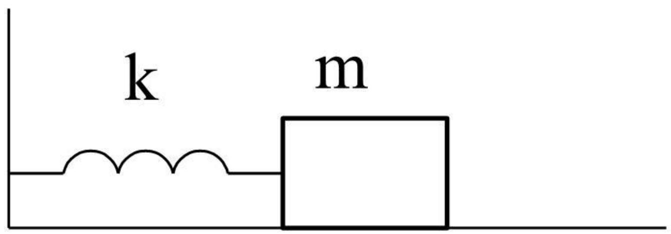
Раздел 2: Колебания и волны

Тема8. Динамика колебаний

Тема 8. Динамика колебаний

1. Дифференциальное уравнение колебаний. Математический и физический маятники.
2. Свободные затухающие колебания.
3. Вынужденные колебания. Резонанс.

1 учебный вопрос: Уравнение гармонического осциллятора.



$$ma = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где ω_0 – собственная частота колебаний ***(1)***

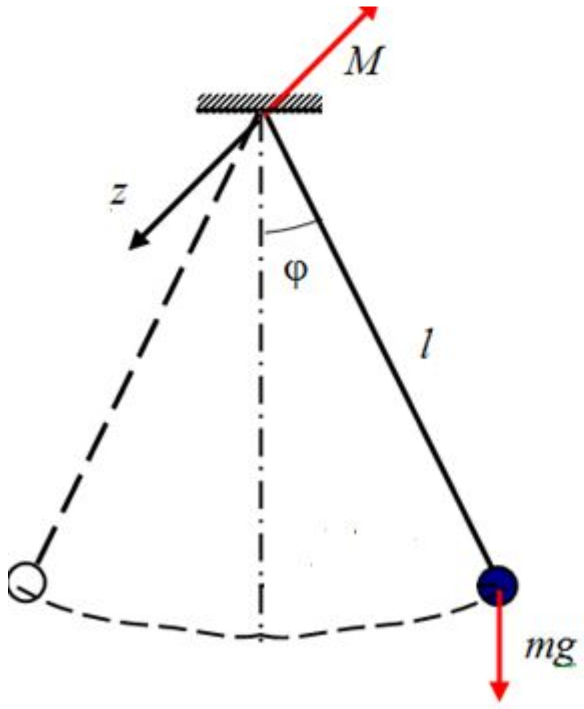
дифференциальное уравнение гармоническихколебаний

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – циклическая частота

Решение: $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$

Математический маятник

***Математическим маятником** называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешено тело с сосредоточенной в одной точке массой, совершающее колебательное движение под действием силы тяжести.*



$$\boxed{M = J\varepsilon}$$

$$\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$$

$$J = ml^2$$

$$M = -mgl\sin\varphi$$

$$ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi$$

$$ml^2 \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgl \sin\varphi \qquad \sin\varphi \approx \varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$ ***(2)***

сравниваем с

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

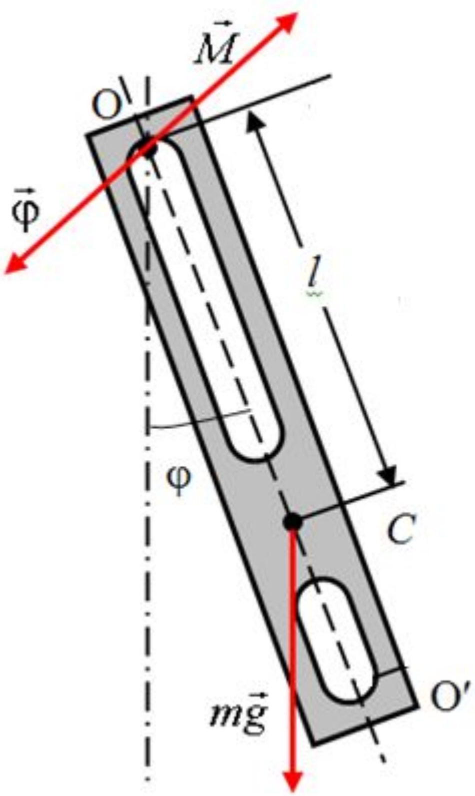
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ ***(3)***

Период колебаний математического маятника зависит только от ускорения свободного падения и от длины маятника и не зависит от его массы.

