Лекция 2

Теория пределов

Числовая последовательность

1 2 3 4 … n… -аргумент

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

2 4 8 16 … 2^n… -члены последовательности

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

a_1 a_2 a_3 a_4 … a_n…

$$a_n = 2^n \qquad \left\{2^n\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \left\{a_n\right\}$$

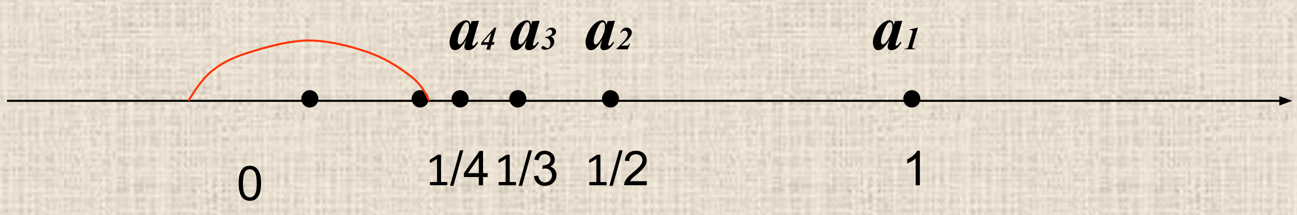
$a_n = \dfrac{1}{n}$: 1/2, 1/3, 1/4, ….

$$a_n = 2n - 1$$

$$a_n = (-1)^n$$

Предел числовой последовательности

$$a_n = \frac{1}{n}$$

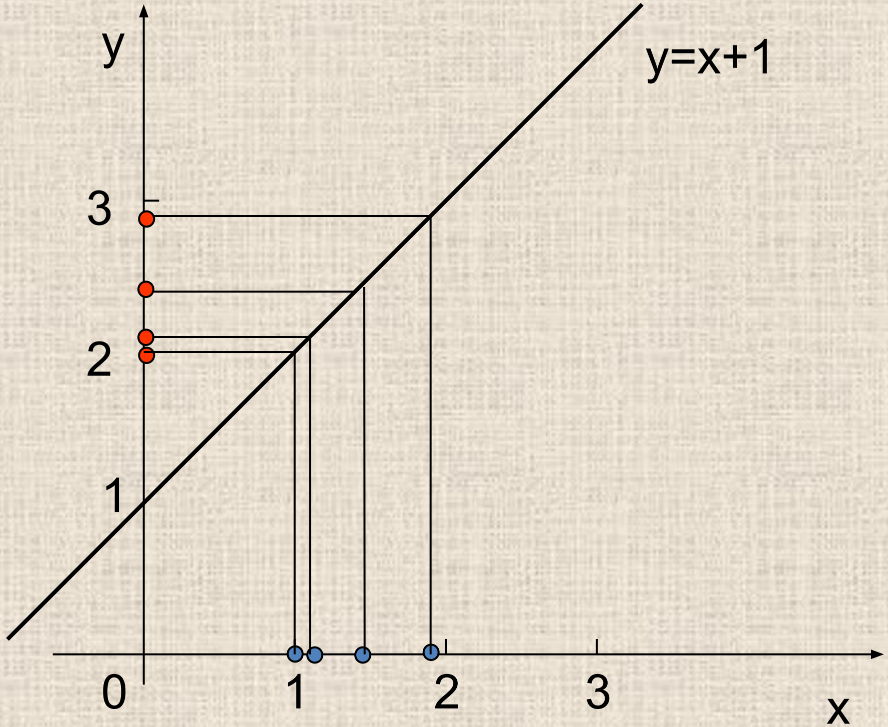


$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon):\ n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$$

Предел функции

- **Предел функции в точке** (по Гейне)



$$\{x_n\} \to 1$$

$$\{f(x_n)\} \to 2$$

$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \to 2} (x+1) = ?$$

$$\lim_{x \to 0} (x+1) = ?$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to A$$

•Предел функции в точке (по Коши)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in D(f) \Big| \quad 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

