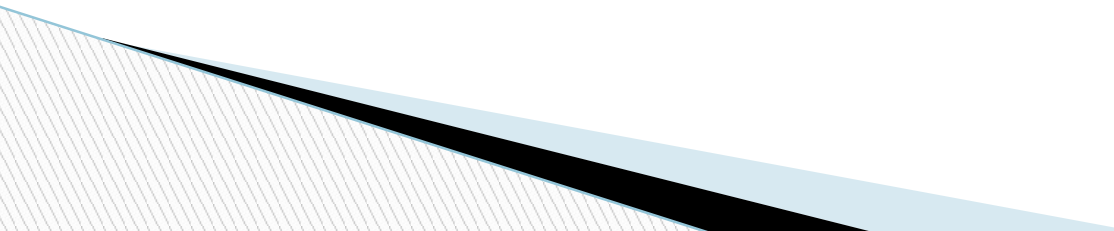


# Теорема Менелая.



# Задачи:

1. Изучить теорему.
  2. Знать её применение.
  3. Уметь решать задачи на изученную теорему.
- 

# Введение

В курсе геометрии 7-х –9-х классов были рассмотрены важные и интересные свойства геометрических фигур на плоскости. Но многие удивительные соотношения и изящные геометрические факты не вошли в основной курс.

Из школьного курса нам известны теоремы о замечательных точках в треугольнике: три биссектрисы (медианы, высоты) пересекаются в одной точке. Эти свойства являются следствиями теоремы Менелая.

# Биография ученого

- ▣ **Менелай Александрийский** — древнегреческий математик и астроном, создатель системы геометрии и тригонометрии на сфере – первой неевклидовой геометрии. Время его жизни и деятельности определяется приведёнными в «Алмагесте» Птолемея двумя астрономическими наблюдениями, которые Менелай произвёл в Риме в первом году царствования Траяна, то есть в 98 году н. э.
- ▣ Его работы: главным сочинением Менелая является «Сферика» в трёх книгах, сочинения «О вычислении хорд» в 6 книгах, «Начала геометрии» в 3 книгах, «Книга о треугольнике», «Книга о заходах знаков зодиака», «Книга о подразделении составных тел», посвящённая определению удельных весов тел, книга по гидростатике.



# Биография ученого

- Труд «Сферика» стал вершиной достижений греков в сферической геометрии. Менелай первым ввел в геометрический обиход и исследовал простейший сферический многоугольник – треугольник. Он перенес на сферу евклидову теорию плоских треугольников и в числе прочего получил условие, при котором три точки на сторонах сферического треугольника или их продолжениях лежат на одной прямой. Интересно, что соответствующая теорема для плоскости в то время была уже широко известна, однако в историю геометрии она вошла именно как теорема Менелая.

# Биография ученого

- Самым замечательным считается обыкновенная теорема Менелая Александрийского, которая прежде называлась правилом шести количеств. Содержание ее состоит в следующем. Если все стороны треугольника пересечь прямой, то произведение их трех отрезков, из числа не имеющих общих концов, равно произведению таких же трех остальных отрезков. Менелай выражал свою теорему в виде пропорции  $a_1:b_1=b_2b_3:a_2a_3$ , в которой буквы  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  и, соответственно, буквы  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  обозначают не имеющие общих концов отрезки трех сторон треугольника. Словесным выражением этой пропорции было предложение:  $a_1$  находится к  $b_1$  в таком же сложном отношении, в каком находятся  $b_2$  к  $a_2$  и  $b_3$  к  $a_3$ .

# Теорема Менелая

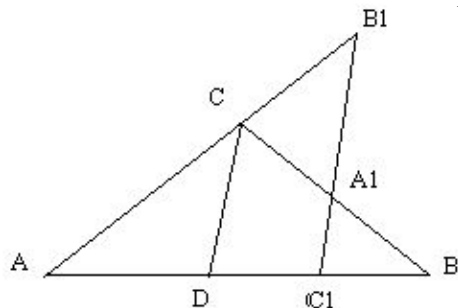
Пусть на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

# Теорема Менелая

*Доказательство.* Предположим, что точки  $A_1, B_1, C_1$  принадлежат одной прямой  $a$ . Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  проведем прямую, параллельную  $a$  и обозначим через  $D$  точку её пересечения с  $AB$ . Из подобия треугольников  $ADC$  и  $AC_1B_1$  следует выполнимость равенства:

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{DC_1}{AC_1}$$



Аналогично, из подобия треугольников  $BDC$  и  $BC_1A_1$  следует выполнимость

равенства: 
$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC_1}{C_1D}$$

Перемножая эти равенства, получим равенство:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC_1}{AC_1}$$

из которого следует требуемое равенство.



# Теорема Менелая

*Докажем обратное.* Пусть на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ , для которых выполняется равенство  $\frac{AC_1}{CB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ .

Предположим, что прямая  $A_1B_1$  пересекает прямую  $AB$  в некоторой точке  $C'$ . По доказанному, выполняется равенство:

