



Математика ППИ

Лекция 11.

Неопределённый интеграл, его свойства .
Непосредственное интегрирование. Метод
замены переменной в неопределённом
интеграле. Интегрирование функций,
содержащих квадратный трёхчлен



Математика ППИ

Лекция 11.

Неопределённый интеграл . Методы интегрирования: замена переменной.

Цели и задачи:

- **Дать понятие первообразной и неопределенного интеграла.**
- **Изучить основные свойства интеграла.**

Цели и задачи:

- **Изучить основные методы интегрирования:
интегрирование методом замены переменной, по частям.**

Вопросы лекции

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Основные свойства неопределённого интегра.
3. Интегрирование разложением, внесением под знак дифференциала.
4. Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

ЛИТЕРАТУРА

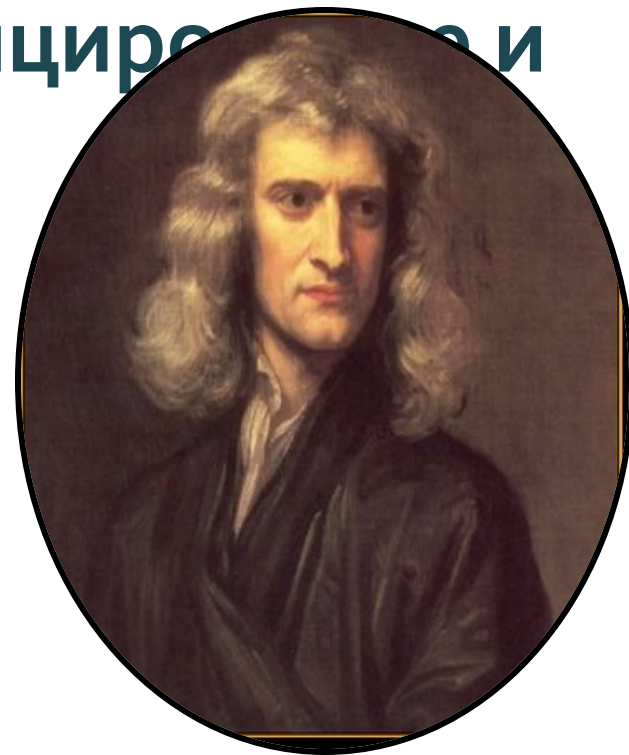
- [1] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2004. с. 340-375;
- [3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004.. с. 229-275;

- ***Интеграл*** (от лат. integer — целый), одно из важнейших понятий математики. Оно возникло в связи с потребностью, с одной стороны, отыскивать функции по их производным.
- Например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки.

- А с другой — измерять площади, объёмы, длины дуг, работу сил за определённый промежуток времени и т. п. В соответствии с этим различают **неопределённые** и **определённые** интегралы, вычисление которых является задачей ***интегрального исчисления***.

- **Немецкий учёный Г. Лейбниц** одновременно с английским учёным **И. Ньютоном** и независимо от него открыл основные принципы дифференциального и интегрального исчисления в 80-х годах XVII века.

- Теория приобрела силу после того, как Лейбницем и Ньютоном было доказано, что дифференцирование и интегрирование – взаимно обратные операции.



Исаак НЬЮТОН
(1643 – 1727)



**Лейбниц
Готфрид
Вильгельм
(1646-1716)**

**Символ \int
введен
Лейбницем (1675
г.). Этот знак
является
изменением
латинской
буквы S (первой
буквы слова
summa).**

Работы **Коши** и **Вейерштрасса**
подвели итог многовековому
развитию интегрального
исчисления.



Огюстен Луи Коши
(1789 – 1857)



Карл Теодор Вильгельм
Вейерштрасс (1815 -1897)

Работы **Коши** и **Вейерштрасса**
подвели итог многовековому
развитию интегрального
исчисления.



Огюстен Луи Коши
(1789 – 1857)



Карл Теодор Вильгельм
Вейерштрасс (1815 -1897)

Учебный вопрос.

- **Первообразная и неопределенный интеграл.**

Первообразная и неопределённый интеграл.

- **Определение.** Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

- **Пример.** Найти первообразную от функции
$$f(x) = x^2$$

Из определения первообразной следует, что

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \quad . \quad \text{Действительно,}$$
$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} \right)' = \frac{1}{3} (x^3)' = \frac{1}{3} (3x^2) = x^2$$

- **Замечание.** Задача отыскания функции по заданной производной этой функции решается, например, в инерциальных системах счисления пути самолёта. В них с помощью акселерометров определяются ускорения движения самолёта. По ускорениям вычисляются скорости, а по скоростям – пройденный самолётом путь с указанием его текущих координат.
- **Замечание.** Легко видеть, что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то эта первообразная не является единственной.

- **Пример.**


Рассмотрим функцию

$f(x) = x^2$ и найдём её первообразные.