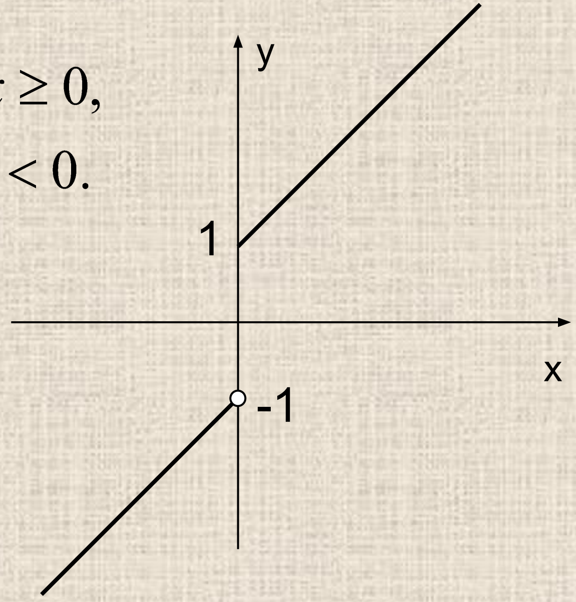
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D(f) \Big| \quad x \in S_\delta(x_0), x \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \in S_\varepsilon(A)$$

•Односторонние пределы

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ - справа

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ - слева

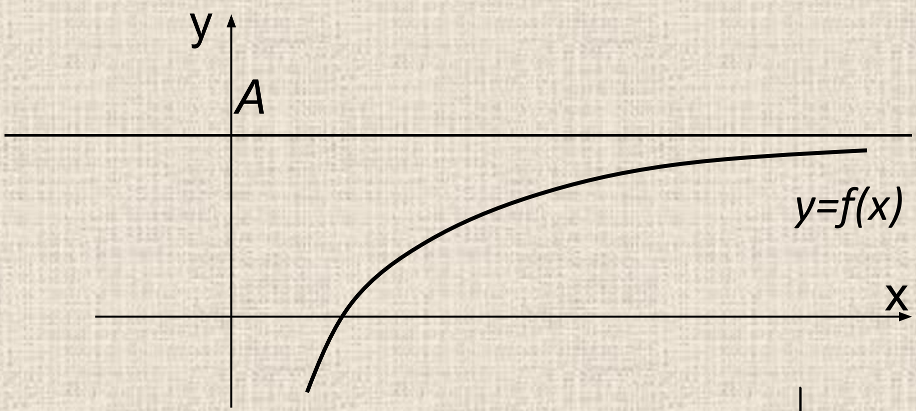
$$y = \begin{cases} x+1, \ \textit{если} \ \ x \geq 0, \\ x-1, \ \textit{если} \ \ x < 0. \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = -1$$

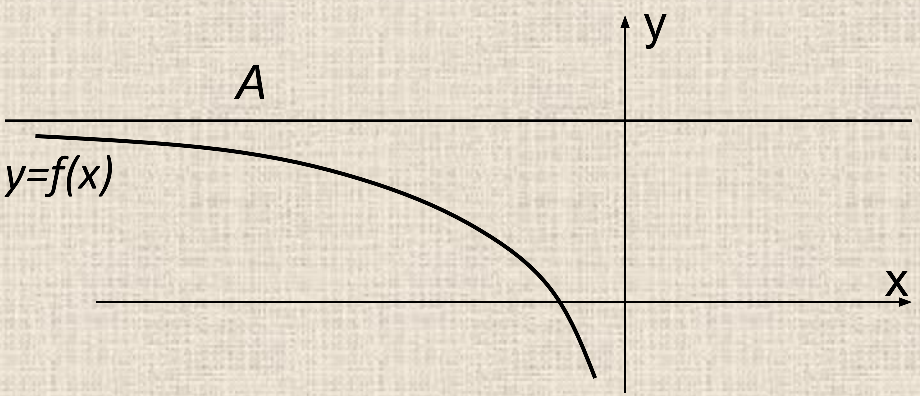
$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1$$

