

Отношения, графы, деревья

Определения

Определение. Пусть a и b — объекты.

Через (a, b) обозначим *упорядоченную пару*, состоящую из объектов a и b , взятых в этом порядке.

Упорядоченные пары (a, b) и (c, d) называются *равными*, если $a = c$ и $b = d$.

В противоположность этому $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Определение. *Декартовым произведением* множеств A и B , обозначаемым через $A \times B$, называют множество $\{(a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}$.

Пример. Пусть $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$. Тогда $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

Отношения

Определение. Пусть A и B — множества.

Отношением из A в B называется любое подмножество множества $A \times B$.

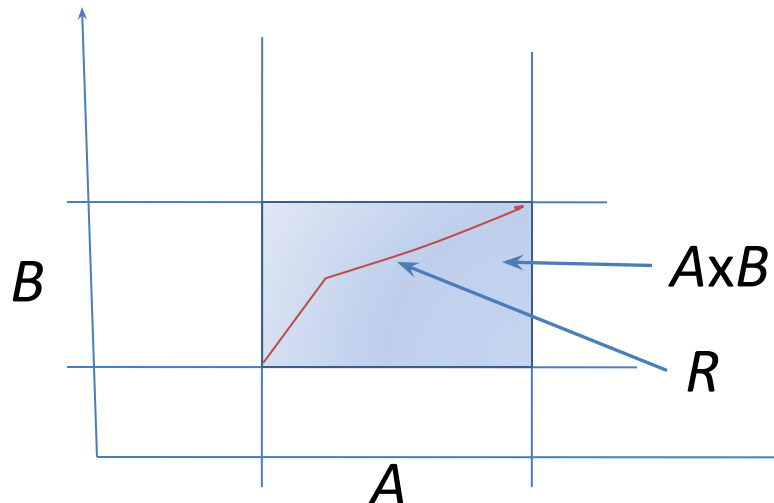
Если $A = B$, то говорят, что отношение задано, или определено, *на A* (или просто, что это — *отношение на множестве A*).

Если R — отношение из A в B и $(a, b) \in R$, то пишут aRb .

A — **область определения** отношения R ,

B — **множество его значений**.

Определение. Отношение $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ называется **обратным** к отношению R и часто обозначается через R^{-1} .



Свойства отношений

Определение. Пусть A — множество и R — отношение на A . Отношение R называется

- *рефлексивным*, если aRa для всех a из A ,
- *симметричным*, если aRb влечет bRa для a и b из A ,
- *транзитивным*, если aRb и bRc влекут aRc для a , b и c из A . Элементы a , b и c не обязаны быть различными.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.

Важное свойство любого отношения эквивалентности R , определенного на множестве A , заключается в том, что оно разбивает множество A на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности*.

Графы

Определение.

*Неупорядоченный граф G — это пара (A, R) , где A — множество элементов, называемых *вершинами* (или *узлами*), а R — отношение на множестве A .*

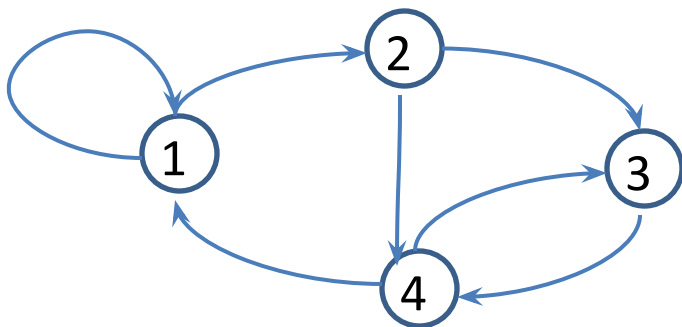
Если R — несимметричное отношение,

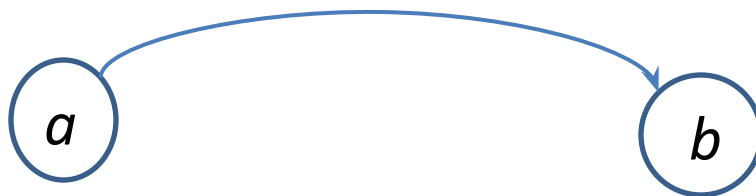
то G — *ориентированный граф*;

R — симметричное, то G — *неориентированный граф*.

Пример.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$.





Пара $(a, b) \in R$ называется **дугой** (или **ребром**) графа G .

Говорят, что дуга **выходит** из вершины a
и **входит** в вершину b .

