ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теория графов — *это раздел математики, включающий в себя систему терминов и обозначений, которые позволяют сравнительно просто описывать сложные процессы и явления.*

Началом возникновения теории графов явилась ***задача о кенигсбергских мостах***, которую решил Л. Эйлер. Задача заключалась в том, чтобы пройти по семи мостам только один раз и вернуться в исходную часть города.

Графом $G = (X,U)$ называется совокупность двух множеств: непустого множества X (вершин) и множества U (ребер), т.е.

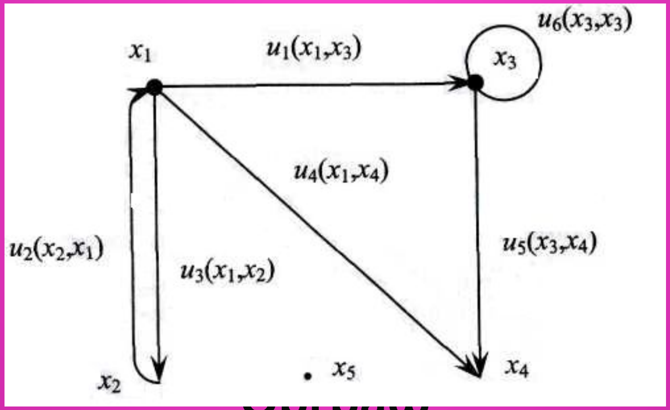
$$G(X,U) = \{X,U\},\ X \neq 0,\ U = \{u_k\},\ k = \overline{1,n}.$$

Каждая дуга соединяет две вершины графа, одна из которых является начальной, другая конечной и направлена от первой вершины ко второй. Обозначают дуги:

$$U_1 = (x_1, x_2),\ U_1 \text{ или } (x_1, x_2).$$

Обычно граф изображают диаграммой: вершины — точками или кружочками, а ребра — линиями.

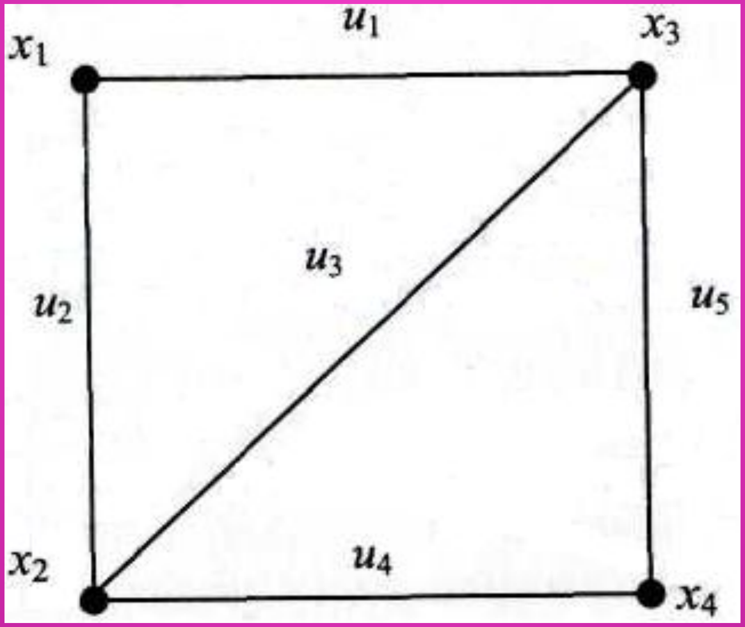
Если ребра графа ориентированы, т.е. показаны стрелкой от вершины к вершине, то они называются дугами, а такой граф называется ориентированным или орграфом.



Орграф

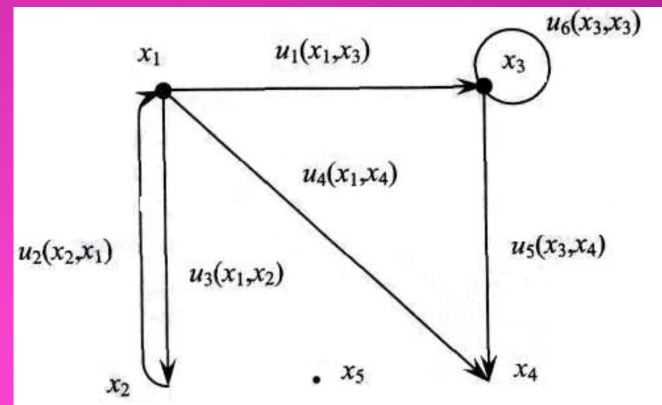
Для орграфа на рис. Соответствие $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3, x_4\}$, т.е. вершины x_2, x_3, x_4 являются конечными вершинами дуг, у которых начальной вершиной будет x_1

Если ребра не имеют ориентации, то граф называется неориентированным или неографом.