- **Решение. Первообразные**

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1 \quad F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$$

- **Теорема.** Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то любая первообразная для $f(x)$ имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

- **Доказательство.** В силу определения первообразной : $F'(x)=f(x)$. Пусть $\Phi(x)$ – другая первообразная, тогда $\Phi'(x)=f(x)$. Рассмотрим функцию 

Найдём

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = \\ &= f(x) - f(x) = 0\end{aligned}$$

Таким образом, производная равная нулю. Такое возможно лишь если $\varphi(x) = C$

Следовательно, $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x) = C$

откуда $F(x) = \Phi(x) + C$



Определение. Совокупность всех первообразных $F(x) = \Phi(x) + C$ для функции $f(x)$ на некотором интервале называется **неопределённым интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$
где \int - знак интеграла,
 $f(x) dx$ - подынтегральное выражение,
 $f(x)$ - подынтегральная функция.

● **Пример.** $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$

Проверим результат:

$$(\sin x + C)' = \cos$$

- Отыскание всех первообразных для данной функции или одной из них называется **интегрированием**.
- **Интегрирование** – есть действие, обратное дифференцированию. С геометрической точки зрения неопределённый интеграл представляет совокупность (семейство) **интегральных кривых**.

- Естественно возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существуют первообразные, а значит и неопределённый интеграл?

На этот вопрос отвечает теорема существования неопределённого интеграла, которую мы примем без доказательства.

- **Теорема.** Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, то для неё на этом интервале существует первообразная, то есть неопределённый интеграл.

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС,

- **Основные свойства
неопределённого интеграла.**

Основные свойства неопределённого интеграла.

- 1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: если $F'(x) = f(x)$,

то

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

- 2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

- 3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции, плюс произвольная постоянная

$$\int \mathcal{E}(F(x)) = F(x) +$$

Справедливость последующего равенства легко проверить дифференцированием (дифференциалы от обеих частей равенства равны

$$d(F(x))$$

- 4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \\ = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

- 5. Числовой множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$$

6. Свойство инвариантности (постоянства) формул интегрирования.

● Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции,

● т.е., если

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int \mathcal{F}(u) du = F(u) +$$

Доказательство.

Возьмём функцию $F(u) = F(\varphi(x))$;
для её дифференциала в силу теоремы об
инвариантности вида первого
дифференциала имеем:

$$d(F(u)) = F'(u)du = f(u)du$$

отсюда

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$$



7.

$$\int f(kx \pm b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx \pm b) + C$$

Установить соответствие между функциями и первообразными.

1. $f(x) = x^n$

2. $f(x) = C$

3. $f(x) = \sin x$

4. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

5. $f(x) = \cos x$

6. $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

а. $F(x) = Cx + C_1$

б. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

в. $F(x) = \operatorname{tg} x + C$

г. $F(x) = \sin x + C$

д. $F(x) = \operatorname{ctg} x + C$

е. $F(x) = -\cos x + C$

Таблица основных интегралов (через $u(x)$!)

$$1. \int u^\alpha dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$3. \int \sin u dx = -\cos u + C$$

$$4. \int \cos u dx = \sin u + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

6.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 u} = -ctgu + C$$

7.

$$\int tgudu = -\ln |\cos u| + C$$

8.

$$\int ctgudu = \ln |\sin u| + C$$

9.

$$\int e^u du = e^u + C$$

10.

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

11.
$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

12.
$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

13.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

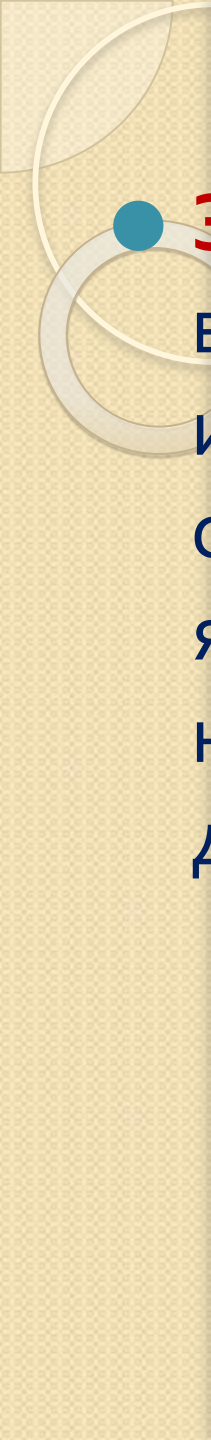
14.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

15.

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

16.

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$



● **Замечание.** Таблица основных интегралов в силу свойства инвариантности формул интегрирования оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией от неё.

