



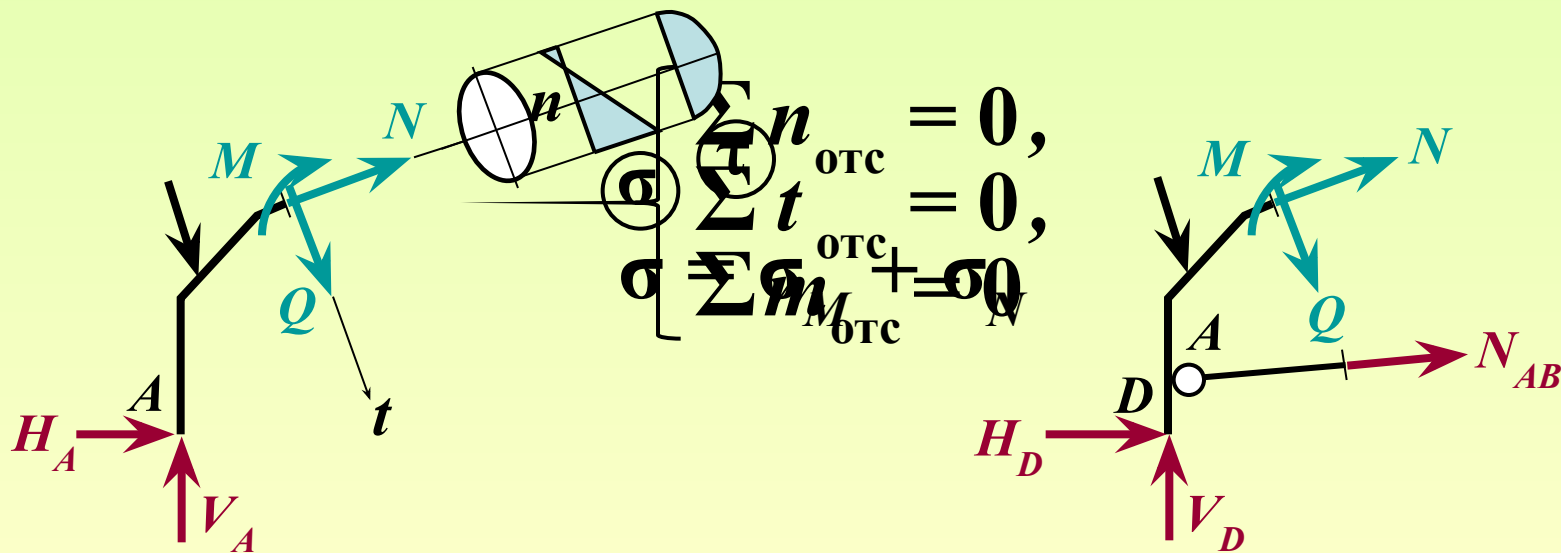
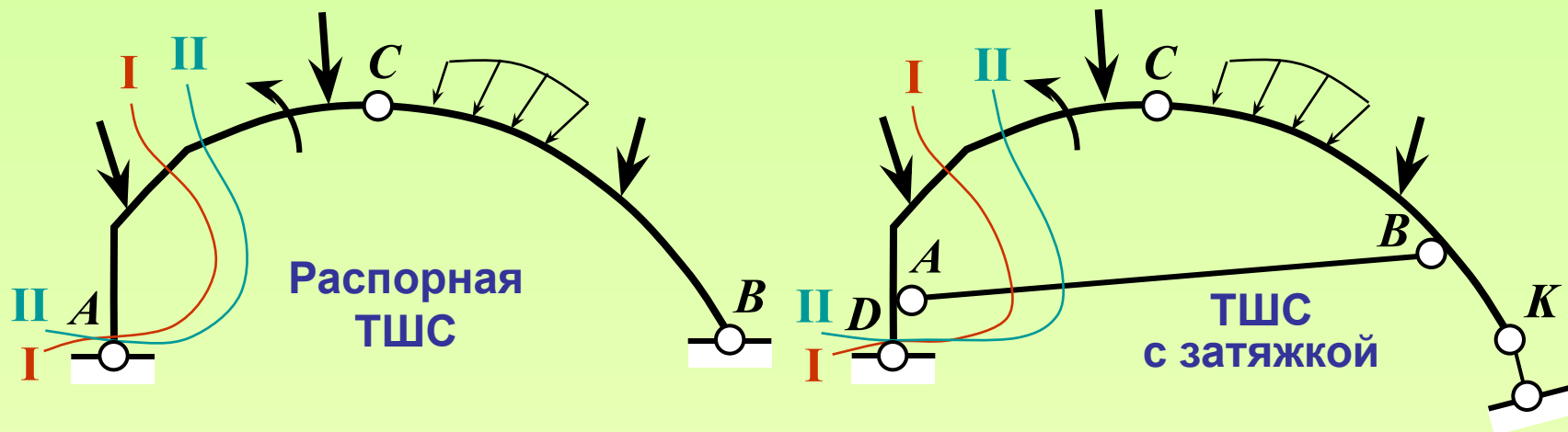
# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. Часть I

## РАСЧЁТ ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМ

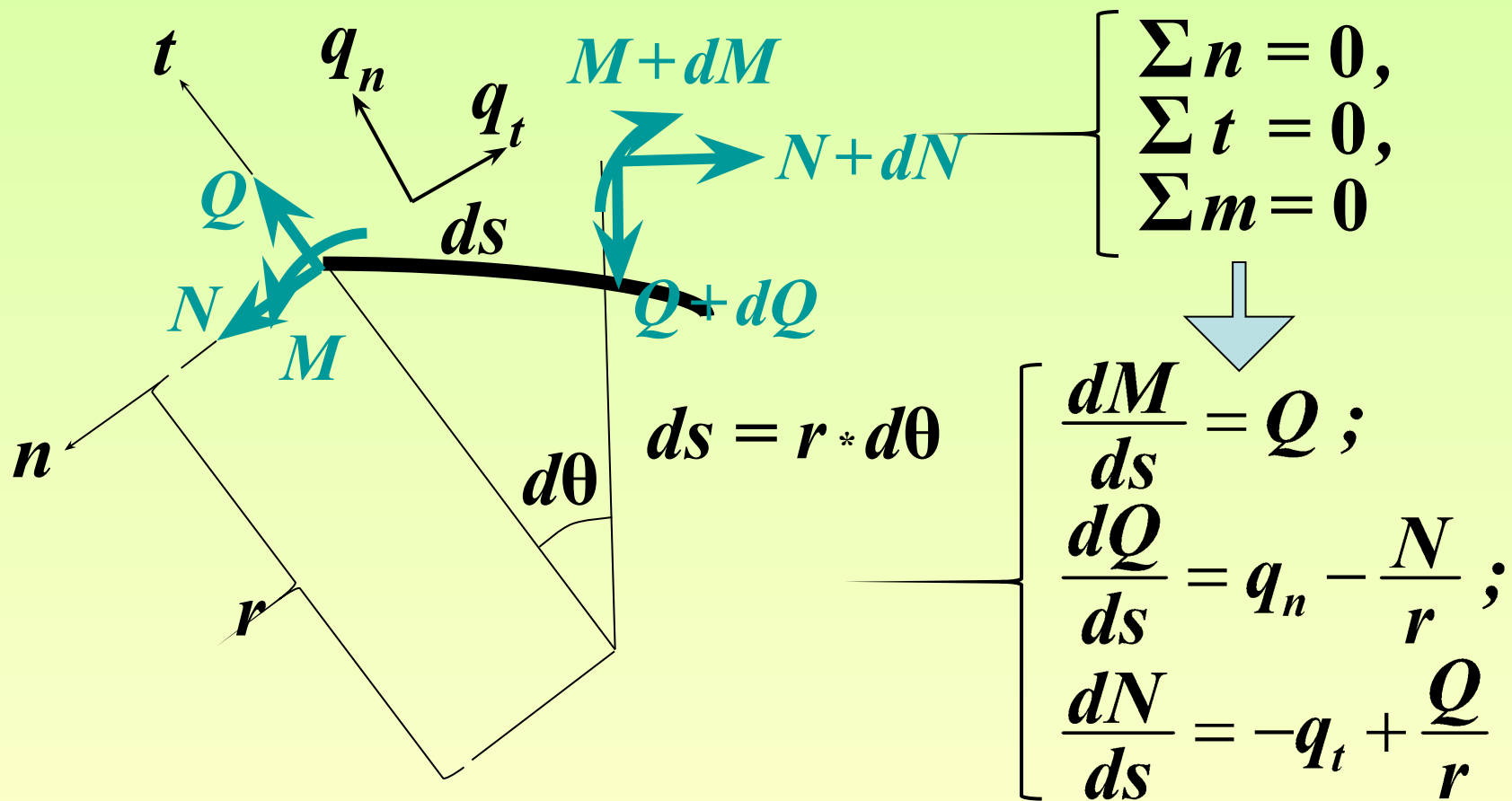
ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ.  
ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ

**2**

# Внутренние силовые факторы и напряжения в сечениях элементов ТШС

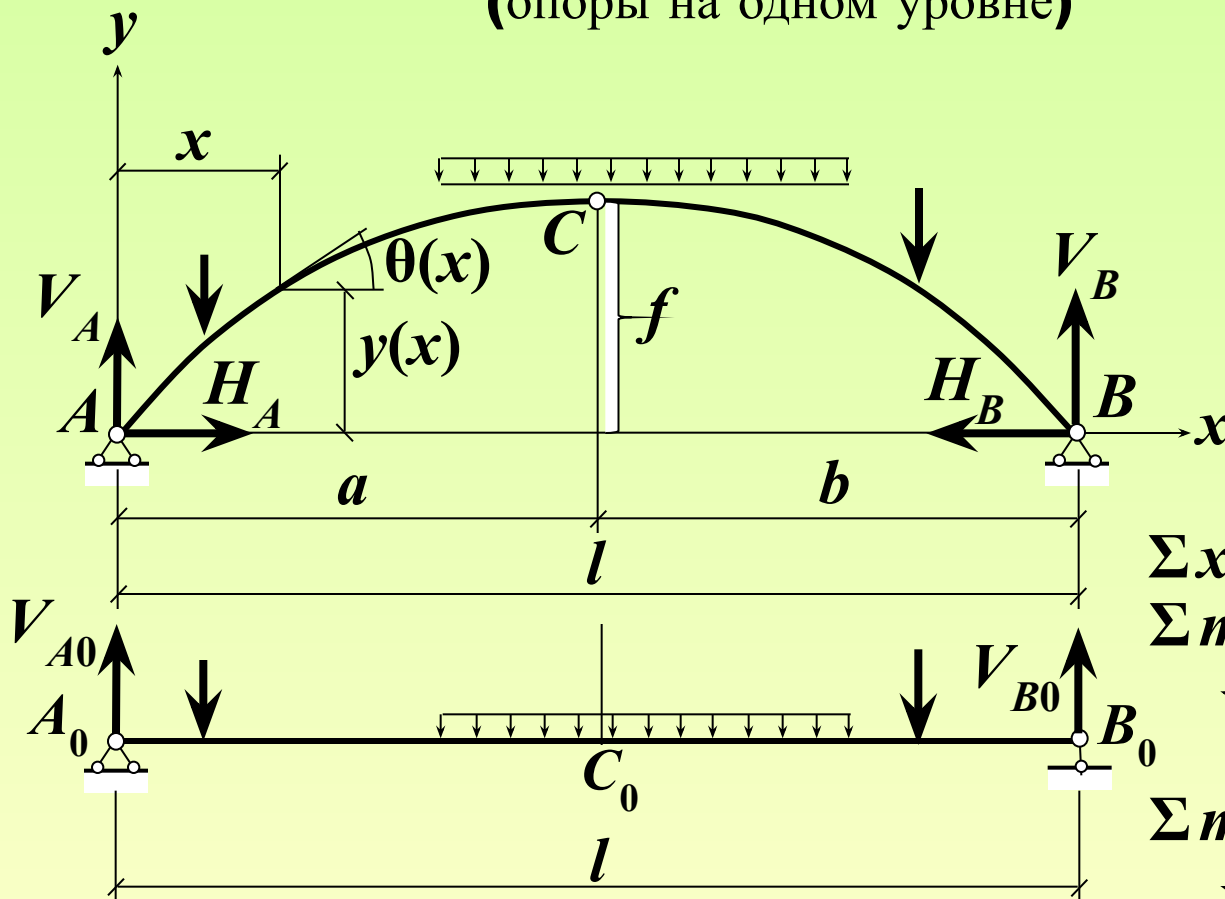


# Дифференциальные уравнения равновесия элемента плоского стержня



# Внутренние силовые факторы в сечениях элементов ТШС (арки, рамы) при действии вертикальной нагрузки

(опоры на одном уровне)



Опорные реакции  
трёхшарнирной  
арки (рамы)

$$H = M_{C0} / f$$

$$V_A = V_{A0}$$

$$V_B = V_{B0}$$

$\Sigma x$   
 $\Sigma m$

$$\downarrow 0 = \Sigma m_{A,F} / l$$

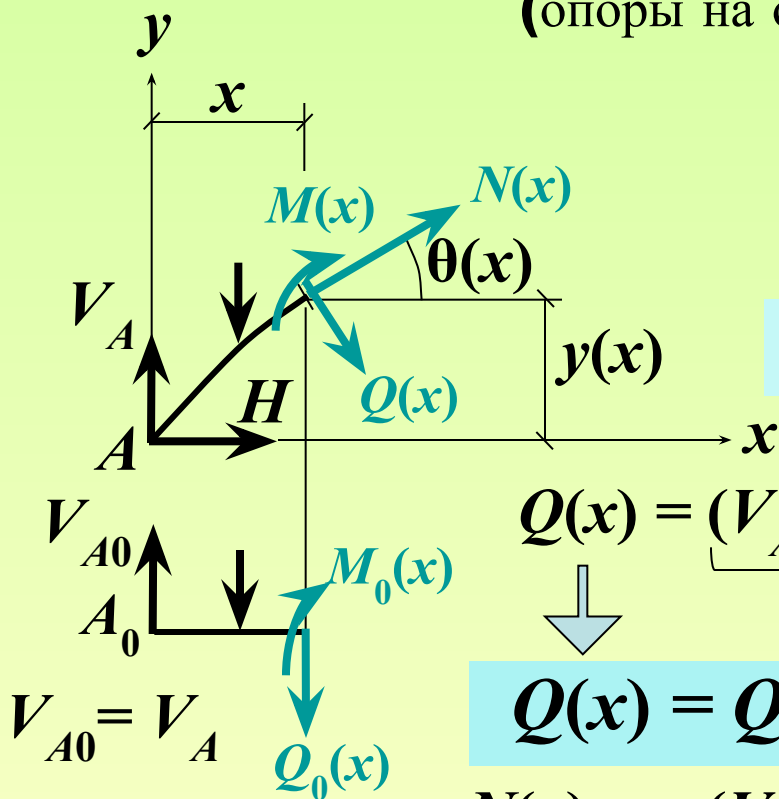
$\Sigma m_B =$

$$\downarrow 0 = \Sigma m_{B,F} / l$$

$V_{A0} = \Sigma m_{B0,F} / l$   $\leftarrow$  Опорные реакции балки  $\rightarrow$   $V_{B0} = \Sigma m_{A0,F} / l$

# Внутренние силовые факторы в сечениях элементов ТШС (арки, рамы) при действии вертикальной нагрузки

(опоры на одном уровне)



$$M(x) = V_A * x + \underbrace{\sum m_{F,отс}}_{M_0(x)} - H * y(x)$$

$$M(x) = M_0(x) - H * y(x)$$

$$Q(x) = \underbrace{(V_A + \sum y_{F,отс})}_{Q_0(x)} * \cos \theta(x) - H * \sin \theta(x)$$

$$Q(x) = Q_0(x) * \cos \theta(x) - H * \sin \theta(x)$$

$$N(x) = - \underbrace{(V_A + \sum y_{F,отс})}_{Q_0(x)} * \sin \theta(x) - H * \cos \theta(x)$$

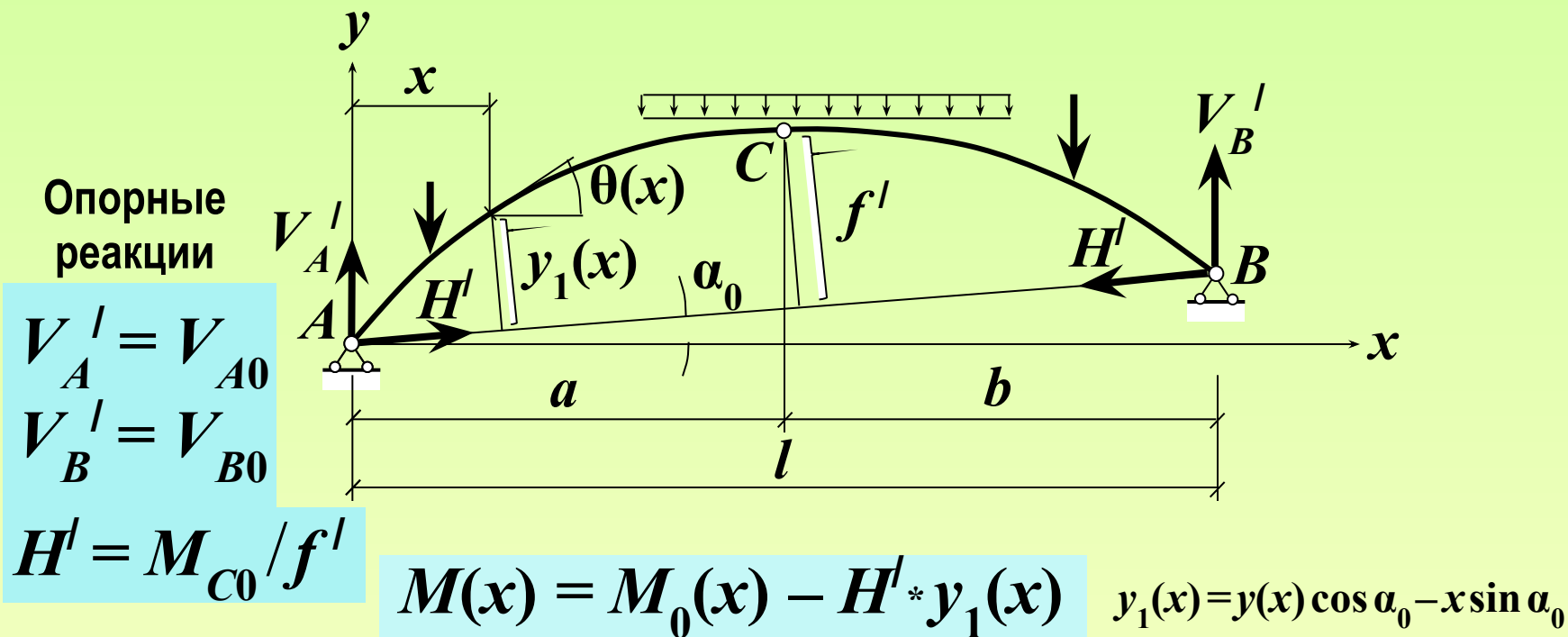
$$N(x) = - [ Q_0(x) * \sin \theta(x) + H * \cos \theta(x) ]$$