Неограф

- **Примеры.**
- $\Gamma(x_2) = \{ x_1, x_3\}$



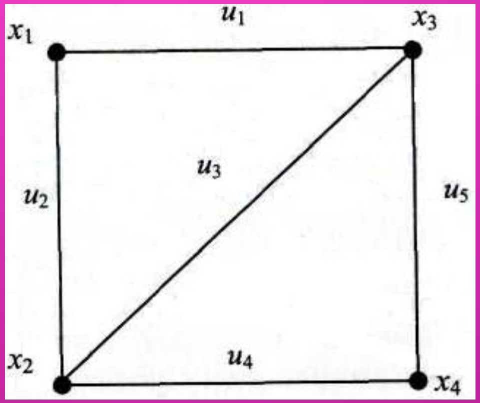
- $\boldsymbol{\Gamma (x_5) = \varnothing,}$ — пустое множество;
- $\Gamma(x_3) = \{x_4, x_3\}$

В случае неографа, предполагается, что соответствие ***Г*** задает такой ориентированный граф, который получается из исходного графа заменой:

каждого ребра двумя противоположно направленными дугами, соединяющими те же вершины.

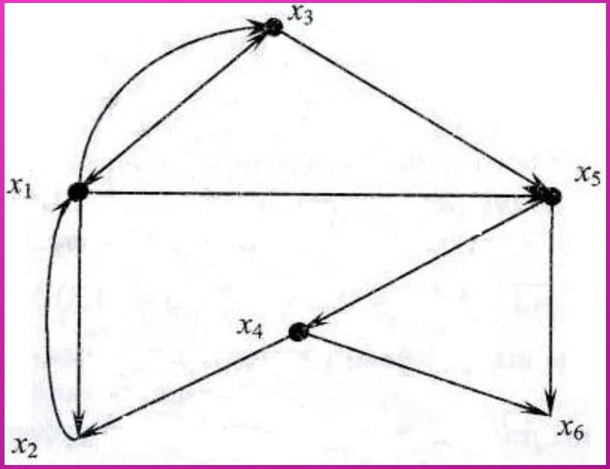
Например, для неографа, приведенного на рис.

$Г(x_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ и т.д.

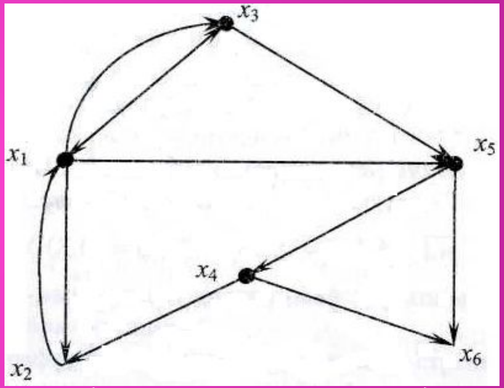


- Так как $Г(x_i)$ представляет множество вершин $x_к \xi X$, для которых в G существует дуга $(x_к, x_i)$, то через $Г^{-1}(x_i)$ обозначают множество вершин $x_к$ для которых в графе существует дуга $(x_к, x_i)$, и называют обратным соответствием. Например, для орграфа G, рис.

$$\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_2, x_3\},$$
$$\Gamma^{-1}(x_2) = \{x_1, x_4\},$$
$$\Gamma^{-1}(x_6) = \{x_4, x_5\}.$$

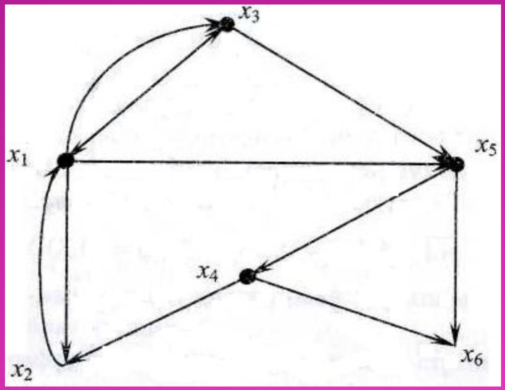


- Если отображение $\Gamma(x_i)$ распространяется не на одну вершину, а на множество вершин $X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, то под $\Gamma(x_m)$ понимают объединение $\Gamma(x_1) \cup \Gamma(x_2) \cup \ldots \cup \Gamma(x_m)$
- Например, для орграфа