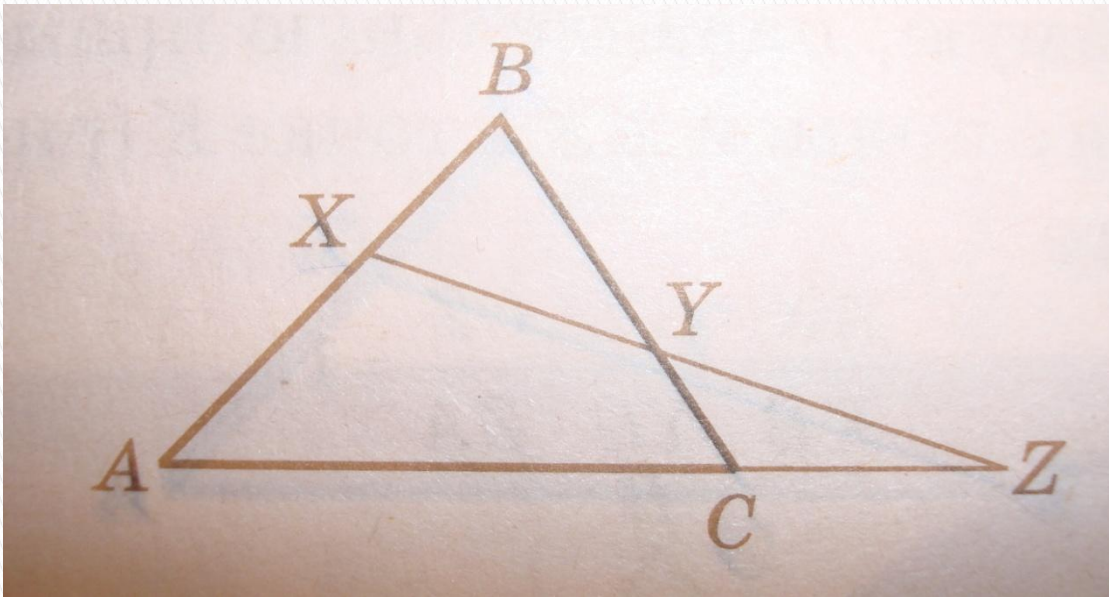
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Учитывая первое равенство, получаем равенство:  $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{CB_1}$ , из которого следует совпадение точек  $C'$  и  $C_1$  и, значит, точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  принадлежат одной прямой.

# Теорема Менелая

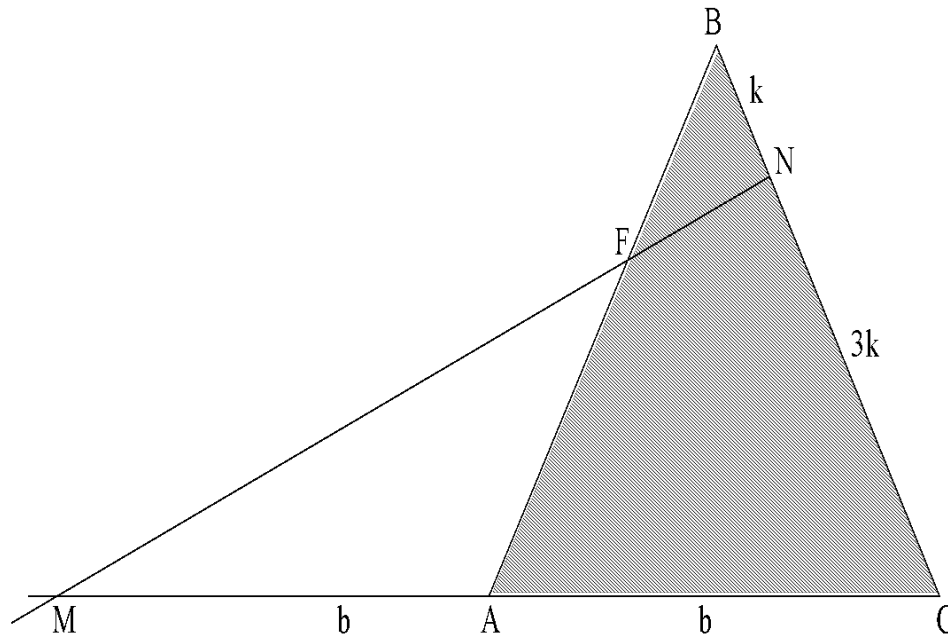
Если некоторая прямая пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно, а продолжение стороны  $AC$  – в точке  $Z$ , то

$$\frac{AX}{XB} \times \frac{BY}{YC} \times \frac{CZ}{ZA} = 1$$



# Задачи на теорему Менелая

**Задача 1.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  взята точка  $N$  так, что  $NC = 3BN$ ; на продолжении стороны  $AC$  за точку  $A$  взята точка  $M$  так, что  $MA = AC$ . Прямая  $MN$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $F$ . Найдите отношение  $\frac{BF}{FA}$ .

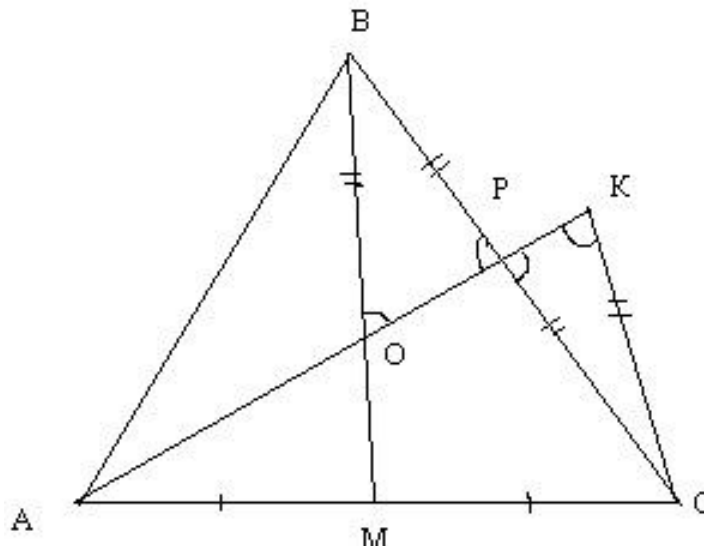


**Решение.** По условию задачи  $MA = AC$ ,  $NC = 3BN$ . Пусть  $MA = AC = b$ ,  $BN = k$ ,  $NC = 3k$ . Прямая  $MN$  пересекает две стороны треугольника  $ABC$  и продолжение третьей. По теореме Менелая:

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1, \quad \frac{3k}{k} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{b}{2b} = 1,$$
$$\frac{BF}{FA} \cdot \frac{3}{2} = 1, \quad \frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: 2 : 3.