Если (a, b) — дуга, то говорят,
что вершина a **предшествует** вершине b ,
а вершина b **следует** за вершиной a .

Вершина b **смежна** с вершиной a .

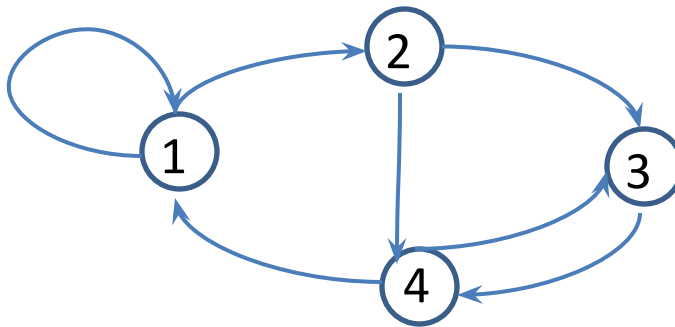
Определения.

Последовательность вершин $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $n \geq 1$, называется **путем** (или **маршрутом**) **длины** n из вершины a_0 в вершину a_n , если для каждого $1 \leq i \leq n$ существует дуга, выходящая из вершины a_{i-1} и входящая в вершину a_i .

Если существует путь из вершины a_0 в вершину a_n , то говорят, что a_n **достижима** из a_0 .

Циклом называется путь $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, в котором $a_0 = a_n$.

Граф называется **сильно связным**, если для любых двух разных вершин a и b существует путь из a в b .



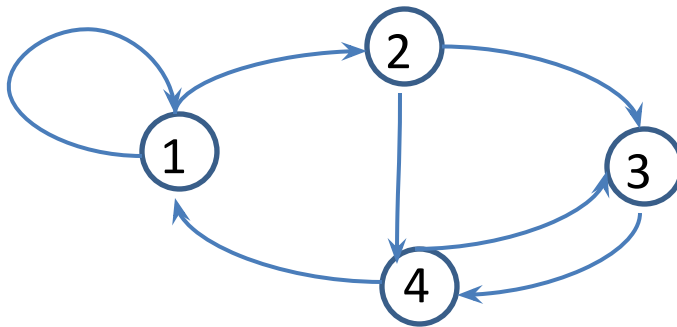
$(1, 2, 4, 3)$

$(1, 2, 3, 4, 1)$

Степень вершины

Степенью по входу (*полустепенью входа*) вершины a назовем число входящих в нее дуг, а степенью по выходу (*полустепенью исхода*) — число выходящих из нее дуг.

Если граф неориентированный, то *степень* вершины — это количество ребер, связанных с ней.



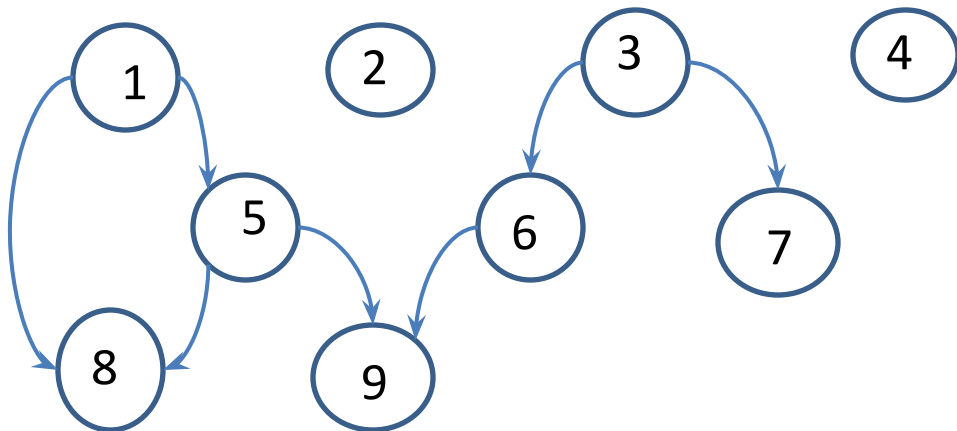
Для вершины 2:
полустепень входа =
1
полустепень исхода =
2

Ациклические графы

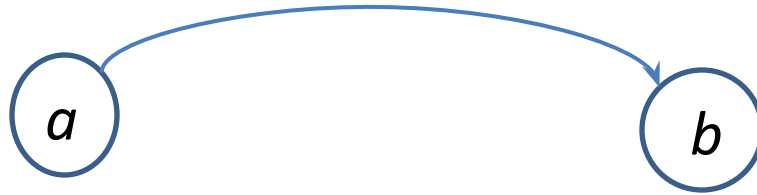
Ациклическим графом называется (ориентированный) граф, не имеющий циклов.