- соответствиями будут
- $\Gamma(\{x_2, x_3\}) = \{x_1\ x_5\}$, $\Gamma(\{x_1, x_4\}) = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$.
- Отображение $\Gamma(\Gamma(x_i))$ записывают $\Gamma^2(x_i)$.
- Тройное отображение $\Gamma(\Gamma(\Gamma(x_i)))$ записывают $\Gamma^3(x_i)$ и т.д.

Для орграфа,



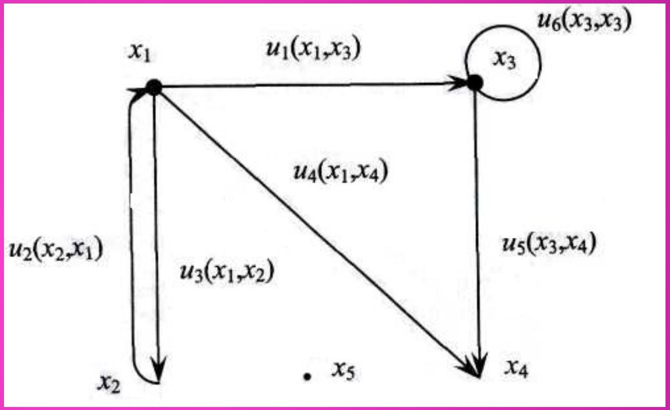
запишем

$$\Gamma^2(x_1) = \Gamma(\Gamma(x_i)) = \Gamma(\{x_2, x_3, x_5\}) = \{x_1, x_4, x_5, x_6\},$$
$$\Gamma^3(x_1) = \Gamma(\Gamma^2(x_1)) = \Gamma(\{x_1, x_4, x_5, x_6\}) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

С каждой вершиной графа связаны два множества (соответствия $\Gamma^+(x_i)$ и $\Gamma^-(x_i)$). $\Gamma^+(x)$ — множество тех смежных с x_i - вершин, в которые заходят дуги из x_i.

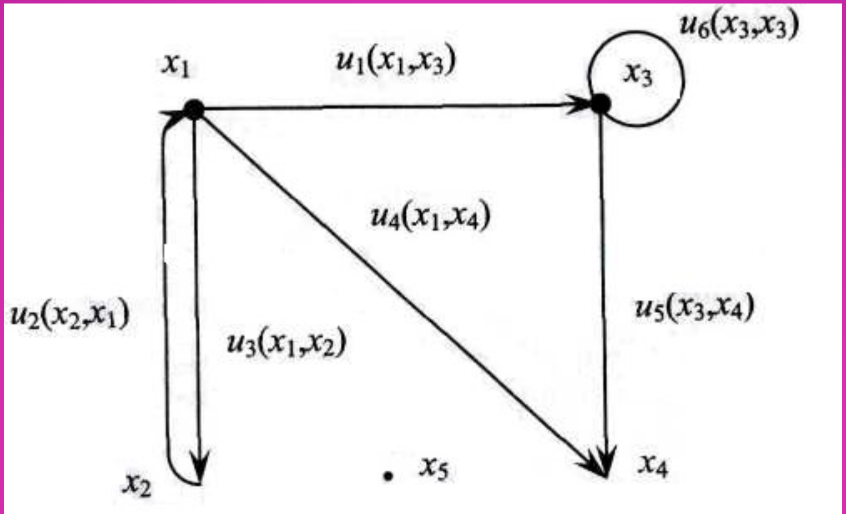
$\Gamma^-(x_i)$— множество таких вершин смежных с x_i, из которых выходят дуги, заканчивающиеся в x_i.

- Вершины x_i и $x_к$ называются **смежными**, если существует дуга (ребро) $U(x_i,x_к)$ соединяющая их. Например, (x_1,x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), вершины x_2 и x_3 не являются смежными, рис.



