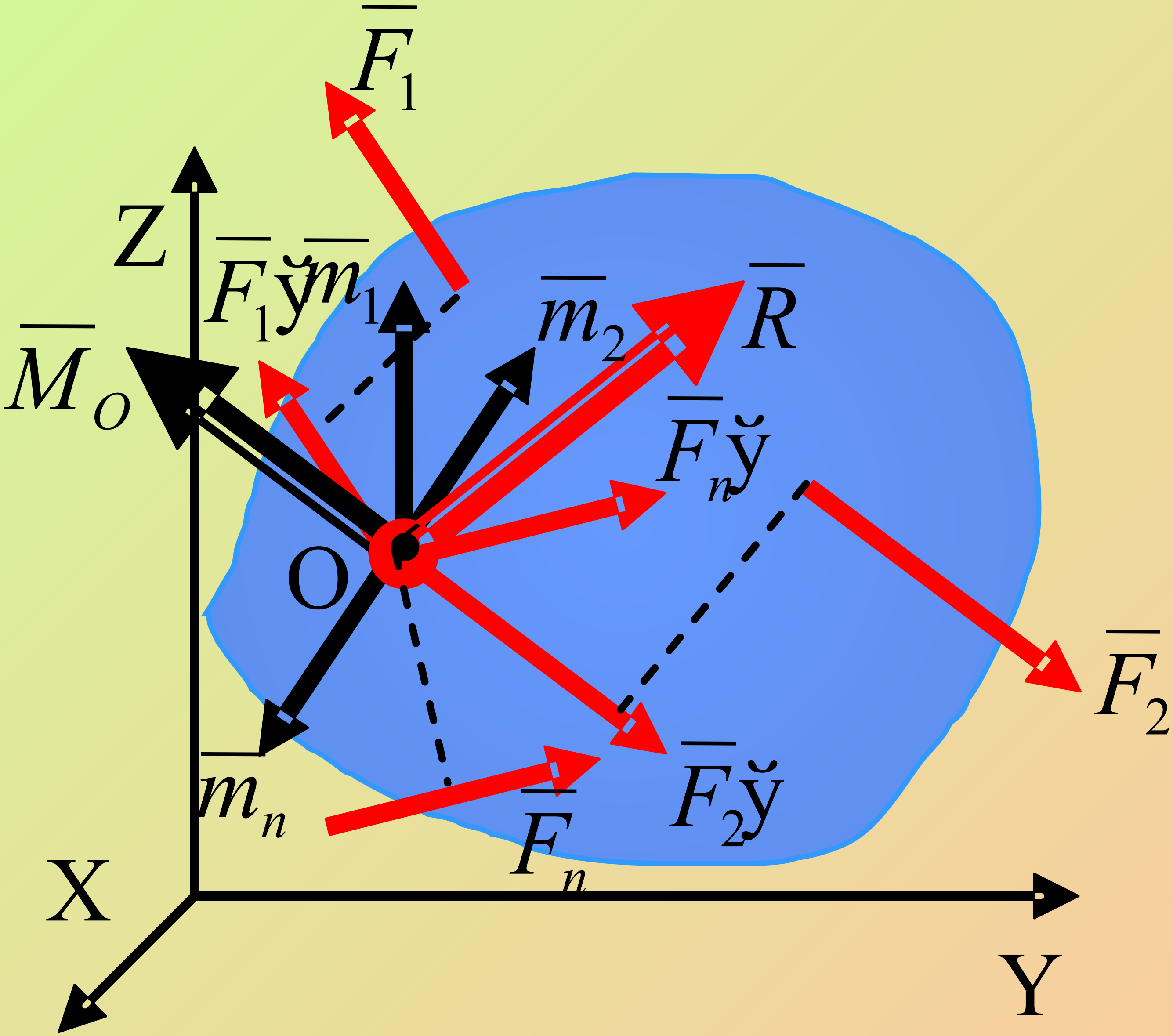
$$\left|\overline{F}\right| = \left|F'\right| = \left|F''\right|$$