**Примечание:**

в вершине арки,  
где  $\theta(x) = 0$ :

$$N_{\text{верш}} = -H; \quad Q_{\text{верш}} = Q_0$$

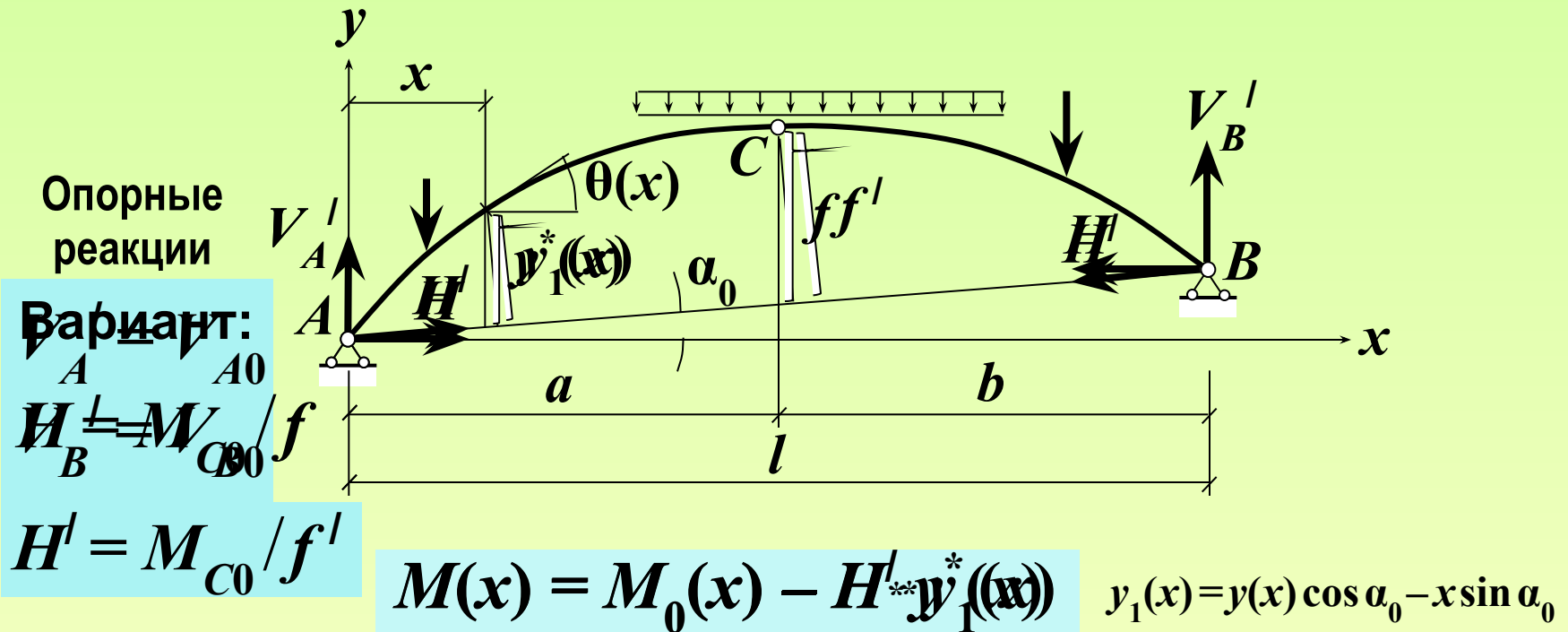
# Внутренние силовые факторы в сечениях элементов ТШС с опорами на разных уровнях при действии вертикальной нагрузки



$$Q(x) = Q_0(x) * \cos \theta(x) - H^I * \sin [\theta(x) - \alpha_0]$$

$$N(x) = - \{ Q_0(x) * \sin \theta(x) + H^I * \cos [\theta(x) - \alpha_0] \}$$

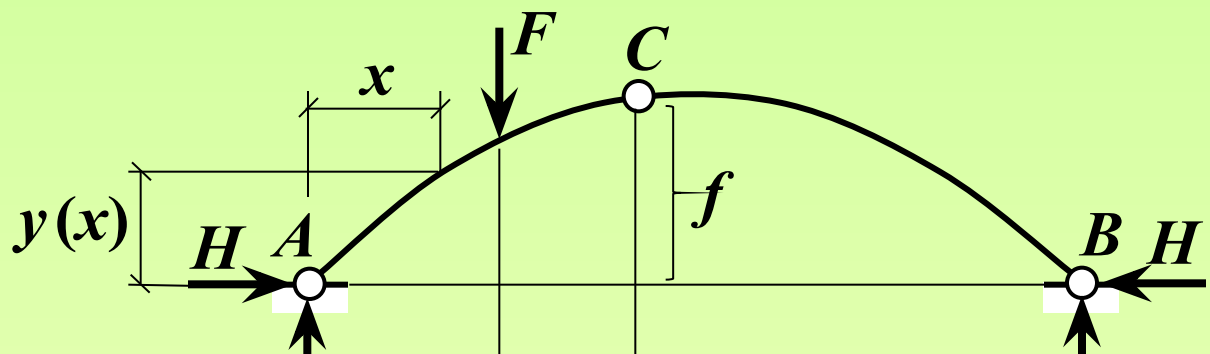
# Внутренние силовые факторы в сечениях элементов ТШС с опорами на разных уровнях при действии вертикальной нагрузки



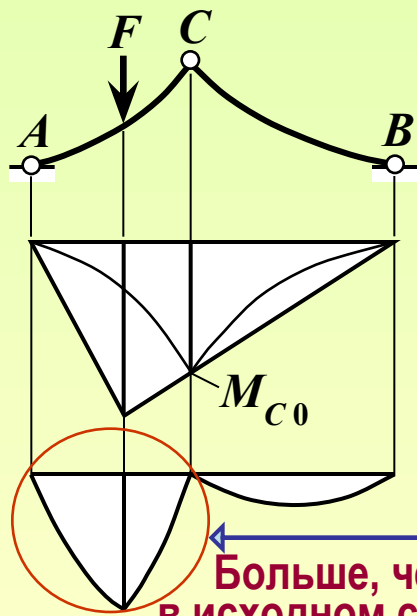
$$Q(x) = Q_0(x) \cos \theta(x) - \frac{H'' \cdot \sin[\theta(x) - \alpha_0]}{\cos \alpha_0}$$

$$N(x) = \left\{ Q_0(x) \sin \theta(x) + \frac{H'' \cdot \cos[\theta(x) - \alpha_0]}{\cos \alpha_0} \right\}$$

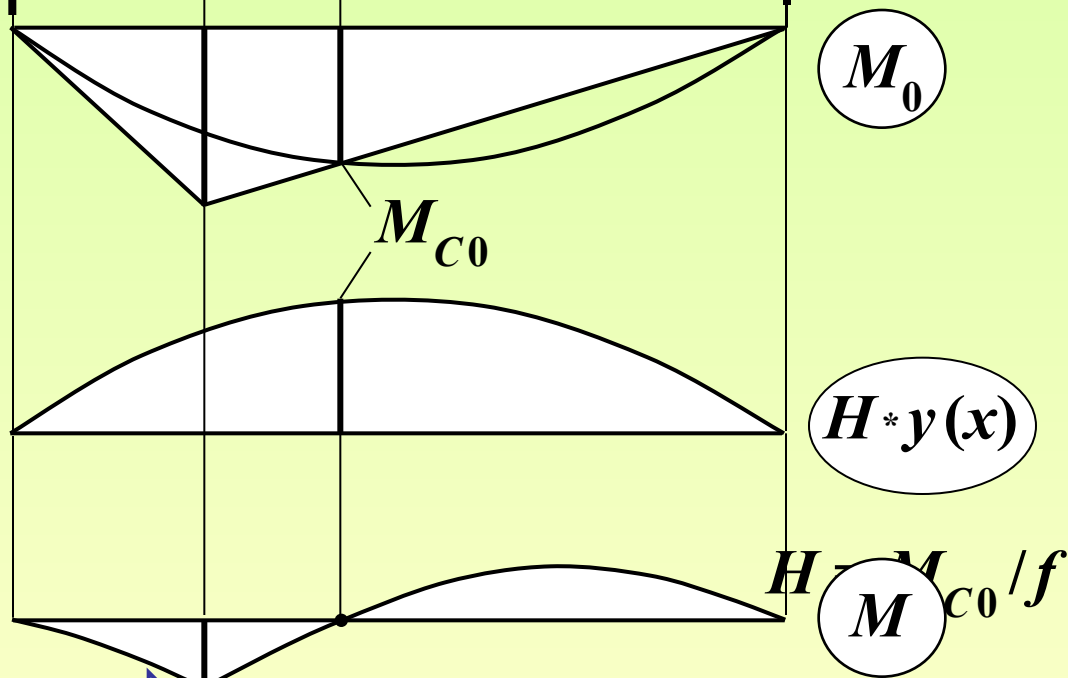
# Пример



При другом  
очертании оси:

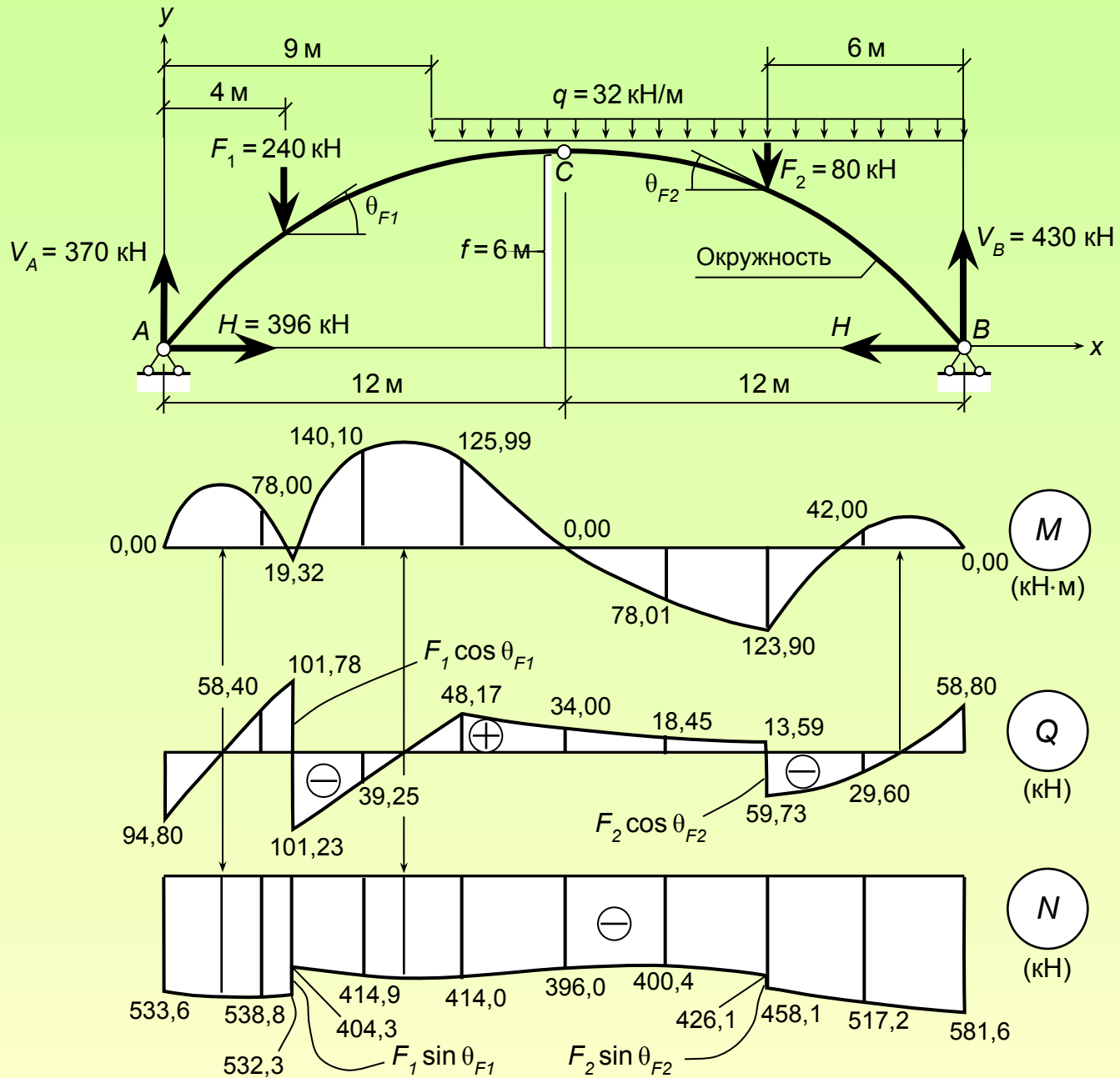


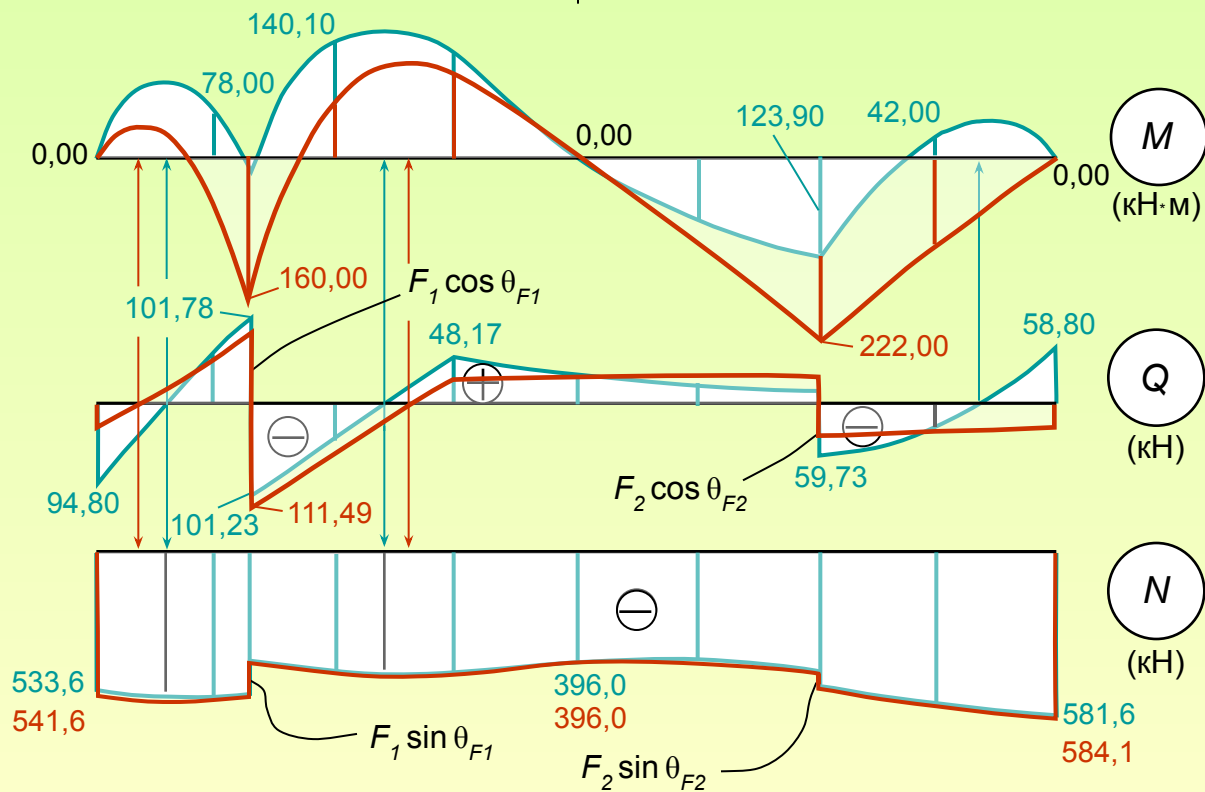
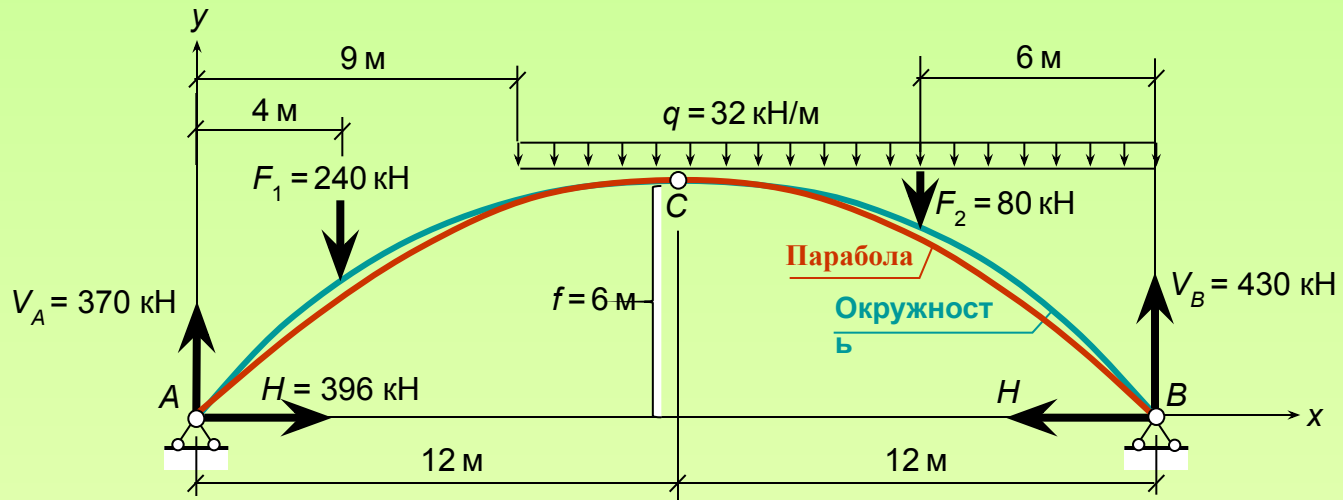
Больше, чем  
в исходном случае