- Если вершины x_i и $x_к$ являются концами дуги $U(x_i,x_к)$, то говорят, что эти вершины **инцидентны дуге** U (или дуга U инцидентна вершинам $x_i,x_к$).

- **Степенью или валентностью вершины** графа называется количество инцидентных ей дуг (ребер) и обозначается $d(x_i) = Г(x_i)$. Например, $d(x_1) = 4$, $d(x_2) = 2$



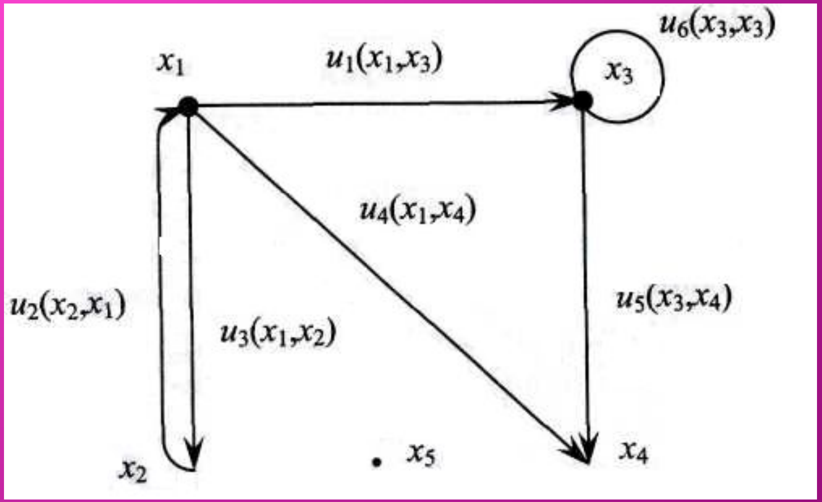
- Вершина, степень которой равна нулю, называется **изолированной** $d(x_5) = 0$.
- Число дуг орграфа, которые имеют вершину x_i своей начальной вершиной называется **полустепенью исхода** и обозначается $d^+(x_i)$.

- Аналогично, количество дуг орграфа, которые имеют вершину $x_к$ конечной вершиной, называется **полустепенью захода** и обозначается $d^-(x_i)$.
- Например, $d^+(x_1) = 3$,

$d^+(x_2) = 1$,

$d^-(x_1) = 1$,

$d^-(x_4) = 2$.



- **Теорема Эйлера**. *Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству дуг (ребер):*

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2m,$$

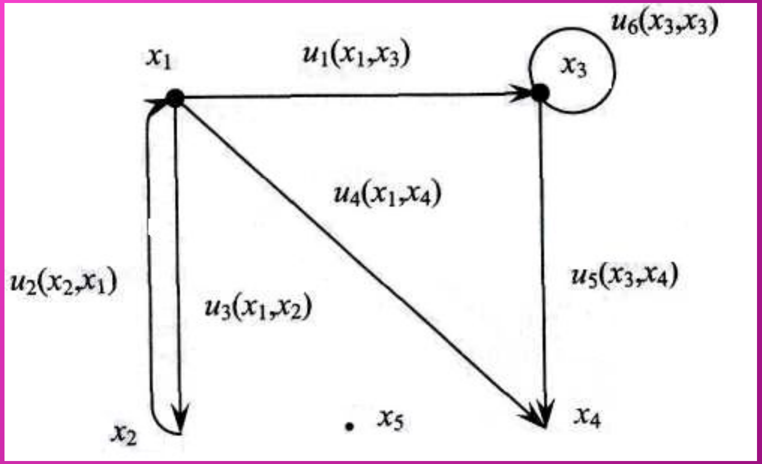
где n — число вершин графа, m — число дуг.

- ***Следствие 1***. Число вершин нечетной степени всегда четно.
- ***Следствие 2***. Сумма полустепеней вершин орграфа равна удвоенному числу дуг:

$$\sum_{i=1}^{n} d^{+}(x_i) + \sum_{i=1}^{n} d^{-}(x_i) = 2m.$$

Путем (или ориентированным маршрутом) орграфа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина любой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей. Например, пути из вершины x_1 в вершину x_4 орграфа

$$P_1=\{u_1,u_5\},$$
$$P_2=\{u_3,u_2,u_1,u_5\},$$
$$P_3=\{u_1,u_6,u_5\},$$
$$P_4=\{u_4\}.$$



- **Ориентированной цепью (орцепью)** или ***простым путем*** называется такой путь, в котором каждая дуга используется не более одного раза.
- **Простой орцепью** *(элементарным путем)* называется путь, в котором каждая вершина графа применяется не более одного раза.