В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина стороны  $AC$ , точка  $P$  лежит на стороне  $BC$ . Отрезок  $AP$  пересекает  $BM$  в точке  $O$ . Оказалось, что  $BO=BP$ . Найти отношение  $OM:PC$ .



**1 способ.** Сделаем дополнительное построение: проведем через точку С прямую, параллельную ВМ; точку пересечения этой прямой с прямой АР обозначим через К.

Рассмотрим треугольники ОВР и КСР. Углы ОРВ и КРС равны как вертикальные, углы ВОР и СКР равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых ВМ и СК секущей АК. Поскольку по условию треугольник ОВР равнобедренный, угол ВОР = углу ОРВ, значит, и угол СРК = углу СКР. Значит, треугольник СКР – равнобедренный, т.е. СР=КС. Но, (например, по т. Фалеса) ОМ – средняя линия треугольника САК, она в 2 раза меньше, чем СК. Получаем, что  $ОМ:РС = ОМ:СК = 1:2$

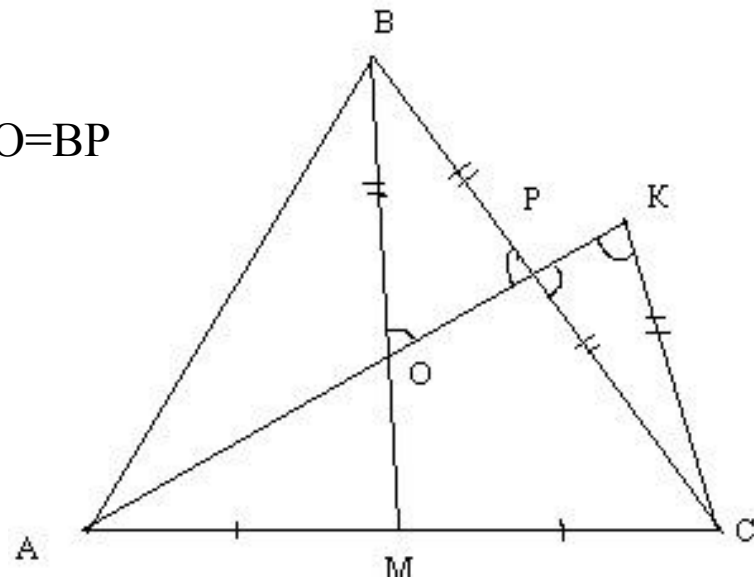
**2 способ.** По т. Менелая для треугольника МВС и прямой АР выполняется

равенство: 
$$\frac{МО}{ОВ} * \frac{ВР}{РС} * \frac{АС}{АМ} = 1$$

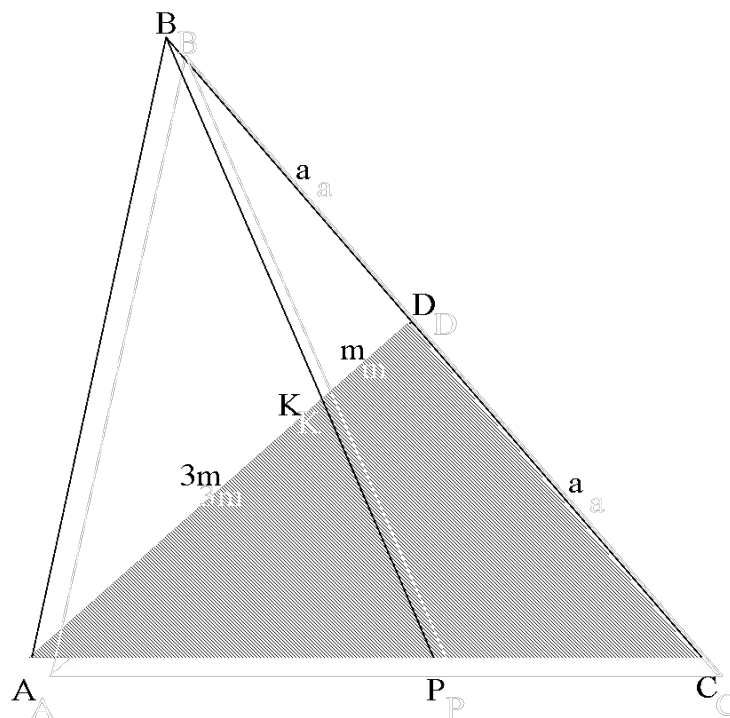
Тогда, используя условия  $АМ=МС$  и  $ВО=ВР$

получим, что  $МО:РС=1:2$ .

Ответ: 1:2.



**Задача 2.** Пусть  $AD$  — медиана треугольника  $ABC$ . На стороне  $AD$  взята точка  $K$  так, что  $AK : KD = 3:1$ . Прямая  $BK$  разбивает треугольник  $ABC$  на два. Найдите отношение площадей этих треугольников.



**Решение.** Пусть  $AD = DC = a$ ,  $KD = m$ ; тогда  $AK = 3m$ . Пусть  $P$  — точка пересечения прямой  $BK$  со стороной  $AC$ . Необходимо найти отношение  $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BPC}}$ . Так как треугольники  $ABP$  и  $PBC$  имеют равные высоты, проведенные из вершины  $B$ , то

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{AP}{PC}$$

По теореме Менелая для треугольника  $ADC$  и секущей  $PB$  имеем:

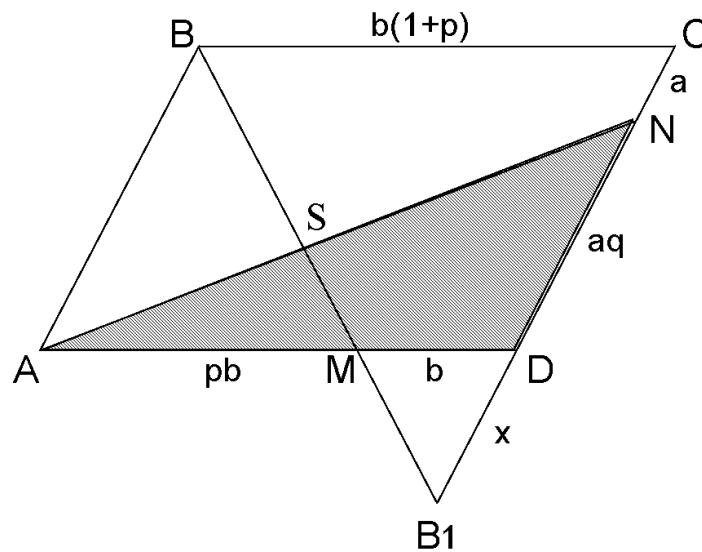
$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DK}{KA} = 1, \quad \frac{AP}{PC} \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{m}{3m} = 1, \quad \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}.$$

Итак,  $S_{\triangle ABP} : S_{\triangle BPC} = 3 : 2$

Ответ: 3:2.



**Задача 3.** Дан параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $M$  делит отрезок  $AD$  в отношении  $p$ , а точка  $N$  делит отрезок  $DC$  в отношении  $q$ . Прямые  $BM$  и  $AN$  пересекаются в точке  $S$ . Вычислите отношение  $AS : SN$ .



**Решение.**  $\frac{AM}{MD} = p \Rightarrow$  если  $MD = b$ , то  $AM = pb$ ;  $\frac{ND}{NC} = q \Rightarrow$  если  $NC = a$ ,  
то  $ND = aq$ .

Пусть  $B_1$  – точка пересечения прямых  $BM$  и  $CD$ .  $\triangle MB_1D \sim \triangle BB_1C$ ,

тогда  $\frac{BC}{MD} = \frac{CB_1}{DB_1}$ ;  $\frac{b(1+p)}{b} = \frac{a(1+q)+x}{x}$ ;

$$1+p = \frac{a(1+q)}{x} + 1; x = \frac{a(1+q)}{p}.$$

Прямая  $BB_1$  пересекает две стороны и продолжение третьей  
треугольника  $AND$ . По теореме Менелая:

$$\frac{AS}{SN} \cdot \frac{NB_1}{B_1D} \cdot \frac{DM}{MA} = 1, \frac{AS}{SN} \cdot \frac{aq + \frac{a(1+q)}{p}}{a(1+q)} \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

Откуда  $\frac{AS}{SN} = \frac{p(1+q)}{pq + q + 1}$ .

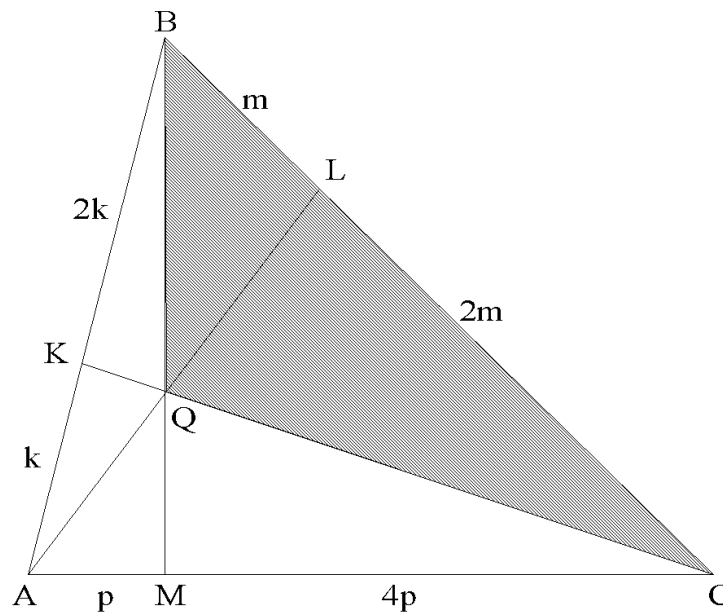
Ответ:  $\frac{p(1+q)}{pq + q + 1}$ .

**Задача 4.** В треугольнике ABC точки K и L принадлежат соответственно сторонам AB и BC.

$$AK : BK = 1 : 2,$$

$$CL : BL = 2 : 1.$$

Q — точка пересечения отрезков AL и CK.  $S_{\Delta BQC} = 1$ . Найдите площадь треугольника ABC.



**Решение.** 1) В треугольнике МВС прямая АЛ пересекает две стороны и продолжение третьей стороны. По теореме Менелая:

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CA}{AM} \cdot \frac{MQ}{BQ} = 1, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{CA}{AM} \cdot \frac{MQ}{QB} = 1. \quad (1)$$

В треугольнике АВМ прямая КС пересекает две стороны треугольника и продолжение третьей стороны. По теореме Менелая:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BQ}{QM} \cdot \frac{MC}{CA} = 1, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{BQ}{QM} \cdot \frac{MC}{CA} = 1. \quad (2)$$

$$(1) \cdot (2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{CA}{AM} \cdot \frac{MQ}{QB} \cdot \frac{BQ}{QM} \cdot \frac{MC}{CA} = 1,$$

то есть  $MC = 4 \cdot p$ ,  $AM = p$ .