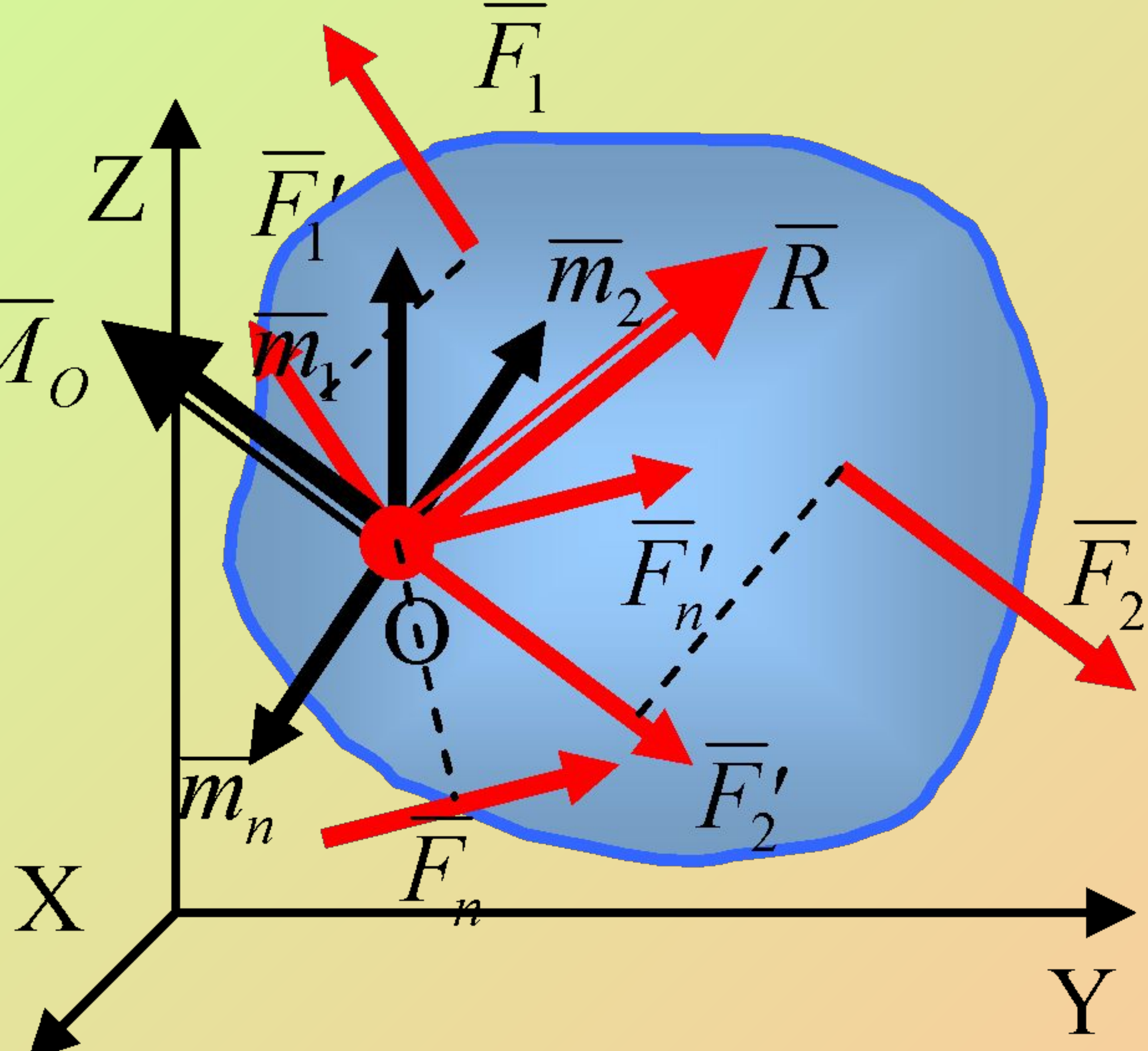

$\overline{m}_O(\overline{F})$
Z
$\overline{F}'$
O
d
$\overline{F}''$
$\overline{F}$
A
$\overline{F}$
O
X
Y

Теорема 2 – О приведении системы сил к заданному центру (теорема Пуансо):

- Любая система сил , действующая на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольному центру *O* заменяется главным вектором системы сил, приложенным в центре *O* и парой сил с моментом , равным главному моменту системы сил относительно центра *O*.