- **Маршрут** — это неориентированный «двойник» пути, и это понятие рассматривается в тех случаях, когда можно пренебречь направленностью дуг в орграфе.
- **Маршрутом** называется последовательность ребер $u_1, u_2, \dots, u_n$, в которой каждое ребро u_i, за исключением, возможно, первого и последнего ребер, связано с ребрами u_{i-1} и u_{i+1} своими двумя концевыми вершинами.

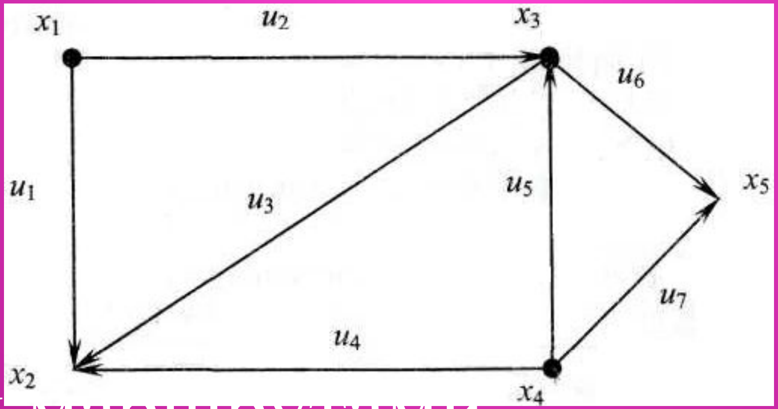
Последовательность дуг

$$M_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_3, \bar{u}_5, \bar{u}_7\},$$

$$M_2 = \{\bar{u}_2, \bar{u}_5, \bar{u}_4, \bar{u}_3, \bar{u}_6\},$$

$$M_3 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_7\}.$$

в орграфе

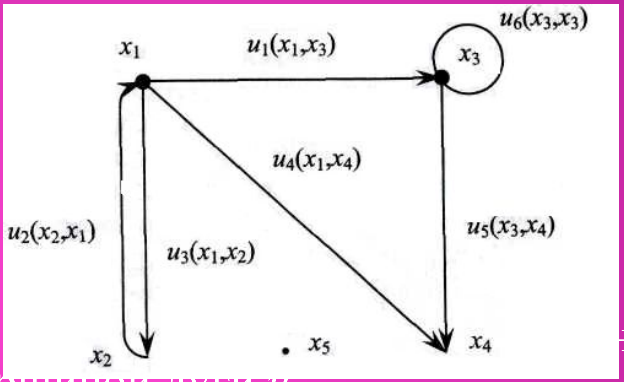


, являются маршрутами.

Черта над дугой *указывает* ***исключение ориентации дуг***, т.е. дуги рассматриваются как ребра.

Маршруты различают простые и цепи (ребро в таком маршруте используется только один раз) и элементарные или простые цепи, в которых вершина встречается только один раз.

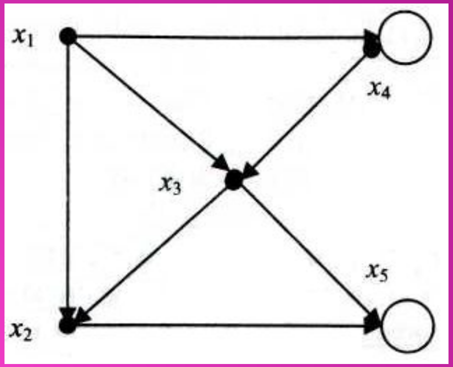
Петлей называется дуга графа, у которой начальная и конечные вершины совпадают $u_6(x_3,x_2)$