Вершину, степень по входу которой равна 0, назовем *базовой*.

Вершину, степень по выходу которой равна 0, назовем *листом* (или *концевой* вершиной).



Дуга и путь в ациклическом графе



Если (a, b) – дуга в ациклическом графе,
то a – **прямой предок** b ,
 b – **прямой потомок** a .

Если в ациклическом графе существует путь
из a в b ,
то a – **предок** b ,
 b – **потомок** a .

Дерево

(частный вид ациклического графа)

Определение. (Ориентированным) *деревом* T называется (ориентированный) граф $G = (A, R)$ со специальной вершиной $r \in A$, называемый *корнем*, у которого

- степень по входу вершины r равна 0,
- степень по входу всех остальных вершин дерева T равна 1,
- каждая вершина $a \in A$ достижима из r .

Дерево T обладает следующими свойствами:

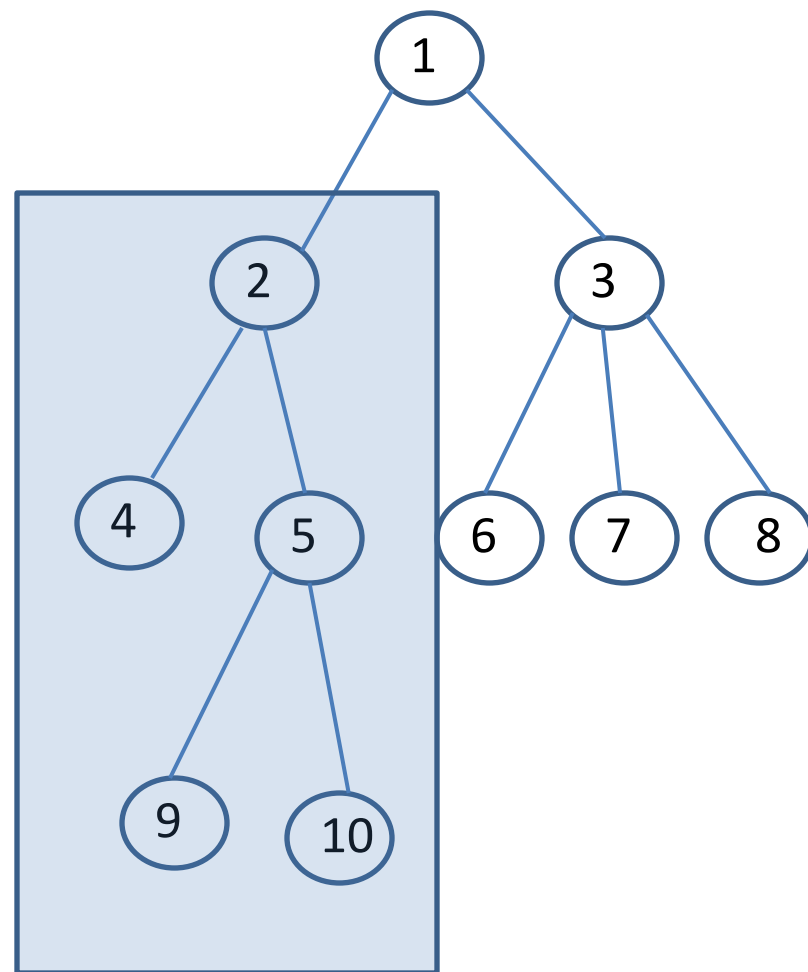
- T — ациклический граф,
- для каждой вершины дерева T существует единственный путь, ведущий из корня в эту вершину.

Поддеревом дерева $T = (A, R)$ называется любое дерево

$T' = (A', R')$, у которого

- 1) A' непусто и содержится в A ,
- 2) $R' = (A' \times A') \cap R$,
- 3) ни одна вершина из множества $A \setminus A'$ не является потомком вершины из множества A' .

Ориентированный граф, состоящий из нескольких деревьев, называется *лесом*.