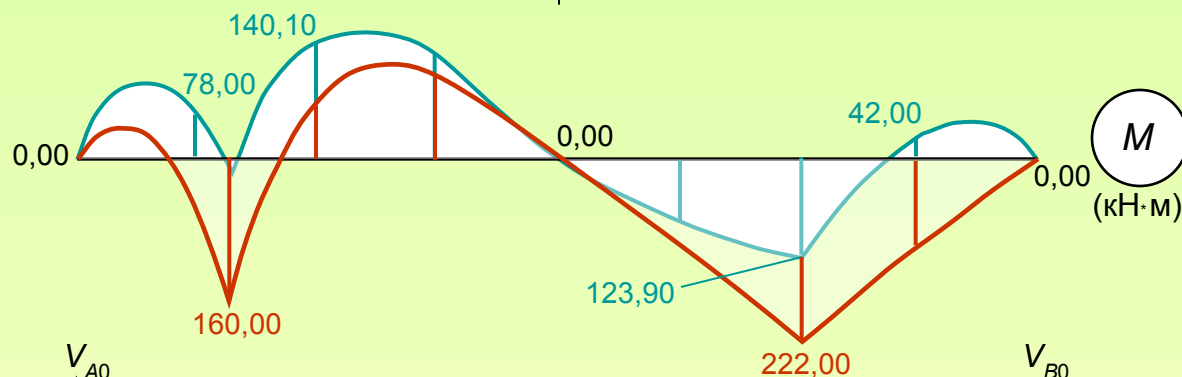
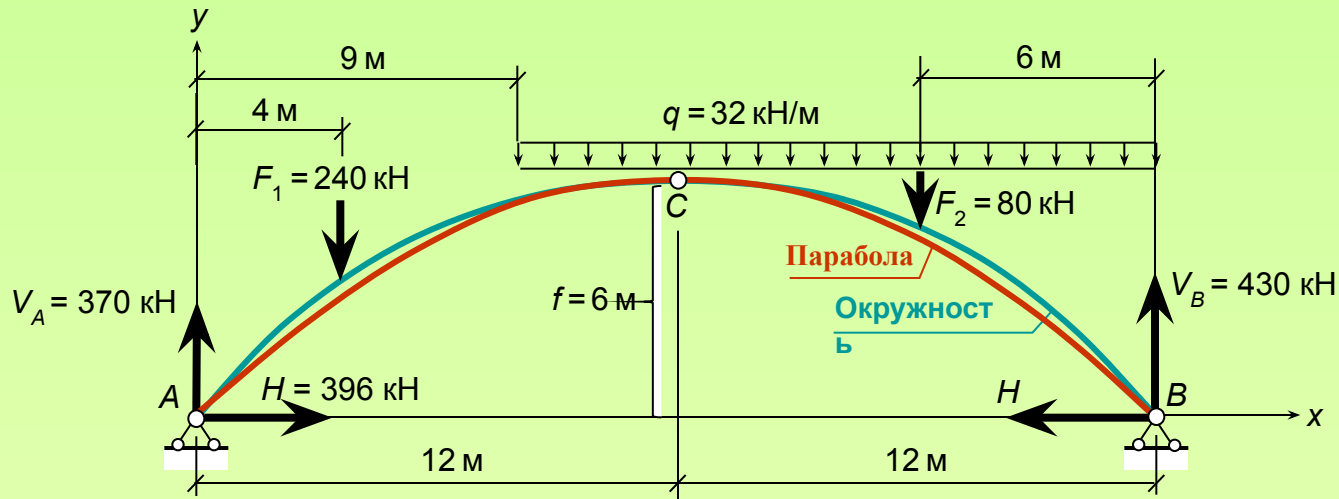


$$M = M_0 - H \cdot y(x)$$



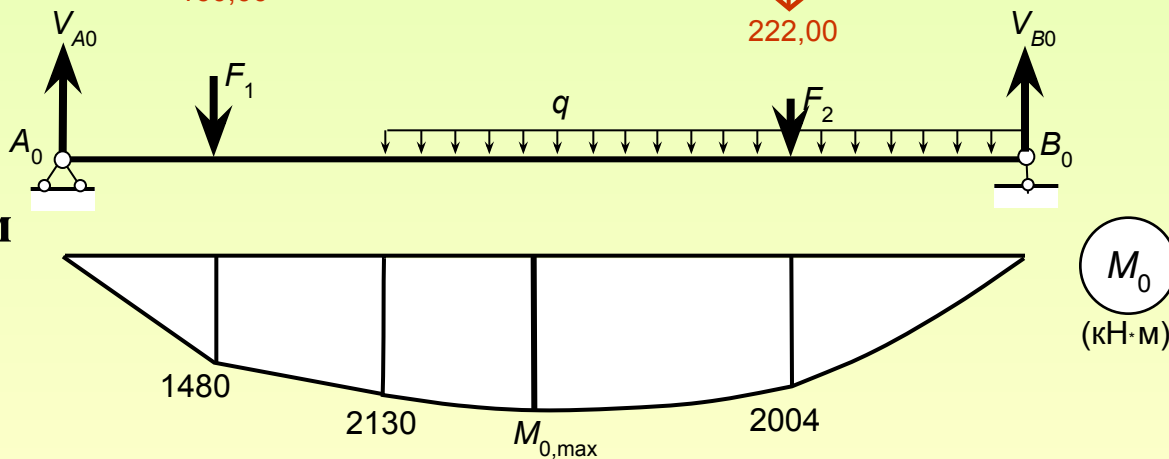






Для сравнения:

$$M_{0,max} = 2394 \text{ кН}\cdot\text{м}$$



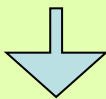
# Трёхшарнирные системы (арки и рамы) с рациональным очертанием оси

Критерий рациональности – **безмоментность**:

$$M(x) = 0$$

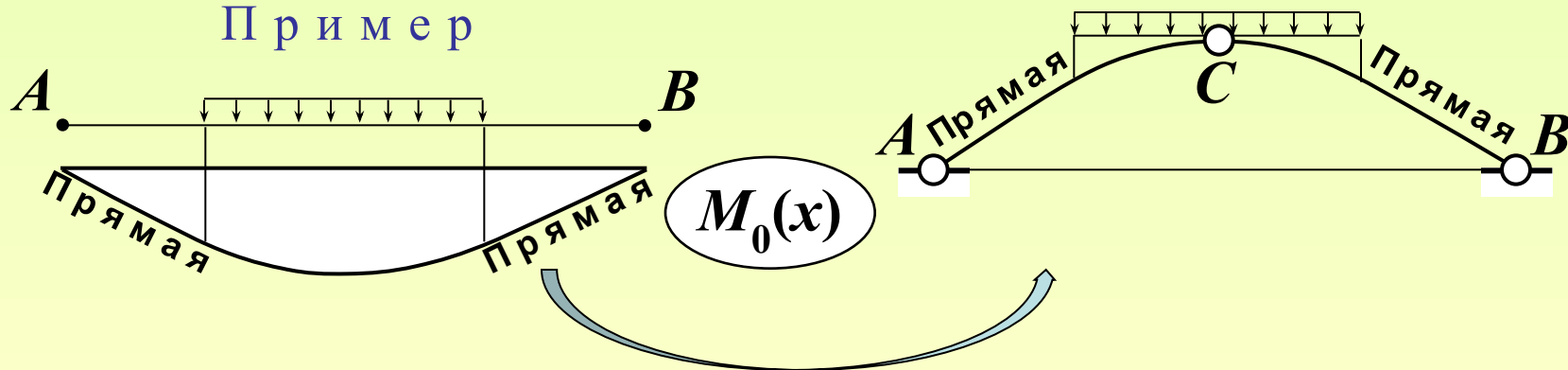
Рациональное очертание оси при вертикальных нагрузках:

$$M(x) = M_0(x) - H \cdot y(x) = 0$$



$$y(x) = \frac{1}{H} \cdot M_0(x)$$

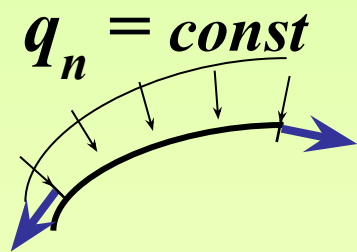
Пример



# Трёхшарнирные системы (арки и рамы) с рациональным очертанием оси

Критерий рациональности – **безмоментность**:  
 $M(x) = 0$

Рациональное очертание оси при равномерной  
гидростатической нагрузке ( $q_n = \text{const}$ ,  $q_t = 0$ )



Из дифференциальных уравнений равновесия:

$$\frac{dM}{ds} = Q \Rightarrow \frac{d(0)}{ds} = 0 \Rightarrow Q = 0$$

$$\frac{dQ}{ds} = q_n - \frac{N}{r} \Rightarrow \frac{d(0)}{ds} = 0 \Rightarrow N = q_n r$$

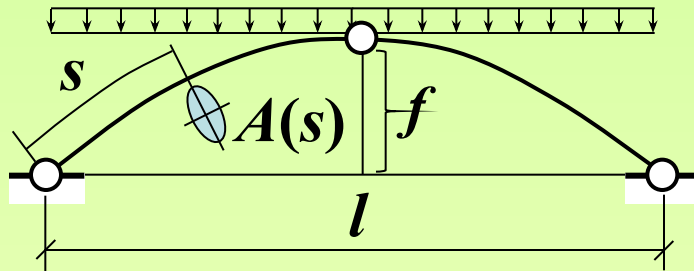
$$\frac{dN}{ds} = -q_t + \frac{Q}{r} \Rightarrow \frac{dN}{ds} = 0 \Rightarrow N = \text{const} = q_n r$$

$r = \text{const}$  – окружность

# Понятие об оптимальной стреле подъёма арки с рациональным очертанием оси

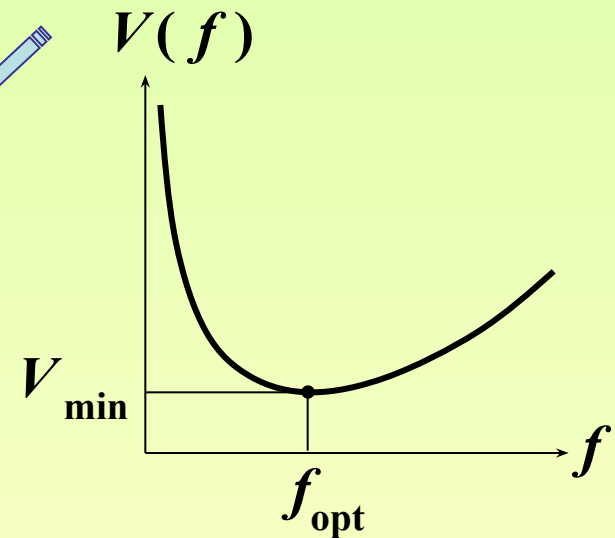
Целевая функция –  
объём материала арки