Доказательство





$\overline{F}_1$
Z
$\overline{F}'_1$
$\overline{M}_O$
$\overline{m}_1$
$\overline{m}_2$
$\overline{R}$
$\overline{F}'_n$
$\overline{F}_2$
O
$\overline{m}_n$
$\overline{F}'_2$
$\overline{F}_n$
X
Y

- Используя теорему 1 перенесем все силы в центр О прибавляя пары с моментами равными моментам сил относительно центра О. Сложив все силы и моменты получим в центре О два вектора и равные:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \overline{F}_k;$$

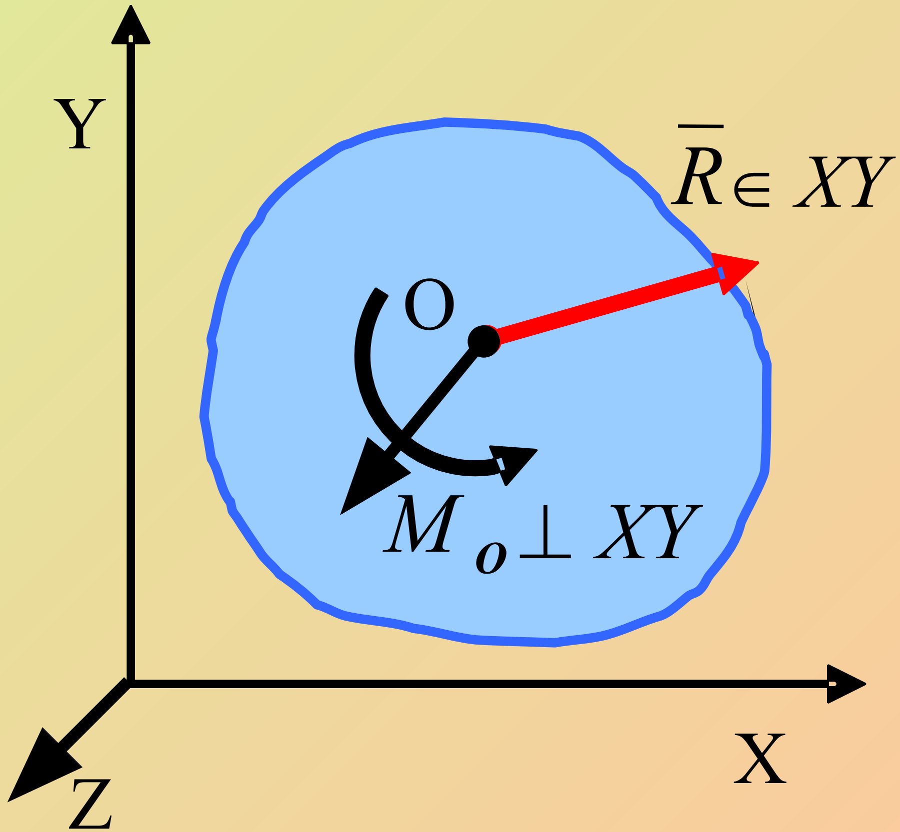
$$\overline{M}_O = \overline{M}_O\left(\overline{F}_1\right) + \overline{M}_O\left(\overline{F}_2\right) + \dots \ \overline{M}_O\left(\overline{F}_n\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \overline{M}_O\left(\overline{F}_k\right).$$

Величина главного вектора $\overline{R}$ не зависит от выбора центра O, а значение главного момента $\overline{M}_O$ при изменении положения центра O *может изменяться.*