Решение: $\varphi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ***(4)***

Физический маятник

Физическим маятником *называется любое твердое тело, способное под действием силы тяжести совершать колебания вокруг неподвижной оси, не совпадающей с его центром инерции.*



По аналогии с математическим маятником:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi$$

В случае малых колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{mgl}{J_O} \qquad (5)$$

Решение дифференциального уравнения колебаний физического маятника (5) имеет вид

$$\varphi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\mathrm{O}}}{mgl}} \qquad \textbf{\textit{(6)}}$$

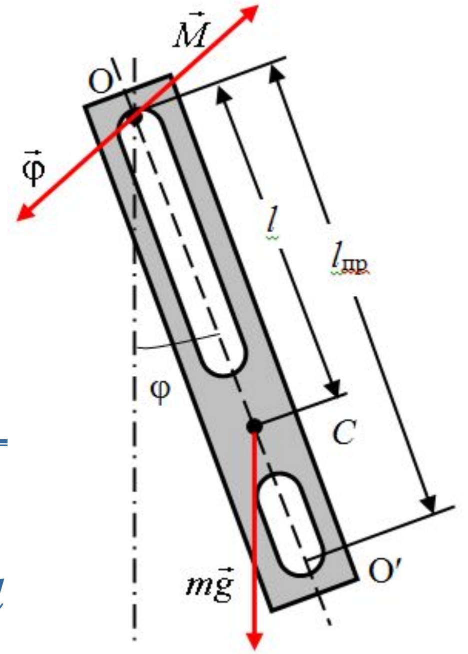
$$J_{\mathrm{O}} = J_C + ml^2$$

Сравним физический маятник с математическим маятником

Приведенной длиной физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgl}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{np}}{g}}$$

$$l_{\text{пр}} = \frac{J_O}{ml} \qquad (7)$$



Точка О' на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качания физического маятника.

2 учебный вопрос: Свободные затухающие колебания

$$F_{\text{опр}} = -r\upsilon = -r\frac{dx}{dt}$$

***r* – коэффициент сопротивления среды**

Уравнение второго закона Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{упр}} + F_{\text{сопр}} \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \qquad (8)$$

$$2\beta = \frac{r}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

ДУ затухающих колебаний

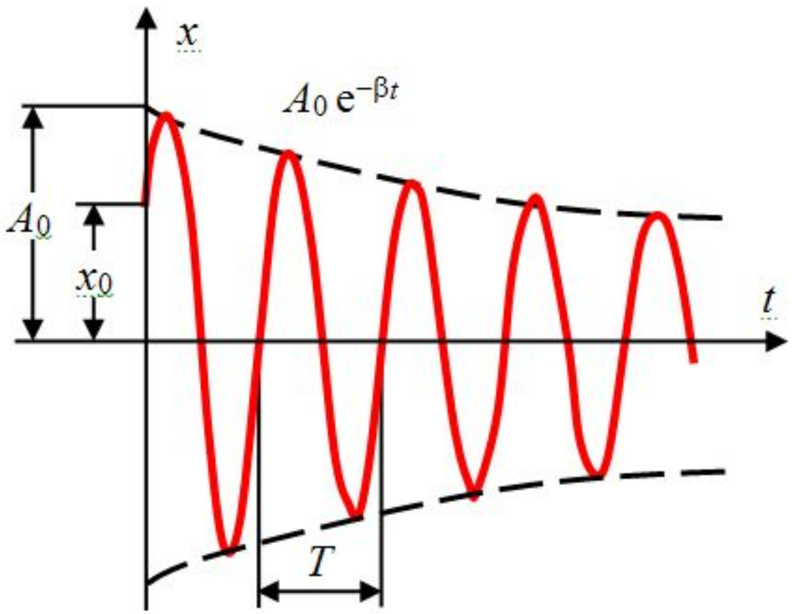
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

- ДУ затухающих колебаний

β - коэф.затухания; ω_0 - частота собственных колебаний без трения.