2) Еще раз перепишем равенство (1):  $\frac{1}{2} \cdot \frac{CA}{AM} \cdot \frac{MQ}{QB} = 1, \frac{1}{2} \cdot \frac{CA}{AM} \cdot \frac{MQ}{QB} = 1, \frac{MQ}{QB} = \frac{2}{5},$

то есть  $MQ = 2x, QB = 5x.$

3) Треугольники ВQC и МВС имеют общий угол, значит,  $\frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta BQC}} = \frac{BM \cdot BC}{BQ \cdot BC} = \frac{7}{5},$

Тогда  $S_{\Delta MBC} = \frac{7}{5} \cdot 1 = \frac{7}{5}.$

4) Треугольники  $ABC$  и  $MBC$  имеют равные высоты, проведенные из вершины  $B$ , значит,

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{AC}{MC} = \frac{5p}{4p} = \frac{5}{4},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{5}{4}.$$

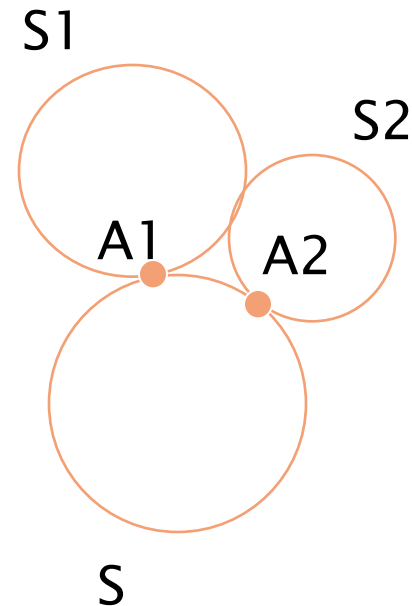
$$S_{\Delta MBC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

### Задача 5.

**Дано:** окружность  $S$  касается окружностей  $S1$  и  $S2$  в точках  $A1$  и  $A2$ .

**Доказать:** что прямая  $A1A2$  проходит через точку пересечения общих внутренних или внешних касательных к окружностям  $S1$  и  $S2$ .

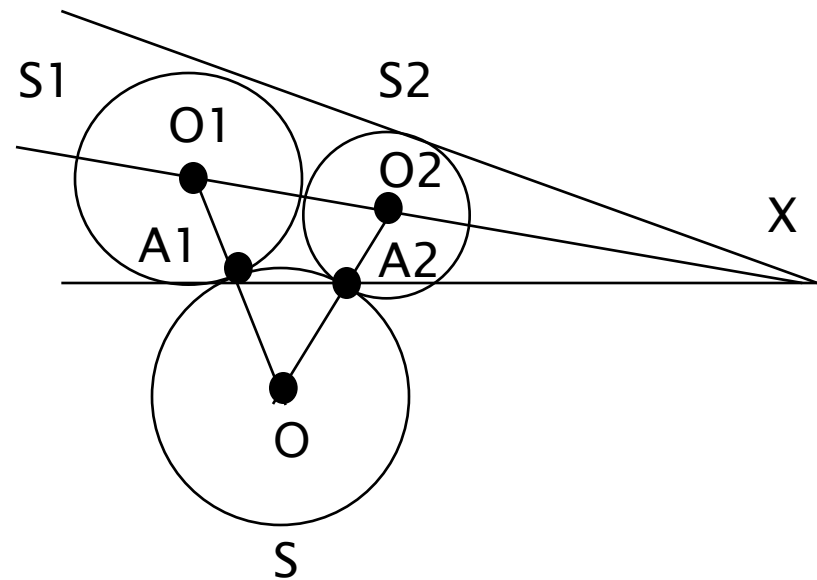


### Доказательство.

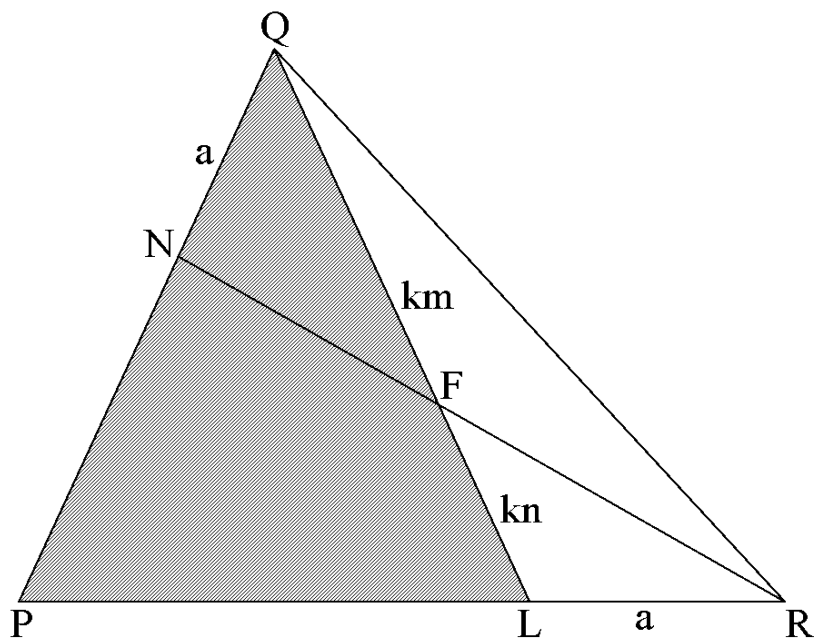
Пусть  $O$ ,  $O_1$  и  $O_2$  – центры окружностей  $S$ ,  $S_1$  и  $S_2$ ;  $X$  – точка пересечения прямых  $O_1O_2$  и  $A_1A_2$ . Применяя теорему Менелая к треугольнику  $OO_1O_2$  и точкам  $A_1$ ,  $A_2$  и  $X$ , получаем:

$$\frac{O_1X}{O_2X} * \frac{O_2A_2}{OA_2} * \frac{OA_1}{O_1A_1} = 1$$

а значит,  $O_1X : O_2X = R_1 : R_2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . Следовательно,  $X$  – точка пересечения общих внешних или внутренних касательных к окружностям  $S_1$  и  $S_2$ .