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \overline{F}_k;$$

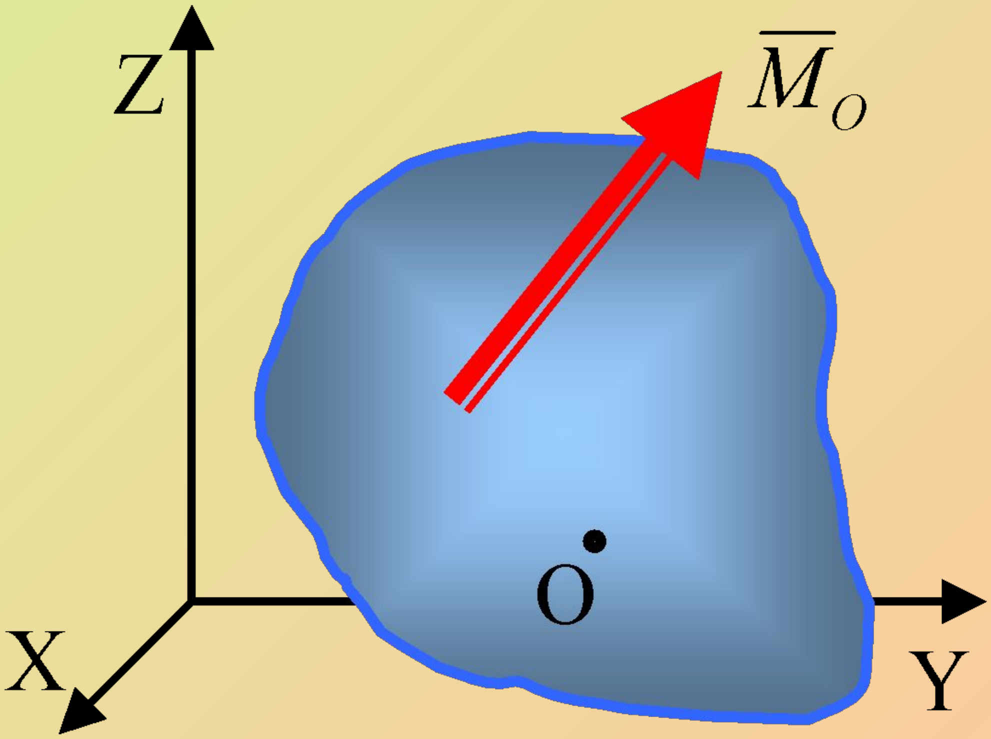
$$\text{X} \quad M_O = M_O\left(\overline{F}_1\right) + M_O\left(\overline{F}_2\right) + \dots \; M_O\left(\overline{F}_n\right) = \sum_{k=1}^{k=n} M_O\left(\overline{F}_k\right).$$

- ***Для плоской системы сил*** главный вектор $\overline{R}$ лежит в плоскости действия сил, а главный момент $\overline{M}_O$ перпендикулярен этой плоскости. Поэтому главный момент плоской системы сил относительно центра *O* определяется как сумма алгебраических моментов сил относительно центра *O* и изображается на плоскости дуговой стрелкой.



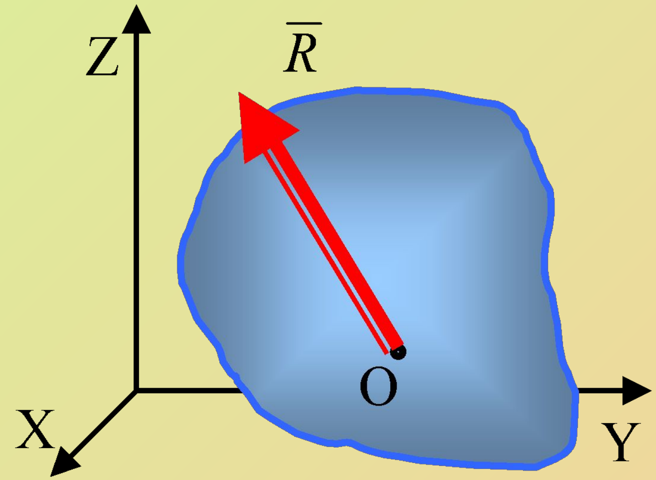
Частные случаи приведения системы сил:

- $\boxed{\overline{R} = 0; \overline{M}_O \neq 0}$ система сил приводится к одной паре, лежащей в плоскости действия сил с моментом $\overline{M}_O$ (причем это свободный вектор).