$$V = \int_L A(s) ds \rightarrow \min_f$$

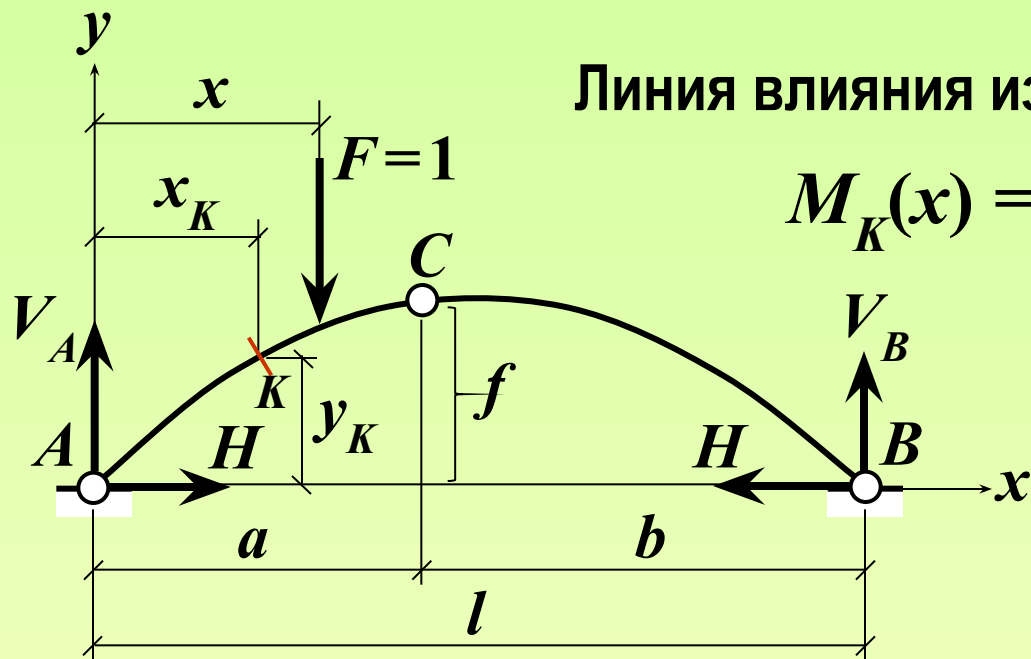


Результаты оптимизации  
с ограничением по прочности

Нагрузка	Форма оси	$f_{opt} / l$	
		Постоян. сечение	Равно- прочн.
Вертикальная равномерная	Парабола	0,342	0,433
Равномерная гидростатич.	Окружность	0,326	



# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

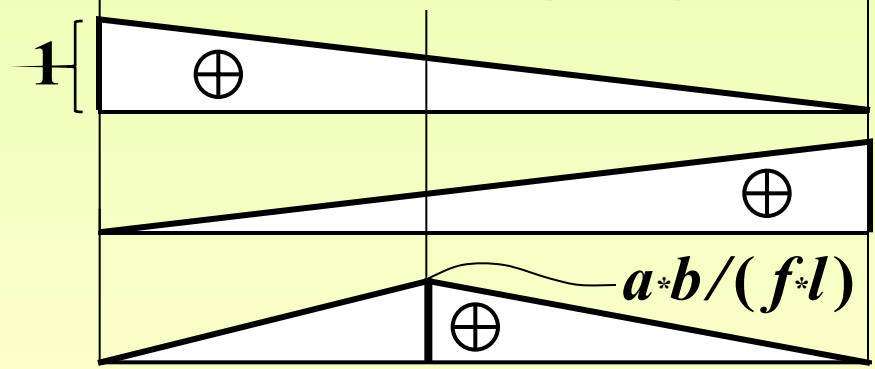


Линия влияния изгибающего момента

$$M_K(x) = M_{0K}(x) - H(x) * y_K$$

$$\begin{aligned} \text{Л.В. } M_K &= \\ &= \text{Л.В. } M_{0K} - \\ &- y_K * \text{Л.В. } H \end{aligned}$$

Линии влияния опорных реакций



$$\text{Л.В. } V_A = \text{Л.В. } V_{A0}$$

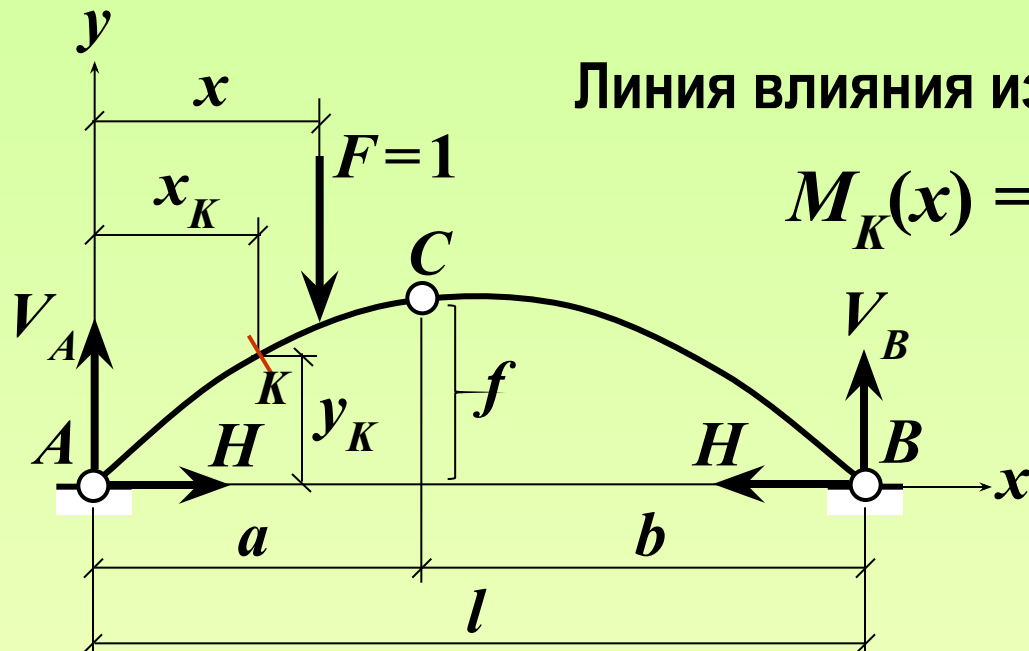
$$\text{Л.В. } V_B = \text{Л.В. } V_{B0}$$

$$\text{Л.В. } H$$

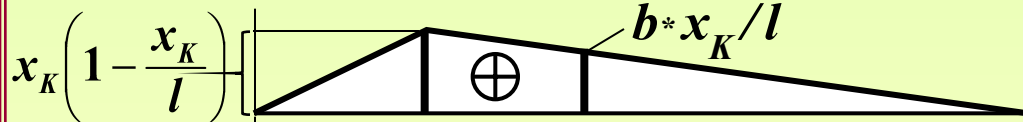
# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

Линия влияния изгибающего момента

$$M_K(x) = M_{0K}(x) - H(x) * y_K$$



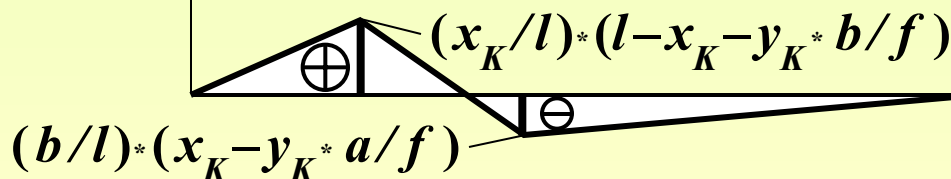
$$\begin{aligned} \text{Л.В. } M_K &= \\ &= \text{Л.В. } M_{0K} - \\ &- y_K * \text{Л.В. } H \end{aligned}$$



Л.В.  $M_{0K}$



Л.В.  $H * y_K$

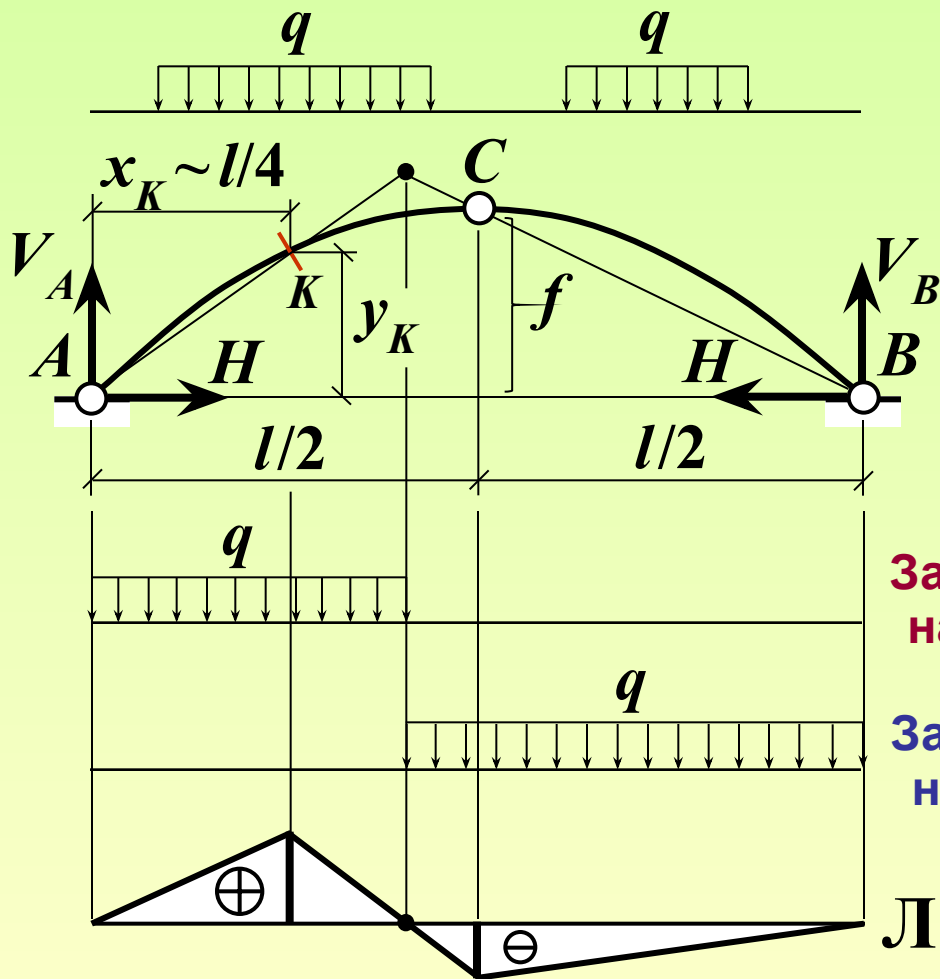


Л.В.  $M_K$



# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

Невыгоднейшее нагружение симметричной арки  
равномерно распределённой вертикальной нагрузкой



$M_{K,max}$   
 $M_{K,min}$  } ?