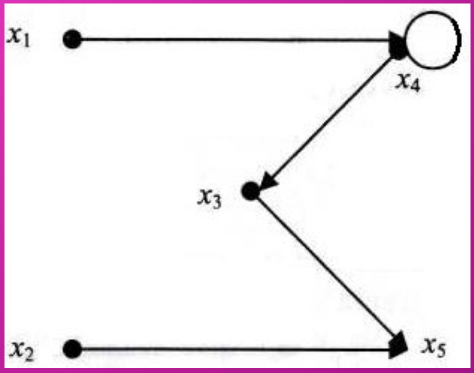
- Путь u_1, u_2,, u_3, ..., u_n называется … ная вершина дуги u_n совпадает с начальной вершиной дуги u_1
- Замкнутые пути в орграфах называются **контурами.**
- Замкнутые маршруты (цепи) в неографах называются **циклами.**
- Если дугам орграфа *G* ставится в соответствие какое-либо число, то говорят, что дуга имеет пропускную способность, величина которой — расстояние между вершинами или время прохождения точки, или объем перевозимого и т.д.
- Если дуга $u = (x_i,x_k)$, приписывается число c_{ik}, называемое **пропускной способностью дуги**, а граф *G* называется **графом со взвешанными дугами**.

Разновидности графов

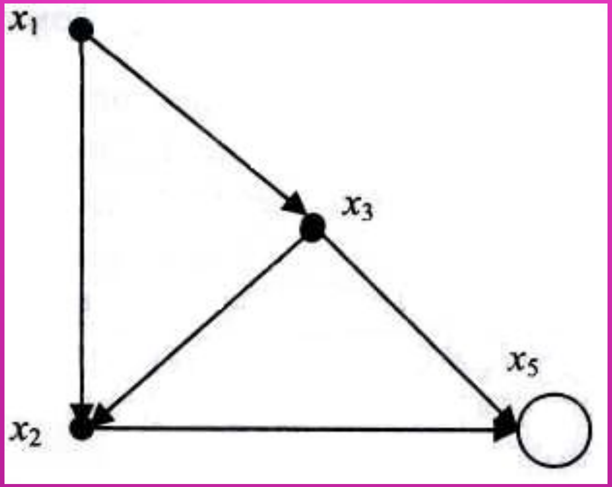
- 1. **Подграфы или суграфы**
- Пусть дан граф $G = (X,U)$



Остовным подграфом G_p графа G называется граф, для которого $X = X$, а $U_p \subset U,$ т.е. остовный граф имеет то же самое множество вершин, но множество дуг подграфа G_p является подмножеством множества дуг исходного графа.



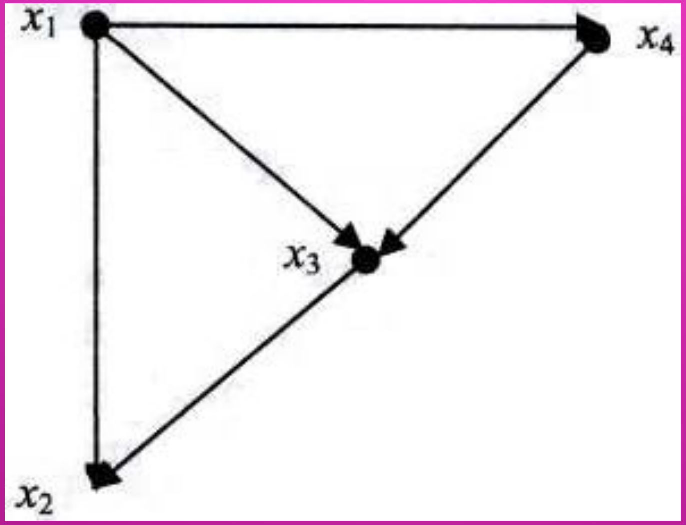
Порожденным подграфом G_t, называется граф $G_t = (X_t, \Gamma_t)$, для которого $X_t \subset X$ и для каждой вершины $x_i \in x_t, \Gamma_t(X_i) = \Gamma(x_i) \cap x_t,$ т.е. порожденный подограф состоит из подмножества вершин X_t множества вершин исходного графа и всех таких дуг графа *G*, у которых конечные и начальные вершины принадлежат подмножеству X_t (рис.).