**Задача 6.** На стороне  $PQ$  треугольника  $PQR$  взята точка  $N$ , а на стороне  $PR$  — точка  $L$ , причем  $NQ = LR$ . Точка пересечения отрезков  $QL$  и  $NR$  делит  $QL$  в отношении  $m : n$ , считая от точки  $Q$ . Найдите  $\frac{PN}{PR}$ .





**Решение.** По условию  $NQ=LR$ ,  $\frac{QF}{FL} = \frac{m}{n}$ . Пусть  $NA = LR = a$ ,  $QF = km$ ,  $LF = kn$ . Прямая  $NR$  пересекает две стороны треугольника  $PQL$  и продолжение третьей. По теореме Менелая:

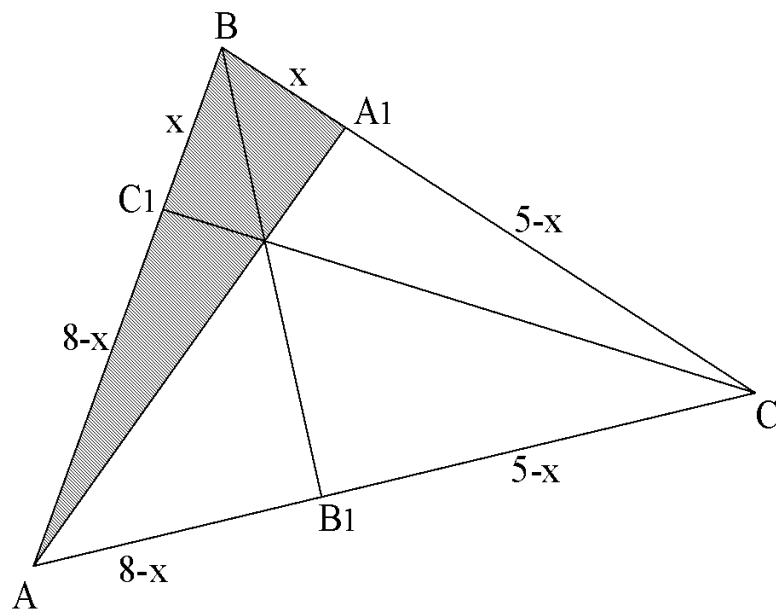
$$\frac{PN}{NQ} \cdot \frac{QF}{FL} \cdot \frac{LR}{RP} = 1,$$

$$\frac{PN}{a} \cdot \frac{km}{kn} \cdot \frac{a}{PR} = 1,$$

$$\frac{PN}{PR} = \frac{n}{m}.$$

Ответ:  $n : m$ .

**Задача 7.** В треугольнике  $ABC$ , описанном около окружности,  $AB = 8$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = 4$ .  $A_1$  и  $C_1$  — точки касания, принадлежащие соответственно сторонам  $BC$  и  $BA$ .  $P$  — точка пересечения отрезков  $AA_1$  и  $CC_1$ . Точка  $P$  лежит на биссектрисе  $BB_1$ . Найдите  $AP:PA_1$ .



**Решение.** Точка касания окружности со стороной  $AC$  не совпадает с  $B_1$ , так как треугольник  $ABC$  — разносторонний. Пусть  $C_1B = x$ , тогда, используя свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки, введем обозначения (см. рисунок)

$$\text{Значит, } C_1B = BA_1 = \frac{9}{2} \quad A_1C = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \quad 8 - x + 5 - x = 4, \quad x = \frac{9}{2}$$

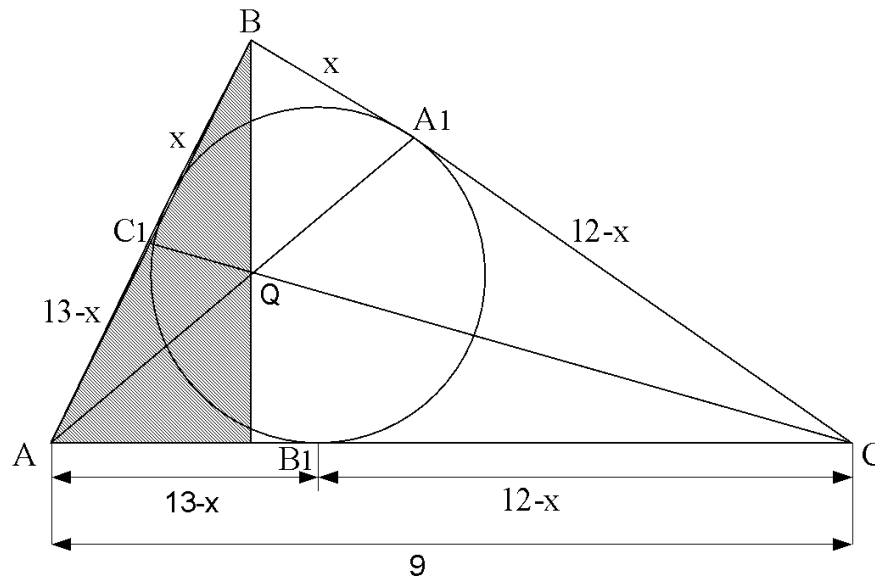
$$AC_1 = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

В треугольнике  $ABA_1$ , прямая  $C_1C$  пересекает две его стороны и продолжение третьей стороны. По теореме Менелая:

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{9}} \cdot \frac{5}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{A_1P}{PA} = 1, \quad \frac{AP}{PA_1} = \frac{70}{9}$$

Ответ: 70 : 9.

**Задача 8.** В треугольник  $ABC$ , описанном около окружности,  $AB = 8$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 9$ ,  $A_1$  и  $C_1$  — точки касания, лежащие соответственно на сторонах  $BC$  и  $AB$ .  $Q$  — точка пересечения отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$ .  $Q$  лежит на высоте  $BB_1$ . Найдите отношение  $BQ : QB_1$ .