Пусть $T=(A, R)$ – дерево, $(a, b) \in R$,
тогда

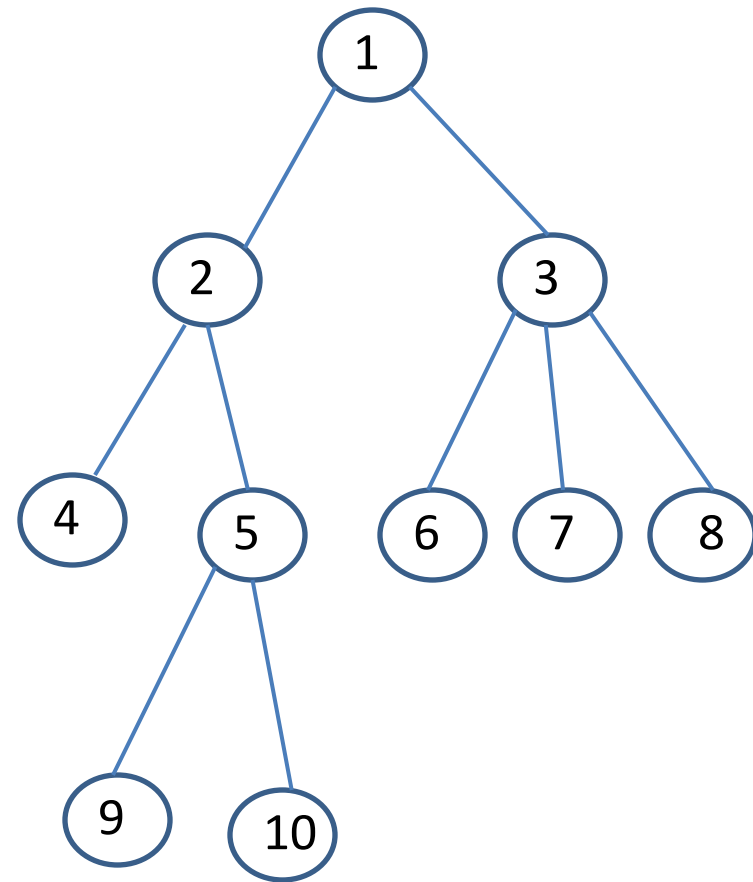
a – **отец** b , а b – **сын** a .

Глубина или **уровень** вершины –
длина пути от корня до этой
вершины.

Высота вершины – длина
максимального пути от этой
вершины до листа.

Высота дерева – длина
максимального пути от корня до
листа.

Глубина корня = 0.