Бесконечные пределы



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

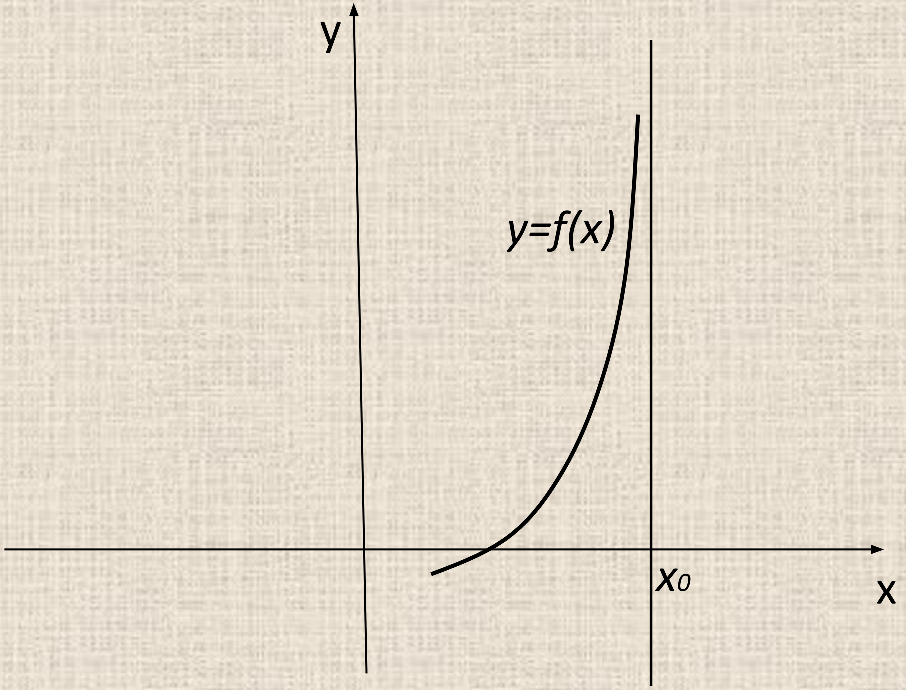
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in D(f) \;\Big|\; x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in D(f) \;\Big|\; x < -\frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$



$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in D(f) \ \Big| \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

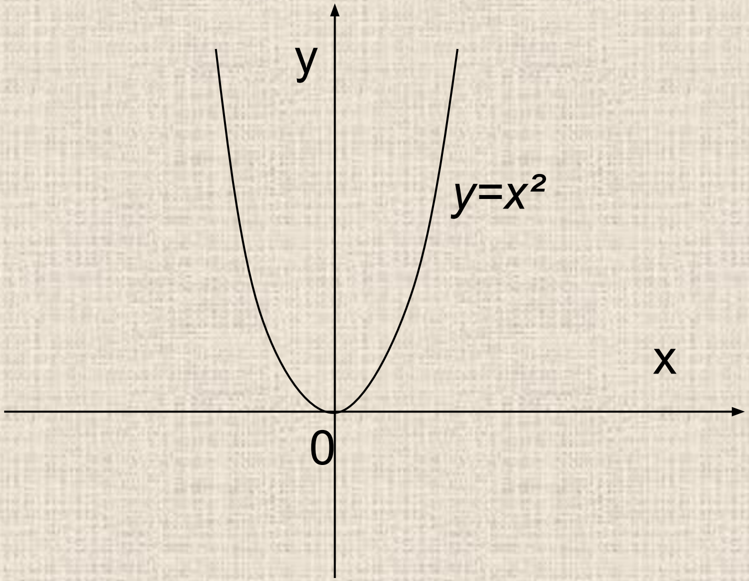
Бесконечно малые и бесконечно большие функции

$\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in D(f) \Big| \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

$\beta(x)$ - бесконечно большая при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in D(f) \Big| \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\beta(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$$



$$\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

Теорема о связи между функцией и ее пределом

- Если функция при $x \to x_0$ имеет конечный предел, равный A, то разность между функцией и значением ее предела бесконечно мала при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$$

Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$ и

$\alpha(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0, то

функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.