**Решение.** Треугольник  $ABC$  — разносторонний, значит, точка  $B_1$  не совпадает с точкой касания.

1) Пусть  $C_1B = x$ , тогда, используя свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки, введем обозначения (см. рисунок):

$$(13 - x) + (12 - x) = 9, \quad x = 8.$$

Значит,  $C_1B = 8$ ,  $AC_1 = 5$ .

2) По формуле Герона:  $S_{\Delta ABC} = \sqrt{17(17-13)(17-12)(17-9)} = 4\sqrt{170}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1$$

$$BB_1 = \frac{2S_{\Delta}}{AC}$$

$$BB_1 = \frac{8\sqrt{170}}{9}$$

3) Из треугольника  $ABV_1$  (прямоугольного) по теореме Пифагора :

$$AB_1 = \sqrt{13^2 - \frac{64 \cdot 170}{81}} = \frac{53}{9}.$$

4) В треугольнике  $ABV_1$  прямая  $CC_1$  пересекает две его стороны и продолжение третьей. По теореме Менелая:

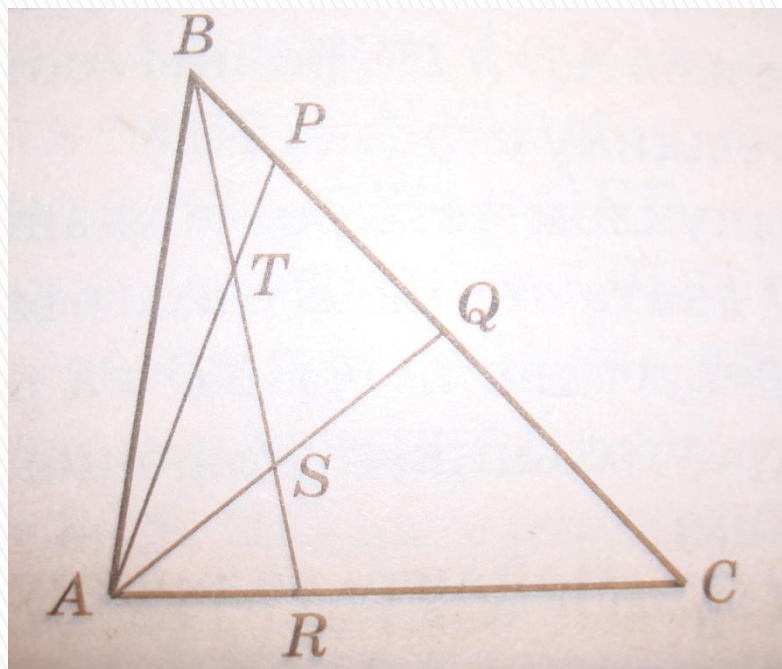
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1, \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{9 - \frac{53}{9}}{9} = 1,$$

$$\frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{81-53}{81} = 1,$$

$$\frac{BQ}{QB_1} = \frac{162}{35}.$$

Ответ: 162 : 35.

**Задача 9.** Точки  $P$  и  $Q$  расположены на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что  $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$ . Точка  $R$  делит сторону  $AC$  этого треугольника таким образом, что  $AR : RC = 1 : 2$ . Чему равно отношение площади четырехугольника  $PQST$  к площади треугольника  $ABC$ , где  $S$  и  $T$  - точки пересечения прямой  $BR$  с прямыми  $AQ$  и  $AP$  соответственно.



**Решение.** Обозначим  $BP = x$ ,  $AR = y$ ; тогда  $PQ = 2x$ ,  $QC = 3x$ ,  $RC = 2y$ .

Вычислим, какую часть площадь четырехугольника  $PQST$  составляет от площади треугольника  $APQ$ , а значит, и от площади треугольника  $ABC$ . Для этого нам понадобятся отношения, в которых точки  $S$  и  $T$  делят прямые  $AQ$  и  $AP$  соответственно. Применим к треугольнику  $ACQ$  и секущей  $SR$  теорему Менелая:

$$\frac{CR}{RA} \times \frac{AS}{SQ} \times \frac{QB}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{SQ} = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{AQ} = \frac{1}{2}$$

Аналогично, применив теорему Менелая к треугольнику  $ACB$  и секущей  $TR$ , получим:

$$\frac{CR}{RA} \times \frac{AT}{TP} \times \frac{PB}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{AT}{TP} = 3 \Leftrightarrow \frac{AT}{AP} = \frac{3}{4}$$

Далее:  $\frac{S_{\Delta AST}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{AS}{AQ} = \frac{AT}{AP} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{S_{PQST}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{5}{8}$

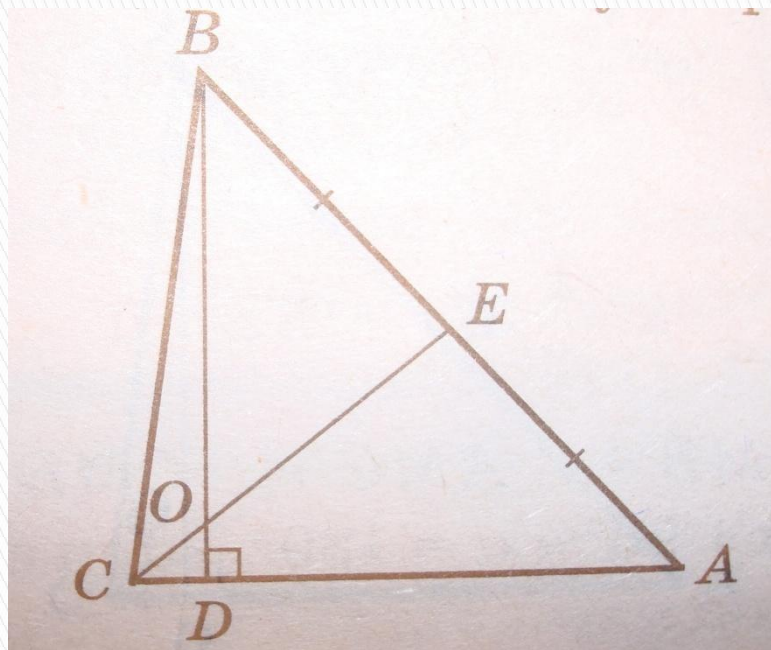


С другой стороны, применив лемму о площадях к треугольникам  $APQ$  и  $ABC$ , получим, что

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{PQ}{BC} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{S_{PQST}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{PQST}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} \equiv \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

Ответ:  $\frac{5}{24}$ .