**Вывод:**  
приблизённо

$0,4l$  от опоры,  
ближайшей к сечению

Загружение  
на  $M_{K,max}$

Загружение  
на  $M_{K,min}$

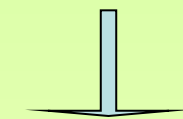
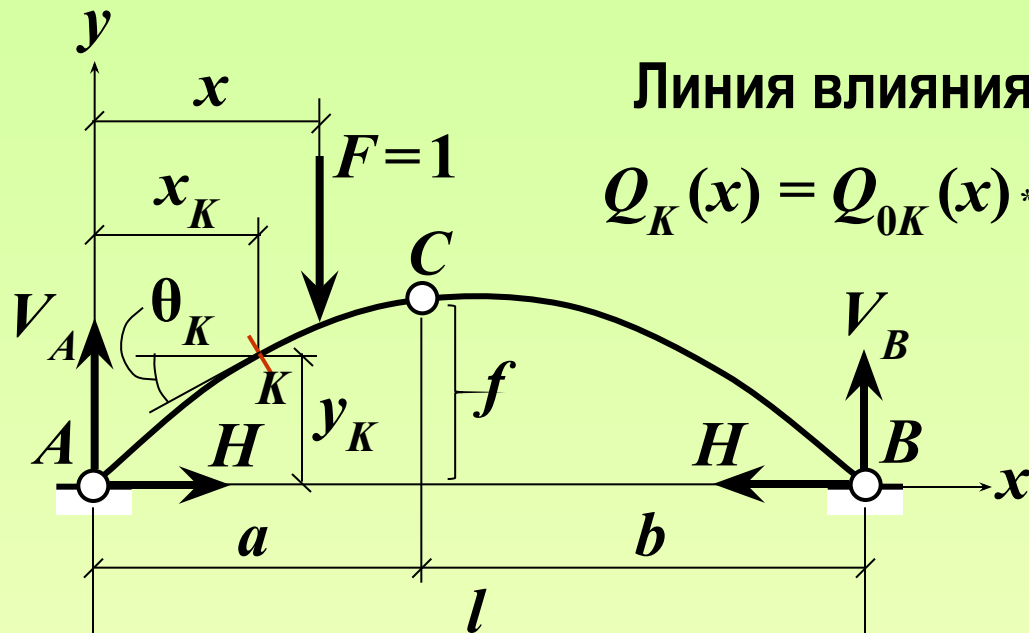
$0,6l$  от противо-  
положной опоры

Л.В.  $M_K$

# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

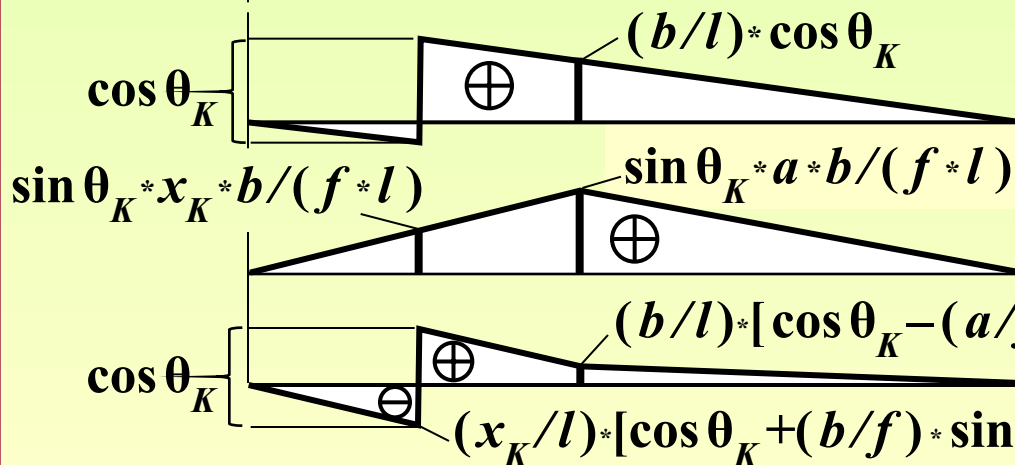
Линия влияния поперечной силы

$$Q_K(x) = Q_{0K}(x) * \cos \theta_K - H(x) * \sin \theta_K$$



**Л.В.  $Q_K =$**

$$= \cos \theta_K * \text{Л.В. } Q_{0K} - \sin \theta_K * \text{Л.В. } H$$



Л.В.  $Q_{0K} * \cos \theta_K$

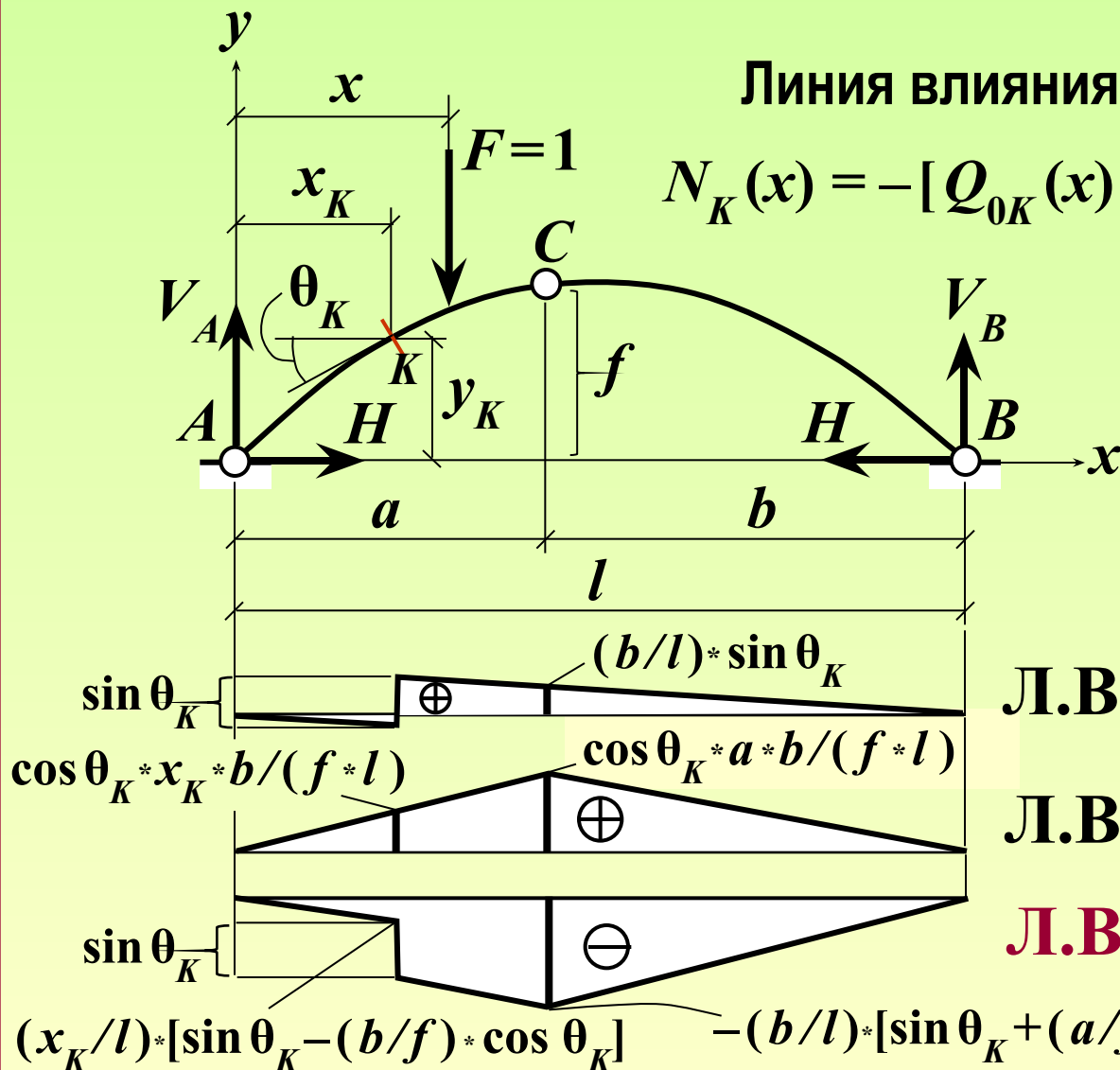
Л.В.  $H * \sin \theta_K$

**Л.В.  $Q_K$**

# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

Линия влияния продольной силы

$$N_K(x) = -[Q_{0K}(x) \cdot \sin \theta_K + H(x) \cdot \cos \theta_K]$$



$$\begin{aligned} \text{Л.В. } N_K &= \\ &= -\sin \theta_K \cdot \text{Л.В. } Q_{0K} - \\ &\quad - \cos \theta_K \cdot \text{Л.В. } H \end{aligned}$$