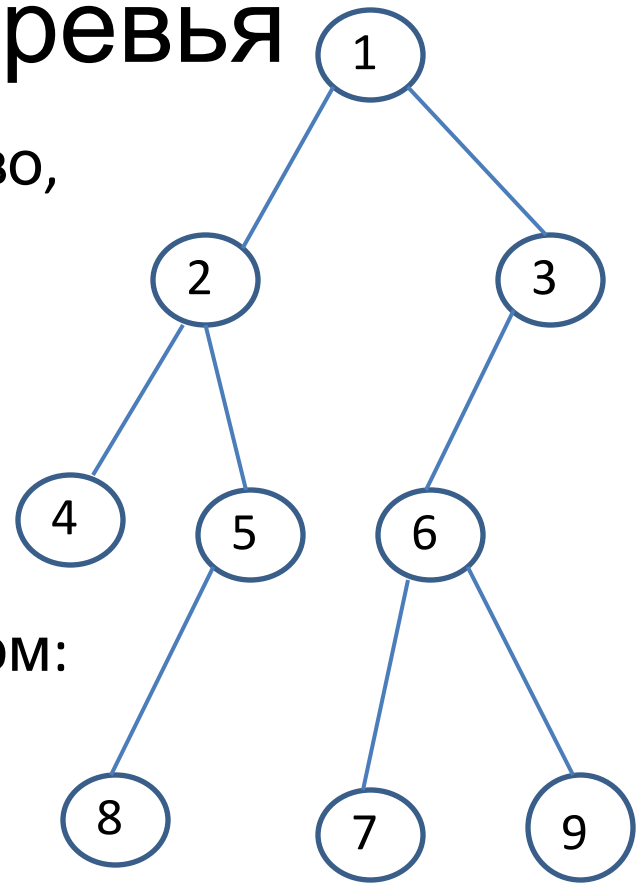


Бинарные деревья

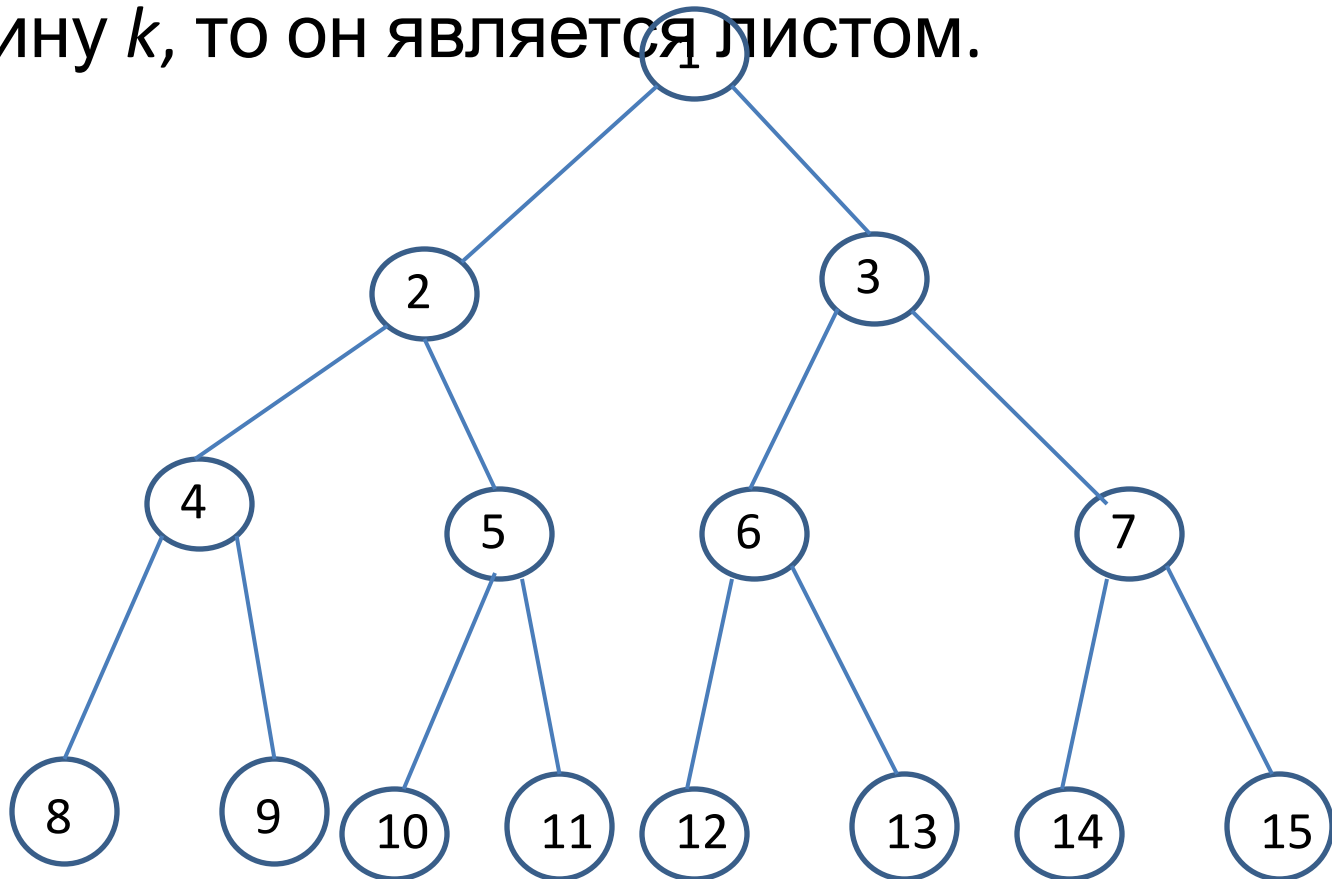
Упорядоченное дерево – это дерево, в котором множество сыновей каждой вершины упорядочено слева направо.

Бинарное дерево – это упорядоченное дерево, в котором:

- 1) любой сын – либо левый либо правый,
- 2) любой узел имеет не более одного левого и не более одного правого сына.



Бинарное дерево называется **полным**, если существует некоторое целое k , такое что любой узел глубины меньше k имеет как левого, так и правого сына, а если узел имеет глубину k , то он является листом.



Представление полных бинарных деревьев с помощью массива

Пусть $T[2^k-1]$ – массив для хранения вершин дерева, k - высота дерева.

В $T[1]$ хранится корень дерева.

Левый сын узла i расположен в позиции $2*i$,
правый сын – в позиции $2*i+1$.

Отец узла, находящегося в позиции $i > 1$,
расположен в позиции $\lfloor i/2 \rfloor$.