● **Пример.**

$$\int \sin(5x) dx = \int \sin(5x) \frac{5}{5} dx = \int \sin(5x) \frac{1}{5} d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5} \int \sin(5x) d(5x) = \left| \begin{array}{l} 5x = t \\ d(5x) = dt \end{array} \right| = \frac{1}{5} \int \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{5} \cos t + C = -\frac{1}{5} \cos(5x) + C$$

Пример

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + x^3 - 3\sqrt{x} \right) dx$$



$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$



$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$



$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

Найти интегралы для функций:

1) $f(x) = 10x$

$$F(x) = 5x^2 + C$$

2) $f(x) = 3x^2$

$$F(x) = x^3 + C$$

3) $f(x) = \sin x + 5$

$$F(x) = -\cos x + 5x + C$$

4) $f(x) = 5\cos x$

$$F(x) = 5\sin x + C$$

5) $f(x) = 6x^2$

$$F(x) = 2x^3 + C$$

6) $f(x) = 3 - 2x$

$$F(x) = 3x - x^2 + C$$

Верно ли что:

а)

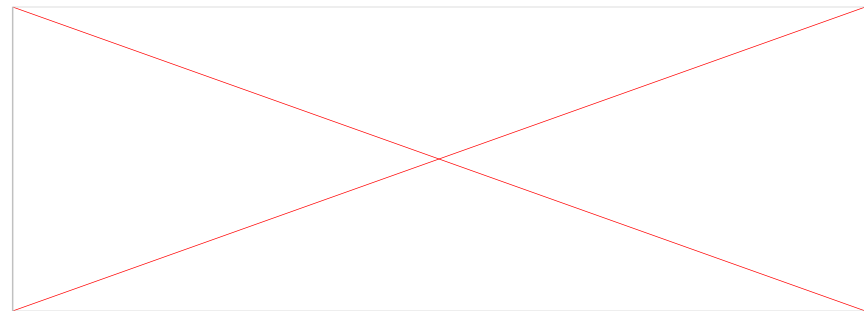
$$\int x^5 dx = 5x^4 + C$$

в)

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

б)

$$\int 3x^2 dx = 6x + C$$



УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

**Интегрирование
разложением, внесением
под знак дифференциала.**

Непосредственное интегрирование -

вычисление интеграла с помощью

- его свойств,**
- тождественных преобразований подынтегральной функции,**
- таблицы основных интегралов.**

Использование при этом свойства линейности неопределённого интеграла называется *методом разложения* вычисления интеграла.

Таблица основных интегралов в силу свойства инвариантности формул интегрирования оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией.

Например,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 5x} = \frac{1}{5} \int \frac{5dx}{\sin^2 5x} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x)}{\sin^2 5x} = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x + C$$

Найти интеграл $\int \frac{2x^3 - xe^x - 4}{x} dx.$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - xe^x - 4}{x} dx &= \int \left(2x^2 - e^x - \frac{4}{x} \right) dx = \\ &= 2 \int x^2 dx - \int e^x dx - 4 \int \frac{dx}{x} = \frac{2}{3} x^3 - e^x - 4 \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Интегрирование внесением под знак дифференциала.

Известно, что дифференциал функции равен произведению производной этой функции и дифференциала её аргумента:

$$\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$$

Переход в этом равенстве слева направо называют *подведением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала.*

Таблица дифференциалов

$$d(x^n) = nx^{n-1} dx,$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx,$$

$$d(e^x) = e^x dx,$$

$$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a},$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x},$$

$$d(\sin x) = \cos x dx,$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx,$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$\left. \begin{array}{l} d(\arcsin x) \\ -d(\arccos x) \end{array} \right\} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left. \begin{array}{l} d(\operatorname{arctg} x) \\ -d(\operatorname{arcctg} x) \end{array} \right\} = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Подводя в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем используя свойство инвариантности формул интегрирования, получим

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C,$$

если $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Метод интегрирования введением под знак дифференциала используется для интегрирования сложных функций:

- аргумент сложной функции записывается под знак дифференциала;**
- затем необходимо разделить подынтегральное выражение на производную этого аргумента.**

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(2x-3)^5} &= \int (2x-3)^{-5} dx = \int \frac{(2x-3)^{-5} d(2x-3)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \int (2x-3)^{-5} d(2x-3).\end{aligned}$$

Здесь подынтегральное выражение разделено на 2, так как $d(2x-3) = 2dx$,

$$dx = \frac{d(2x-3)}{2}.$$

Теперь используем свойство инвариантности и применим формулу 1 таблицы относительно переменной интегрирования $2x - 3$.

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{-4}}{-4} + C = C - \frac{1}{8(2x-3)^4}.$$

Таким образом,

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{ax+b}{a}\right) + C, \text{ где } F(x) = \int f(x) dx.$$

Примеры.