$$\boxed{\overline{R} \neq 0;\ \overline{M}_O = 0}$$

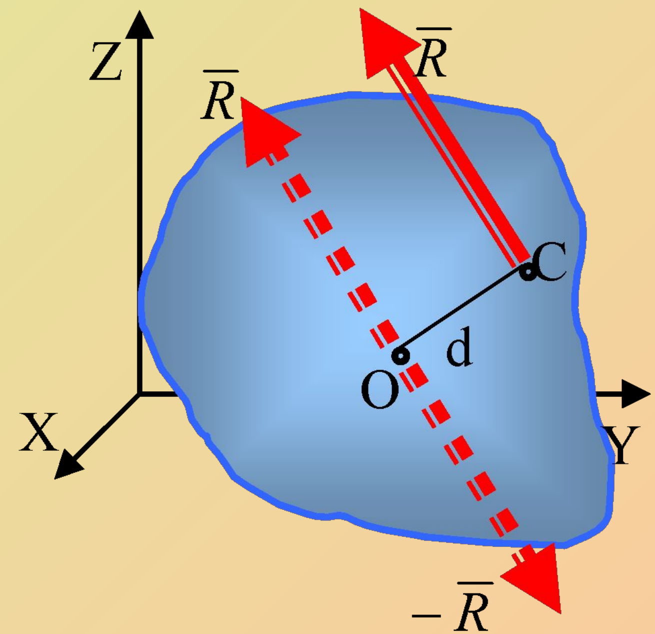
система сил приводится к равнодействующей , приложенной в центре*O*.



$$\boxed{\overline{R} \neq 0;\ \overline{M}_O \neq 0}$$

система сил приводится к равнодействующей , проходящей через точку *C*, положение которой определяется равенством

$$\boxed{OC = d = M_O / R;\ OC \perp \overline{R}}$$



$$\boxed{\overline{R} = 0; \overline{M}_O = 0}$$

система сил уравновешена.

Теорема: Для равновесия **любой** системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы относительно **любого** центра (точки) были равны нулю.

РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

- Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела, находящегося под действием **произвольной плоской системы сил** в векторной форме имеют вид

$$\boxed{\overline{R} = 0; \overline{M}_O = O}$$

- Из этих *векторных* уравнений следуют ***три формы аналитических условий равновесия.***

Основная форма условий равновесия

- для сил, лежащих в плоскости *ОХУ*:

$$\boxed{\sum F_{kX} = 0; \sum \ F_{kY} = 0; \sum m_O(\overline{F}_k) = 0.}$$

- Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на каждую из координатных осей и сумма моментов сил относительно ***любой точки,*** лежащей в плоскости действия сил, были равны нулю.

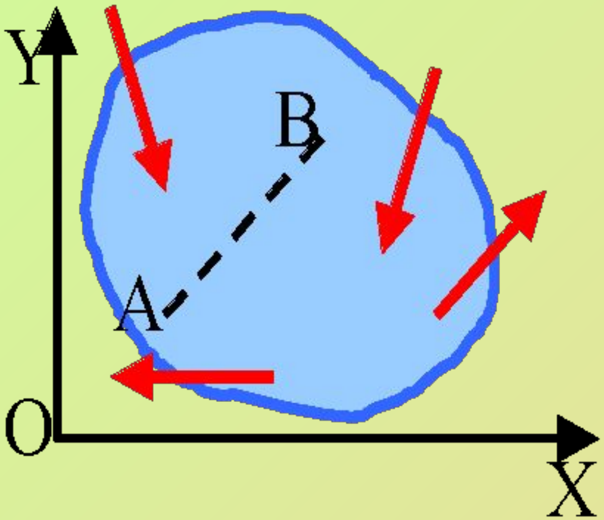
Вторая форма условий равновесия:

$$\sum F_{kX}=0;\ \sum m_A(\overline{F}_k)=0;\ \sum m_B(\overline{F}_k)=0,$$
$$OX\ не \perp AB.$$