**Задача 10.** В треугольнике  $ABC$  длина высоты  $BD$  равна 6, длина медианы  $CE$  равна 5, расстояние от точки пересечения  $BD$  с  $CE$  до стороны  $AC$  равно 1. Найти длину стороны  $AB$ .



**Решение.** Пусть точка  $O$  – точка пересечения прямых  $BD$  и  $CE$ .

Расстояние от точки  $O$  до середины  $AC$  (равное по условию единице) есть длина отрезка  $OD$ . Итак,  $OD = 1$  и  $OB = 5$ . Применим к треугольнику  $ABD$  и секущей  $OE$  теорему Менелая:

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BO}{OD} \times \frac{DC}{CA} = 1 \Leftrightarrow \frac{DC}{CA} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{AD}{DC} = 4$$

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику  $ACE$  и секущей  $OD$ , получим, что

$$\frac{AD}{DC} \times \frac{CO}{OE} \times \frac{EB}{BA} = 1 \Leftrightarrow \frac{CO}{OE} = \frac{1}{2}$$

откуда  $OE = 2CO$ , и с учетом  $OE + CO = CE = 5$  получаем, что  $CO = \frac{5}{3}$ . К прямоугольному треугольнику  $COD$  применим теорему Пифагора:

$$CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{4}{3}$$

Значит,  $AD = 4CD = \frac{16}{3}$ . Наконец, рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABD$ , в нем также воспользуемся теоремой Пифагора:

$$AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{256}{9} + 36} = \frac{2\sqrt{145}}{3}$$

Ответ:  $\frac{2\sqrt{145}}{3}$ .

# Дополнительные задачи

1. В треугольнике  $ABC$  отрезки  $AD$  и  $BM$ , проведенные из вершин  $A$  и  $B$  соответственно к сторонам  $BC$  и  $AC$ , пересекаясь в точке  $P$ , делятся в отношении  $AP:PD = 3:2$  и  $BP:PM = 4:5$ . В каком отношении точки  $D$  и  $M$  делят стороны треугольника, считая от  $C$ ?
2. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  делит сторону  $BC$  в отношении  $BD:DC = 3:4$ . Точка  $M$  делит сторону  $AC$  в отношении  $AM:MC = 2:5$ . Отрезки  $AD$  и  $BM$  пересекаются в точке  $K$ . Найдите площадь треугольника  $AKM$ , если площадь треугольника  $BKD$  равна 45.
3. В треугольнике  $ABC$  точка  $K$  делит сторону  $AB$  в отношении  $AK:KB = 1:2$ , а точка  $P$  делит сторону  $BC$  в отношении  $CP:PB = 2:1$ . Прямые  $AP$  и  $CK$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если площадь треугольника  $BMC$  равна 4.

1. Прямая  $KP$  делит сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в отношении  $AK:KB=2:1$ , а сторону  $BC$  - в отношении  $BP:PC=3:1$ . Медиана  $BB_1$  пересекает прямую  $KP$  в точке  $M$ . При этом площадь четырехугольника  $B_1MPC$  равна 17. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
2. В треугольнике  $ABC$  на основании  $AC$  взяты точки  $P$  и  $T$ , так что  $AP < AT$ . Прямые  $BP$  и  $BT$  делят медиану  $AM$  на три равные части. Найдите  $AC$ , если  $PT=3$ .
3. В треугольнике  $ABC$  площади 18 проведены отрезки  $BM$  и  $AK$ , причем точки  $M$  и  $K$  делят соответственно стороны  $AC$  и  $BC$  в отношении  $AM:MC=3:4$  и  $BK:KC=2:7$ . Найдите площадь четырехугольника  $CMPK$ , где  $P$  – точка пересечения отрезков  $BM$  и  $AK$ .
4. На сторонах треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$ ,  $K$  и  $P$  такие, что  $AM:MB=BK:KC=CP:PA=2:1$ . Отрезки  $CM$  и  $BP$  пересекаются в точке  $A_1$ ,  $AK$  и  $CM$  - в точке  $B_1$ ,  $AK$  и  $BP$  – в точке  $C_1$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если площадь треугольника  $A_1B_1C_1$  равна 1.

# Заключение

Теорема Менелая проста в понимании. Но трудности, связанные с освоением этих теорем, оправданы их применением при решении задач.

Решение задач с помощью теоремы Менелая более рационально, чем их решение другими способами, например векторным, которое требует дополнительных действий.

Я считаю, что такие теоремы должны быть включены в основной курс геометрии 7-х-9-х классов, так как решение задач с помощью этих теорем развивает мышление и логику учеников.

Теорема Менелая помогает быстро и оригинально решить задачи повышенной сложности, в том числе и задачи уровня С единого государственного экзамена.

# Список литературы

1. Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. М.: Аванта +, 2002
2. В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Часть I.
3. Володурин В.С. и др. Пособие по элементарной геометрии. Учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педвузов. — Оренбург, 1991.
4. Шарыгин И.Ф. Геометрия. Задачник. 9—11 классы. — М.: Дрофа, 1996.
5. Б. Орач .Теорема Менелая. Квант № 3, 1991.

**Спасибо за внимание!**