Если $\beta(x)$ - бесконечно большая при $x \to x_0$,

то функция $\dfrac{1}{\beta(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Свойства бесконечно малых функций

1. $0+0=0.$

2. $0\cdot 0=0.$

3. $0\cdot C=0.$

4. $0\cdot(\textit{ограниченная функция})=0.$

5. $\frac{0}{\cancel{0}}=0.$

$$\frac{0}{0}=?$$

Свойства бесконечно больших функций

1. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty.$

2. $(-\infty)+(-\infty)=-\infty.$

3. $\infty+(\textit{ограниченная функция})=\infty.$

4. $\infty\cdot\infty=\infty.$

5. $\infty\cdot\cancel{0}=\infty.$

6. $\dfrac{\infty}{\cancel{\infty}}=\infty.$ $\qquad\dfrac{\infty}{\infty}=?.$

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$ функции и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A.$

- $A \neq 0$, $A \neq 1$: α и β – бесконечно малые одинакового порядка;

$$\alpha = o(\beta);$$

- $A = 0$: α – более высокого порядка малости,

- $A = \pm\infty$: β – более высокого порядка малости;

- $A = 1$: α и β – эквивалентные бесконечно малые, $\alpha \sim \beta$.

Свойства эквивалентных бесконечно малых

1. $\alpha \sim \beta \leftrightarrow \beta \sim \alpha$ (рефлексивность)
2. $\alpha \sim \beta,\ \beta \sim \gamma \ \leftrightarrow \ \alpha \sim \gamma$ (транзитивность)
3. $\alpha \sim \beta \rightarrow \alpha = \beta + o(\alpha)$ (эквивалентные бесконечно малые отличаются друг от друга на бесконечно малую высшего порядка).
4. Под знаком предела в отношении или произведении бесконечно малые можно заменять эквивалентными.

Основные теоремы о пределах

1. О пределе постоянной.
2. О единственности предела.

Необходимые условия существования конечного предела:

3. О локальной ограниченности.
4. О локальном повторении функцией свойств предела.

Достаточные условия существования конечного предела:

5. Об арифметике.
6. О промежуточной функции.
7. О пределе монотонной ограниченной функции.

- **Теорема об арифметике**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$, при условии $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$

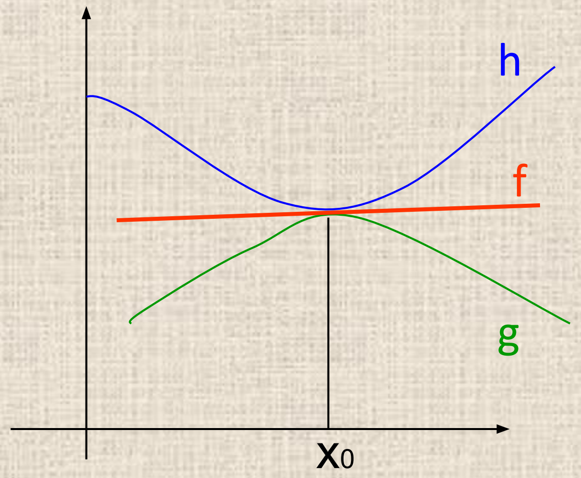
Пример: $$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2+5x-1} = \frac{3}{5}$$

$$f(x) = x \qquad g(x) = -x + 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

- Теорема о промежуточной функции («о двух милиционерах»)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} g(x) = A \\ &\lim_{x\to x_0} h(x) = A \\ &g(x) \le f(x) \le h(x) \end{aligned}\right] \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$



Замечательные пределы

- Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге (в радианах) равен 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x}=1$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1.$$

- Числовая последовательность $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел, равный ***e*:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Следствия:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \qquad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Вопросы к семинару 2.

- Числовая последовательность и ее предел.
- Предел функции в точке: определение по Гейне, по Коши.
- Односторонние пределы.
- Бесконечные пределы.
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.
- Теорема о связи между функцией и ее пределом.
- Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.
- Сравнение бесконечно малых функций.
- Свойства бесконечно малых функций.
- Основные теоремы о пределах: о пределе постоянной, о единственности предела, о локальной ограниченности, о локальном повторении функцией свойств предела, об арифметике, о промежуточной функции, о пределе монотонной ограниченной функции.
- Замечательные пределы.

Техника вычисления пределов

Найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+4}{x^2+3}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin 2x\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^2-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{9-x}}{x-3}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+4x+5}{7x^2+8x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-4x+2}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 7x}{4x}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{7x}$