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

Внести функции под знак дифференциала

1. $f(x) = x^n$

2. $f(x) = C$

3. $f(x) = \sin x$

4. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

5. $f(x) = \cos x$

6. $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

1. $F(x) = Cx + C_1$

2. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $F(x) = \operatorname{tg} x + C$

4. $F(x) = \sin x + C$

5. $F(x) = \operatorname{ctg} x + C$

6. $F(x) = -\cos x + C$

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

**Метод замены переменной в
неопределенном интеграле.
Интегрирование функций,
содержащих квадратный трехчлен.**

Замена переменной или подстановка.

Метод заключается во введении новой переменной интегрирования.

При этом интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки).

Общих методов подбора подстановок не существует.

Введём в интеграле $\int f(x)dx$ новую переменную t , положив $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывная, дифференцируемая функция. Тогда $dx=\varphi'(t) dt$ и справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Это формула замены переменной или метода подстановки. После этого получим новый интеграл, который проще приводится к табличному.

Доказательство.

Находим производную от левой части равенства

$$\left(\int f(x) dx \right)'_x = f(x)$$

Правую часть равенства будем дифференцировать по x как сложную функцию, где t – промежуточный аргумент, при этом

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{и по правилу}$$

дифференцирования обратной функции

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_x &= \left(\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= f(\varphi(t)) \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x) \end{aligned}$$

Следовательно, производные по x от правой и левой частей равенства равны, что и требовалось доказать. ▲

Замечание 1. После интегрирования в правой части равенства вместо t необходимо подставить его выражение через x на основании равенства $x=\varphi(t)$.

Замечание 2. При замене переменной функцию $x=\varphi(t)$ надо подбирать так, чтобы новый интеграл стал проще.

Замечание 3. При интегрировании иногда целесообразно подбирать замену переменной не в виде $x=\varphi(t)$, а в виде $t=\psi(x)$.

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int \frac{1}{x^2} dx$$

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

Найти интеграл $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.

Решение.

Выделяем полный квадрат из подкоренного выражения.

$$\begin{aligned}8-2x-x^2 &= -(x^2+2x-8) = -(x^2+2x+1-9) = \\ &= -[(x+1)^2-9] = 9-(x+1)^2.\end{aligned}$$

Теперь сделаем замену переменной $x+1=t$. $dx=dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} &= \int \frac{t-1-3}{\sqrt{9-t^2}} dt = \int \frac{t-4}{\sqrt{9-t^2}} dt = \\ &= \int \frac{tdt}{\sqrt{9-t^2}} - 4 \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(9-t^2)}{\sqrt{9-t^2}} - 4 \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{9-t^2} - 4 \arcsin \frac{t}{3} + C.\end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной и учитывая, что $9 - t^2 = 8 - 2x - x^2$, полу-

чим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 2x - x^2}} = -\sqrt{8 - 2x - x^2} - 4 \arcsin \frac{x+1}{3} + C.$$

Задание на самостоятельную работу

- [1] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2004, с. 340-375.
- [3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004, с. 229-250.
- **Выучить таблицу основных интегралов.**



Математика ППИ

Лекция 12.

**Метод интегрирования по частям в
неопределенном интеграле. Интегрирование
тригонометрических функций**

Вопросы лекции

- 1. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.**
- 2. Интегрирование тригонометрических функций.**

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

Интегрирование по частям.

Одной из причин сложности операции интегрирования является отсутствие формулы интегрирования произведения функций.

Есть метод интегрирования произведения некоторых классов функций, который называется *методом интегрирования по частям*.

Выведем формулу интегрирования по частям.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ –
дифференцируемые функции и

$$d(u \cdot v) = u dv + v du$$

Отсюда, интегрируя последнее
равенство, получаем:

$$u \cdot v = \int u dv + \int v du$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du$$

формулой интегрирования по частям.

Успех формулы интегрирования по частям зависит от умения правильно разбить подынтегральное выражение на множители u и dv .

Как правило, за u выбирается функция, которая при дифференцировании упрощается.

Иногда необходимо применять интегрирование по частям последовательно несколько раз.

Укажем некоторые часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

I. Интегралы вида:

$$\int P(x) \ln x dx, \quad \int P(x) \log_a x dx, \quad \int P(x) \arcsin x dx, \quad \int P(x) \arccos x dx,$$
$$\int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \quad \int P(x) \operatorname{arcctg} x dx,$$

где $P(x)$ – многочлен.

Во всех случаях за u при интегрировании по частям применяют функцию, являющуюся множителем после $P(x)$.

$$\int P(x)e^{kx} dx, \quad \int P(x)a^{kx} dx, \quad \int P(x)\sin kx dx, \quad \int P(x)\cos kx dx,$$

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx$$

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

Решение.
(опечатка
в du)

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

Контрольные вопросы:

- 1. В чем заключается метод непосредственного интегрирования ?
- 2. В чем заключается метод интегрирования заменой?
- 3. В чем заключается метод интегрирования по частям?