Точечные и интервальные оценки неизвестных параметров распределения

Выборочным средним выборки объема *n* со статистическим рядом

x_i	x_1	x_2	…	x_n
n_i	n_1	n_2	…	n_k

называется число

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i$$

Таким образом, выборочное среднее – это среднее арифметическое значение выборки.

Задача 1

Дана выборка: 2,3,3,5,2. Найти $\overline{x}_в$

(выбери верный ответ)

15	5	3

Выборочной дисперсией $Д_в$ выборки объема *n* со статистическим рядом

x_i	x_1	x_2	…	x_n
n_i	n_1	n_2	…	n_k

называется число

$$Д_в = \frac{1}{n} \cdot \sum n_i \cdot (x_i - \overline{x_в})^2$$

Таким образом, выборочная дисперсия – это среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x_в}$.

Квадратный корень из выборочной дисперсии называется **выборочным средним квадратичным отклонением** величины *x*

$$\sigma_в = \sqrt{Д_в}$$

Задача 2

Дана выборка: 2,3,3,5,2. ($\overline{x_в} = 3$)

Найти $Д_в$

(выбери верный ответ)

1,2

6

16

В статистике при малых n наряду с выборочной дисперсией используется другая важная числовая характеристика выборки: исправленная дисперсия

$$S_{в}^{2} = \frac{n}{n-1} \cdot Д_{в}$$

Квадратный корень из исправленной выборочной дисперсии называется **исправленным средним квадратичным отклонением**

$$S_{в} = \sqrt{S_{в}^{2}}$$

Задача 3

Дана выборка: 2,3,3,5,2. ($Д_в$ =1,2)

Найти $S^2_в$

(выбери верный ответ)

6	1,5	1,2

ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА

– оценка, имеющая конкретное числовое значение. Например, среднее арифметическое:

$$\mathbf{X = (x_1+x_2+...+x_n)/n}$$

X - среднее арифметическое (точечная оценка **МО**);

$\mathbf{x_1,x_2,...x_n}$ - выборочные значения; **n** - объем выборки.

ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА

Точечные оценки указывают точку на числовой прямой, являющуюся приближенным значением неизвестного параметра.

С возрастанием **n** (то есть для больших выборок) возрастает точность приближений

$$M(x) \approx \overline{x_{в}} \qquad Д(x) \approx S_{в}^{2}$$

Критерии точечных оценок:

Несмещенность оценки означает, что математическое ожидание точечной оценки равно значению оцениваемого параметра генеральной совокупности.

Эффективность оценки означает, что статистика, используемая в качестве точечной оценки параметра генеральной совокупности, имеет минимальную стандартную ошибку.

Критерии точечных оценок:

Состоятельность оценки означает, что по мере увеличения объема выборки значение точечной оценки приближается к значению оцениваемого параметра генеральной совокупности.

Выборочное среднее удовлетворяет всем трем названным критериям и поэтому является наилучшей оценкой для среднего генеральной совокупности.

Оценки неизвестных параметров

$$M(x) \approx \overline{x_в}$$

$$Д(x) \approx Д_в$$

$$Д(x) \approx S_в^2$$

Задача 4

Дана выборка: 2,3,3,5,2. ($\overline{x_в} = 3$, $Д_в$ =1,2)

Оценить значение **М(х)**, **Д(х)** генеральной совокупности по выборке (выбери верный ответ)

М(х)≈0,6
Д(х)≈0,24

М(х)≈3
Д(х)≈1,2

М(х)≈1,2
Д(х)≈3

ДАЛЕЕ

При небольшом числе испытаний эти значения могут значительно отличаться от истинных величин оцениваемых параметров.

По этой причине при небольшом объёме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной оценкой

называется оценка, которая определяется двумя числами – концами интервала.

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА – оценка, представляемая интервалом значений, внутри которого с задаваемой исследователем вероятностью находится истинное значение оцениваемого параметра.