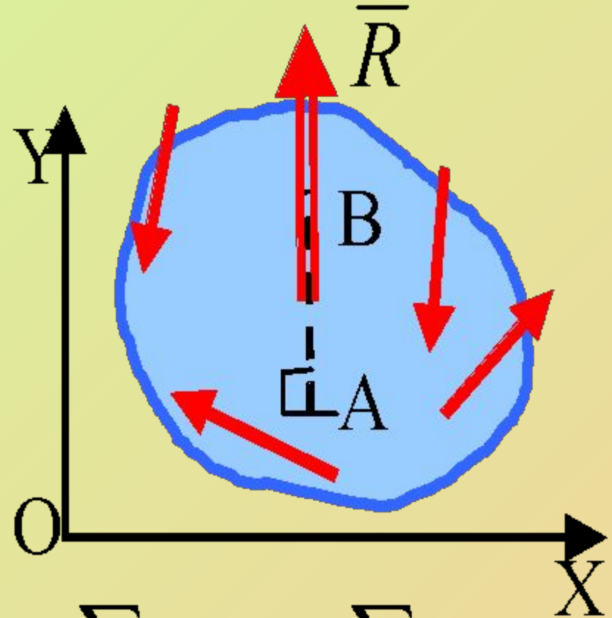
- Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно двух точек *A* и *B* и сумма их проекций на ось *OX*,

  не перпендикулярную прямой *AB*, были равны нулю.

AB не $\perp OX$



$AB \perp OX$



$$\sum m_A = 0;\ \sum m_B = 0;\ \sum F_X = 0,$$

но $\overline{R} \neq 0$, *система не уравновешена*!

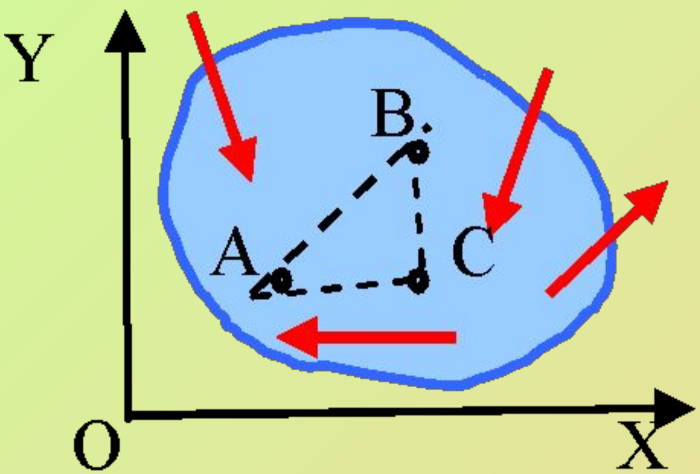
Третья форма условий равновесия

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \sum m_B(\overline{F}_k) = 0; \sum m_C(\overline{F}_k) = 0,$$

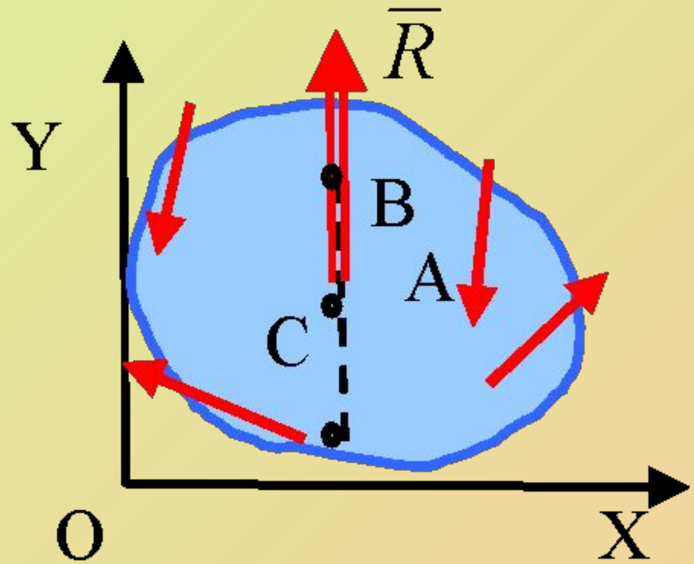
точки A, B, C не лежат на одной прямой.

- Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно любых трех точек *A*, *B* и *C*, ***не лежащих на одной прямой,*** были равны нулю.

A, B, C *не лежат на одной прямой*



A, B, C *лежат на одной прямой*



$$\sum m_A = 0; \sum m_B = 0; \sum m_C = 0,$$

но $\overline{R} \neq 0$, *система не уравновешена*!

- ***Для проверки решения задачи*** на равновесие плоской системы сил составляют сумму моментов всех сил относительно других точек или строят в масштабе многоугольник всех сил, действующих на тело. Если проверочное уравнение обращается в тождество, а многоугольник сил замкнут, то задача решена верно.