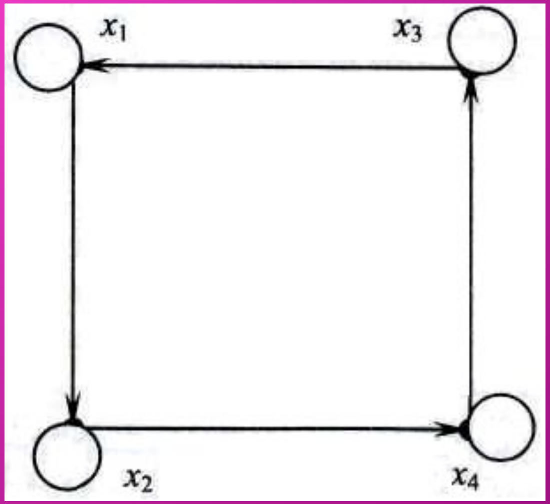
Подграфом $G_n = (X_n, U_n)$ или частичным подграфом $G = (X,U)$ является граф, для которого выполняется условие

$$X_n \subset X \text{ и } U_n \subset U, \text{ т.е. } G_n \subset G$$

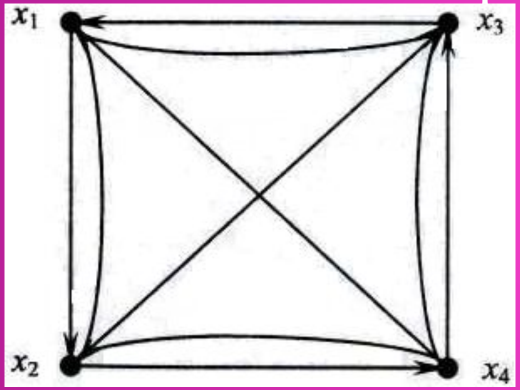
(рис.)



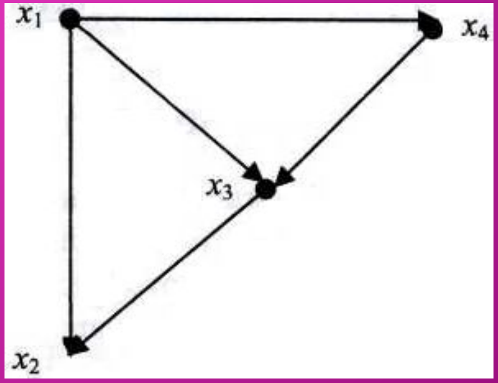
Граф $G = (X,U)$ называется **полным**, если для любой пары вершин существует дуга (ребро). Примером такого графа является любой многоугольник с проведенными в нем всеми диагоналями, а каждая вершина имеет петлю (рис.).



Граф $G = (X,U)$ называется **симметричным** (рис. 10.9), если в множестве дуг U для любой дуги (x_i, x_k) существует также противоположно направленная дуга $(x_к, x_i)$.



В противоположном случае граф называется **ассиметричным** (рис.).

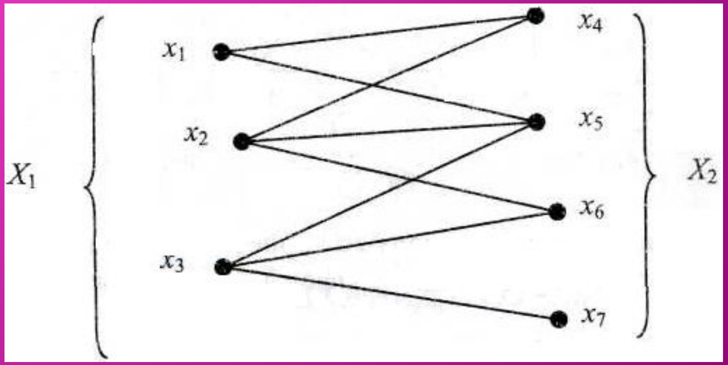


- **Двудольным графом (биграфом** или **четным)** $G = (X,U)$ называется такой граф, у которого множество X вершин разделено на два непересекающихся множества X_1 и X_2, т.е.

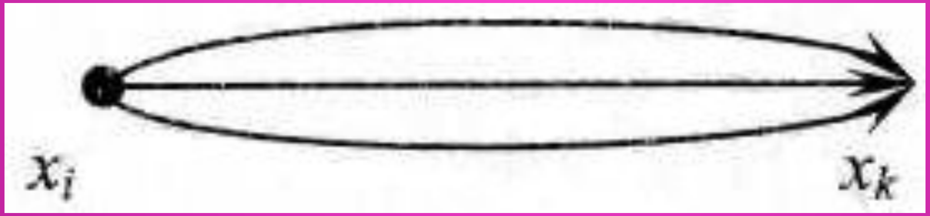
$$X_1 \cup X_2 = X; X_1 \cap X_2 = \varnothing,$$

причем всякое ребро (дуга) из U соединяет вершину из X_1 с вершиной из X_2.