Интервальная оценка

Интервал в интервальной оценке называется **ДОВЕРИТЕЛЬНЫМ ИНТЕРВАЛОМ**,

Задаваемая вероятность называется **ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ.**

В практике статистических вычислений применяются стандартные значения доверительной вероятности :

0,95, 0,98 и 0,99 (95%, 98% и 99% соответственно)γ

Например

интервальная оценка **M(X)** (3;8) при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$.

Это означает, что **M(X)** лежит в пределах от 3 до 8 с вероятностью 0,95, следовательно, вероятность того, что **M(X)** меньше 3 или больше 8 не превышает 0,05.

Чем выше доверительная вероятность, тем выше точность оценки, но шире доверительный интервал.

Отсюда следует - **ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА (ширина доверительного интервала равна 0) СОВПАДЕТ С ЛЮБЫМ ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ИЛИ ОЦЕНИВАЕМЫМ ПАРАМЕТРОМ РАВНА 0.**

Интервальная оценка математического ожидания

- для оценки математического ожидания M(x) случайной величины X служит доверительный интервал:

$$\overline{x_{\text{в}}} - \varepsilon < \text{M(x)} < \overline{x_{\text{в}}} + \varepsilon$$

ε – точность оценки

Число степеней свободы

– это количество значений, которые могут свободно изменяться после того, как по выборке было вычислено значение статистики.

Число степеней свободы t-распределения при построении доверительного интервала для среднего равно: $n – 1$.

Тест

1. Укажите значение вероятности того, что среднее арифметическое непрерывной случайной величины совпадает с математическим ожиданием

- **1**
- **0,5**
- **0**

Тест

2. Укажите вероятность того, что точечная оценка параметра непрерывной случайной величины совпадает с истинным значением параметра

- **0**
- **0,5**
- **1**

Тест

3. По результатам выборки построена интервальная оценка параметра непрерывной случайной величины. Как изменится доверительный интервал при увеличении доверительной вероятности?

- **Уменьшится**
- **Увеличится**
- **Останется прежним**

Тест

4. По результатам выборки построены три интервальные оценки с доверительными вероятностями 0,95, 0,98, 0,99. Укажите, какая из приведенных ниже интервальных оценок соответствует доверительной вероятности 0,95

- **(5,10)**
- **(6,9)**
- **(4,11)**

Тест

5. Укажите число степеней свободы для среднего арифметического, вычисленного по выборке объемом 10.

- **9**
- **11**
- **10**

Тест

6. Укажите число степеней свободы для точечной оценки дисперсии, вычисленной по выборке объемом 15 наблюдений

- **15**
- **14**
- **16**

Первый случай:
σ известно или n ≥ 30

- для оценки математического ожидания M(x) случайной величины X служит доверительный интервал:

$$\overline{x_в} - \varepsilon < \mathrm{M(x)} < \overline{x_в} + \varepsilon$$

ε –

γ – коэффициент доверия

$2\Phi(t_\gamma) = \gamma$

$\Phi(x)$- функция Лапласа

Если **σ неизвестно,** заменим его **на s**

$$\overline{x_{\text{в}}} - t_{\gamma}\frac{S_{\text{в}}}{\sqrt{n}} < M(X) < \overline{x_{\text{в}}} + t_{\gamma}\frac{S_{\text{в}}}{\sqrt{n}}$$

$$\varepsilon = t_{\gamma}\frac{S_{\text{в}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{x_{\text{в}}} - \varepsilon < M(X) < \overline{x_{\text{в}}} + \varepsilon$$

Задача 5

- Для оценки математического ожидания M(x) случайной величины X служит доверительный интервал:

$$\overline{x} - \varepsilon < M(x) < \overline{x} + \varepsilon$$

Объём выборки	Доверительная вероятность					
n	**0.9**	**0.95**	**0.98**	**0.99**	**0.998**	**0.999**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59

Задача 5

- для оценки математического ожидания M(x) случайной величины X служит доверительный интервал:

$$\overline{x_{\text{в}}} - \varepsilon < \mathrm{M(x)} < \overline{x_{\text{в}}} + \varepsilon$$

1,83 ...ость

4,3

5,21

Задача 5

Доверительный интервал

(11,4;28,6)	(17,1;22,9)	(8;32)