Решение:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin\left(\omega t + \varphi\right) \qquad (9)$$



при $\beta < \omega_0$

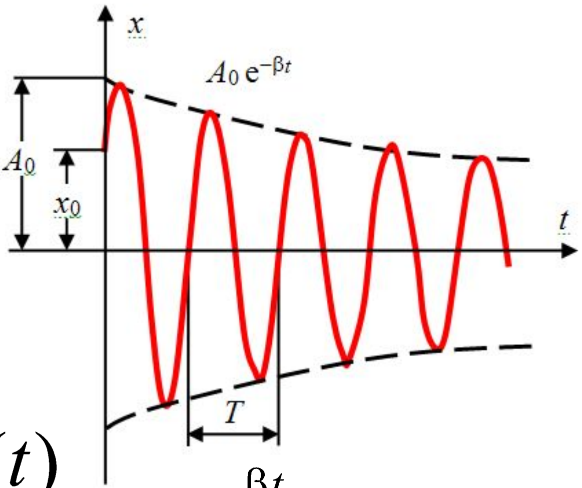
$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний

$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^{\,2} - \beta^2}$

Характеристики затухания системы

1. <u>Время релаксации </u>(времени затухания) τ - время, за которое амплитуда уменьшается в e = 2,72 раз.

$$A(t) = A_0 e^{\beta t} \;\Rightarrow\; e^{\beta\tau} = e \;\Rightarrow\; \tau = \frac{1}{\beta}$$



2. <u>Коэффициент затухания β</u>

3. <u>Декремент затухания</u>

$$\sigma = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta t}$$

4. <u>Логарифмический декремент затухания</u>

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

5. Добротность колебательной системы - число полных колебаний, совершаемых системой за время затухания τ, умноженное на π:

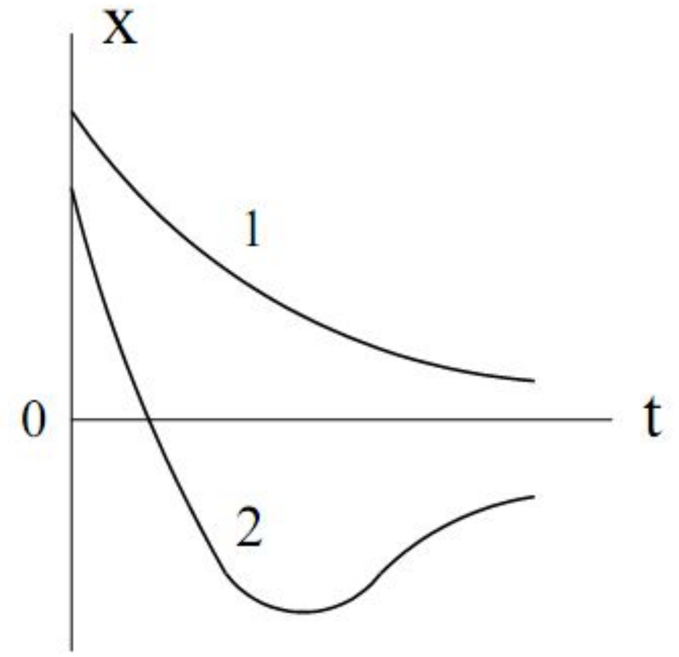
$$Q = \pi \frac{\tau}{T} \qquad Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

Энергетический смысл добротности:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Запас энергии в колебательной системе}}{\text{Потеря энергии за 1 период колебаний}}.$$

Добротность характеризует относительную убыль энергии колебательной системы из-за наличия трения на интервале времени, равном одному периоду колебаний.