Множества X_1 и X_2 называются **долями** такого графа (рис.).



5. **Мультиграфом** называется граф, у которого две смежные вершины x_i и $x_к$ соединены более чем одной дугой (ребром) в одном и том же направлении (рис.).



Наибольшее число дуг (ребер) графа определяет его **кратность**.

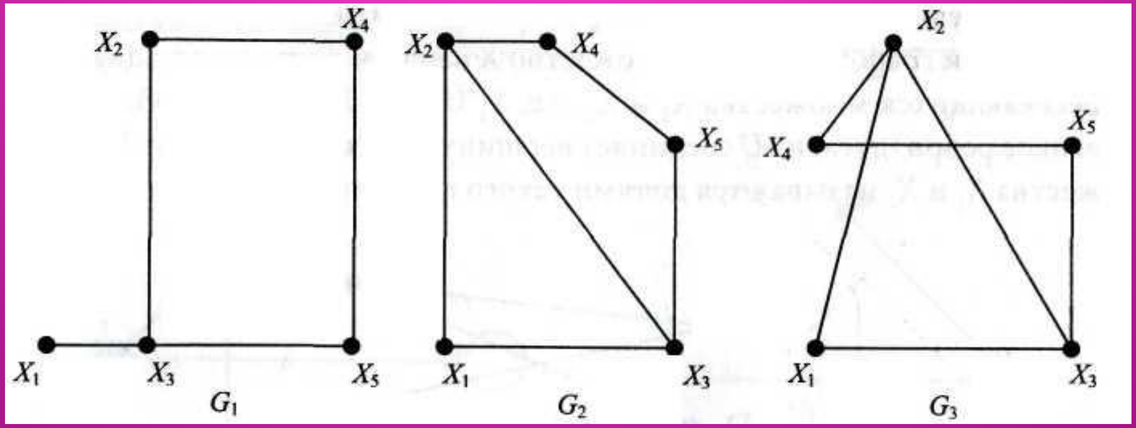
- 6. **Изоморфные графы**

Термин «изоморфный» означает в переводе с латинского (***иос*** — равный, одинаковый и ***морфи*** — форма, вид), т.е. одинаковый по форме.

Графы на плоскости можно представить различными диаграммами.

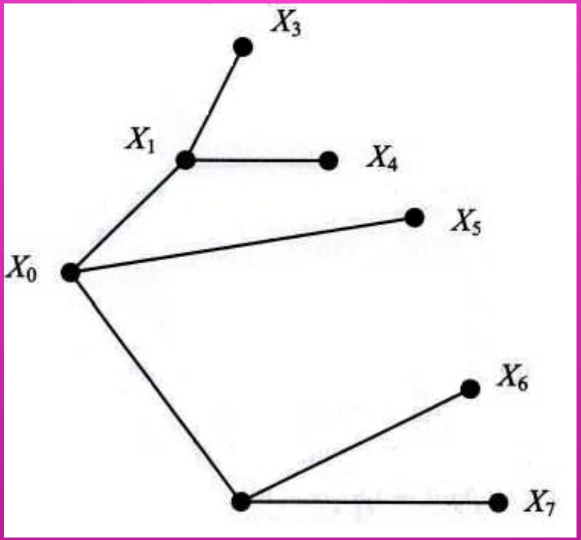
Два графа G_1 и G_2 называются изоморфными, если они имеют одно и то же число вершин и две любые вершины x_i и $x_к$ одного графа соединены ребром (дугой), то и соответствующие им вершины другого графа тоже соединены ребром (рис.).

Обозначаются $G_1 \sim G_2$.



- 7. **Древовидные графы** являются простейшим классом графов и самым распространенным видом графов, применяемых в программировании.

Древовидным графом (<u>деревом</u>) называется неориентированный связный граф с числом вершин не менее двух, не содержащий петель и циклов (рис.).



- Вершины, инцидентные только одному ребру дерева, называются висячими (x_3 x_4, x_5, x_6 и x_7).
- Ориентированным называется древовидный граф без циклов, в котором полустепень захода каждой вершины, за исключением одной, например, вершины x_o, равна единице, а полустепень захода вершины x_0 равна нулю. Вершина x_0 называется корнем дерева (рис.).