Апериодический процесс



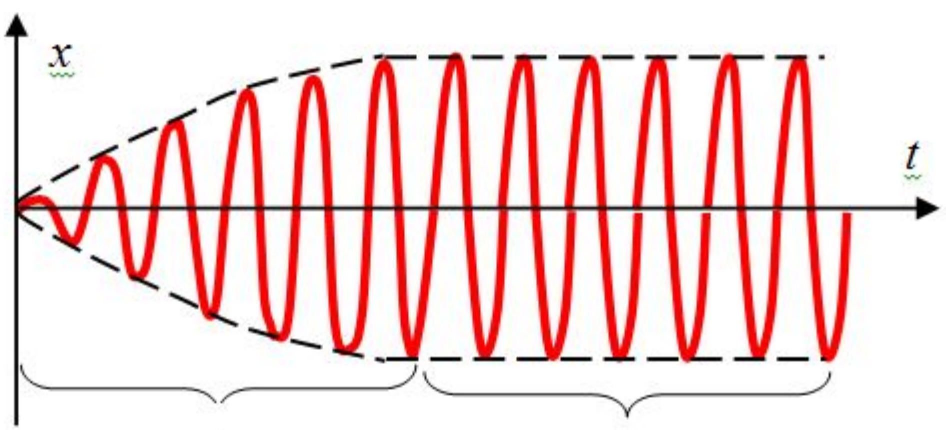
При $\beta > \omega_0$ частота ω' становится чисто мнимой

3 учебный вопрос: Вынужденные колебания. Резонанс.

Пусть колебательная система подвергается действию внешней вынуждающей силы: $F = F_0 \sin \omega t$

Второй закон Ньютона: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega t$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t; \qquad f_0 = F_0/m}$$ ***(10)***



Решение: $\boxed{x_2 = A(\omega)\ \sin\ (\omega t - \alpha)}$ ***(11)***

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}}$$

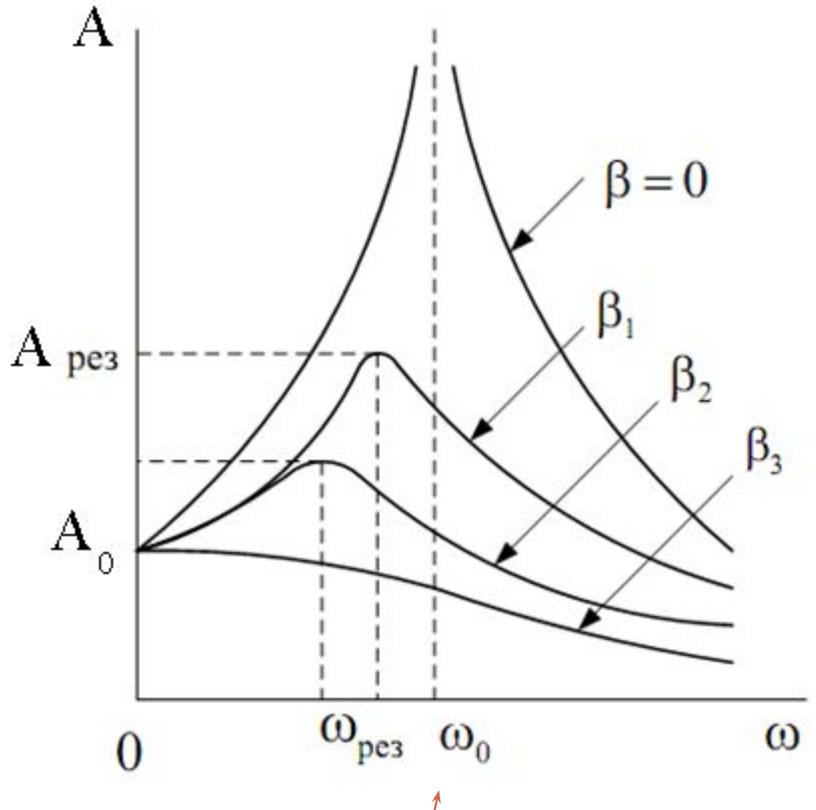
$$\operatorname{tg}\ \alpha = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\omega \approx \omega_0$$

- резонанс

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$



резонансная кривая