$$\text{Л.В. } Q_{0K} \cdot \sin \theta_K$$

$$\text{Л.В. } H \cdot \cos \theta_K$$

$$\text{Л.В. } N_K$$

$$-(b/l) \cdot [\sin \theta_K + (a/f) \cdot \cos \theta_K]$$

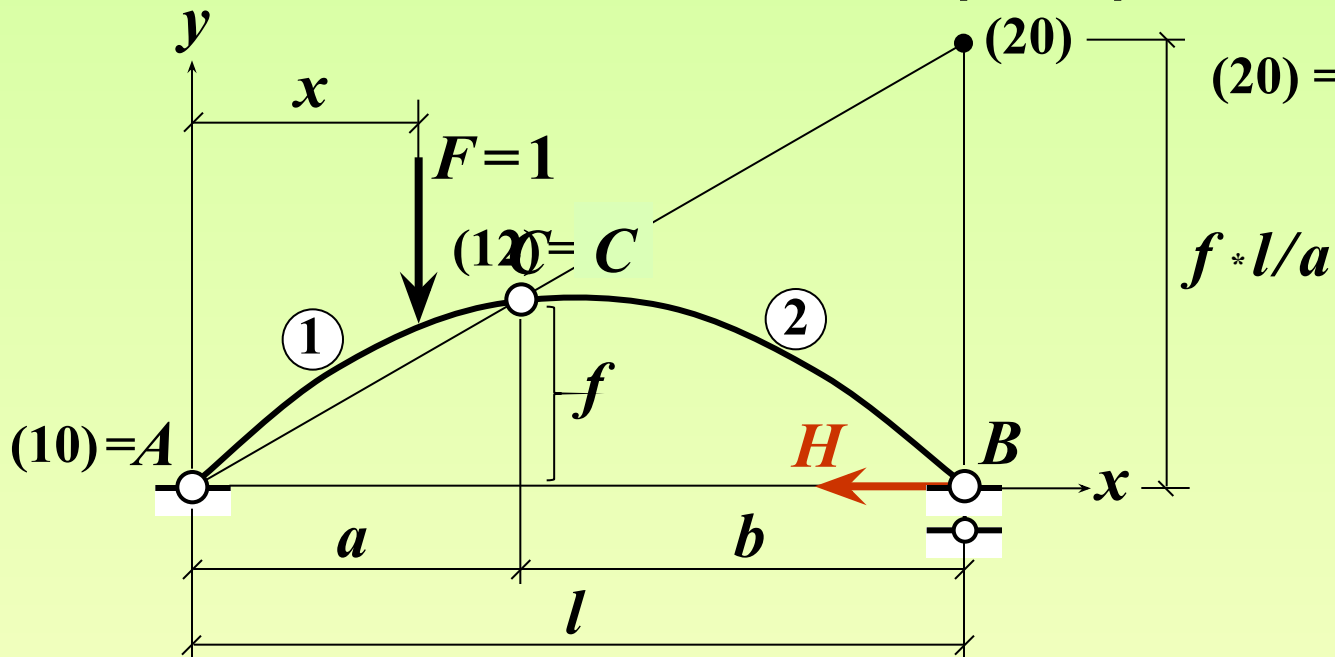
# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

$$S = -\frac{\delta_F}{\delta_S}$$

Линия влияния распора

$$(20) = (21)(10) + \text{O.C.}$$



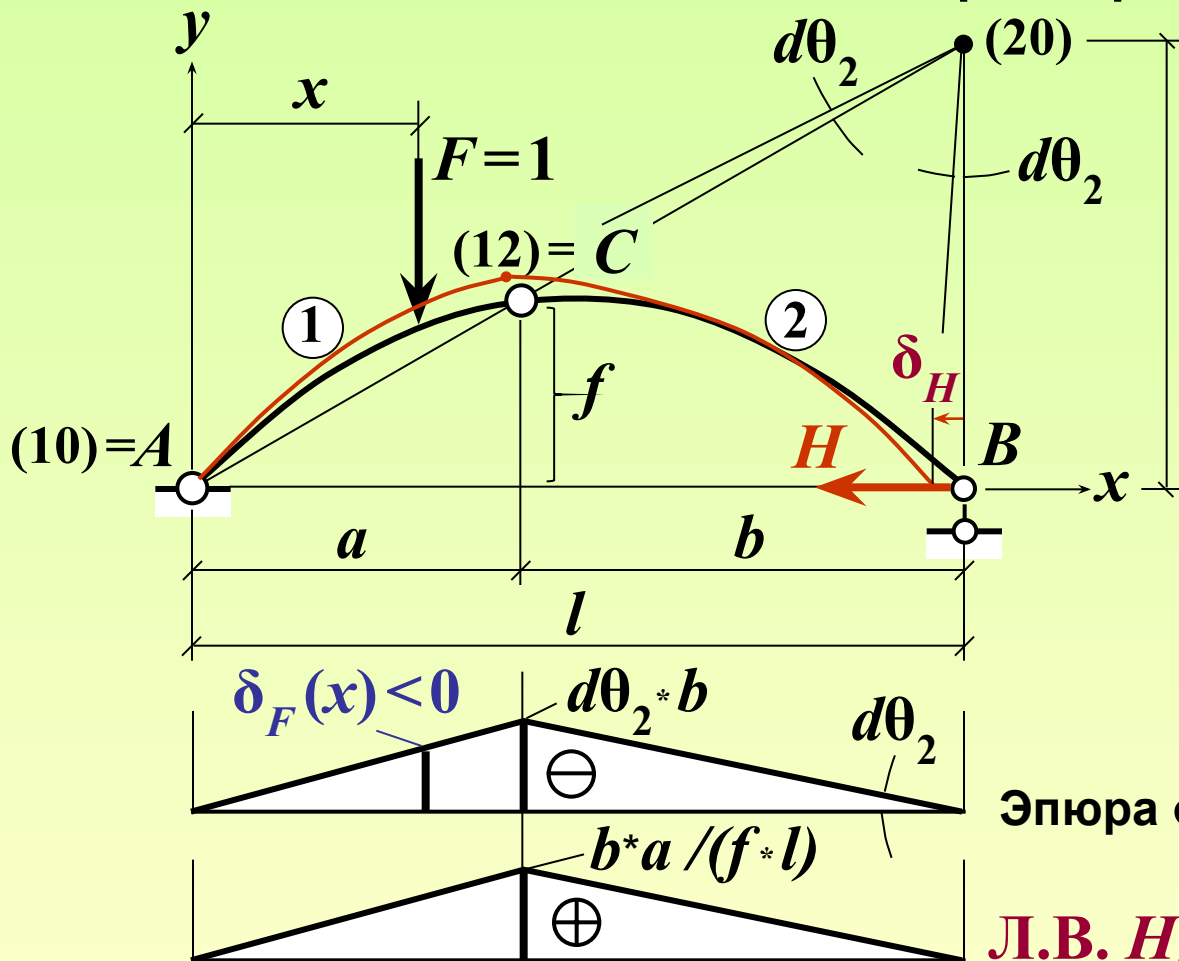
# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

Линия влияния распора

$$S = -\frac{\delta_F}{\delta_S}$$

$$(20) = (21)(10) + \text{O.C.}$$



$$\delta_H = d\theta_2 * f * l / a$$

$$d\theta_2 = \delta_H * a / (f * l)$$

Эпюра  $\delta_F$

$$H(x) = -\frac{\delta_F(x)}{\delta_H}$$

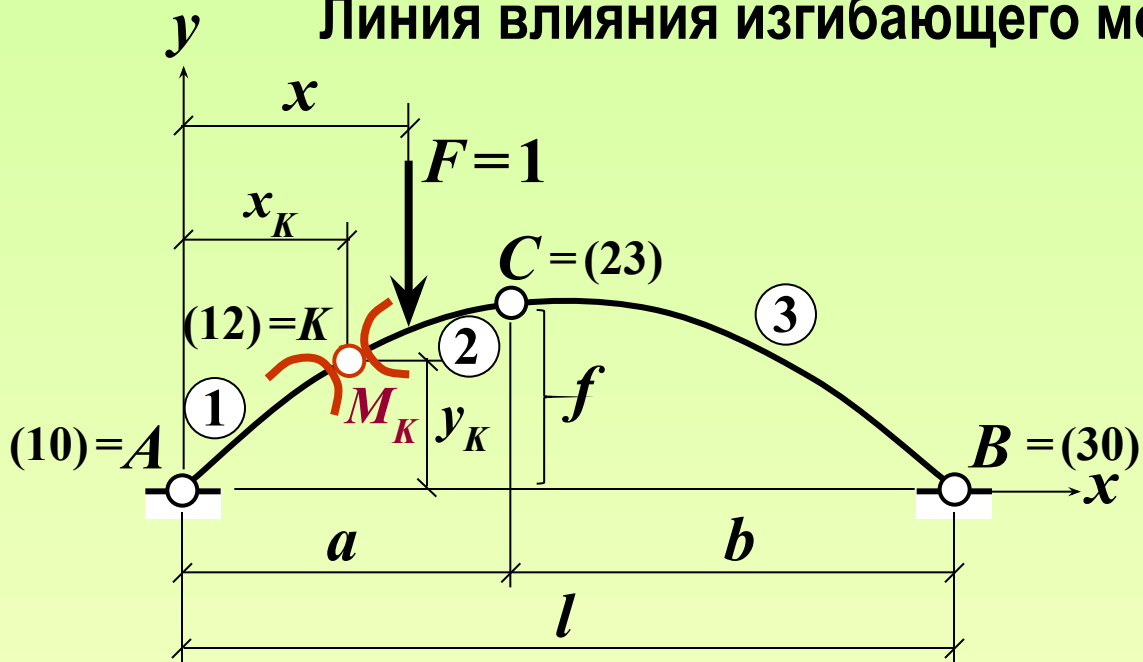
Л.В. H

# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

$$M = -\frac{\delta_F}{\delta_M}$$

Линия влияния изгибающего момента



# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

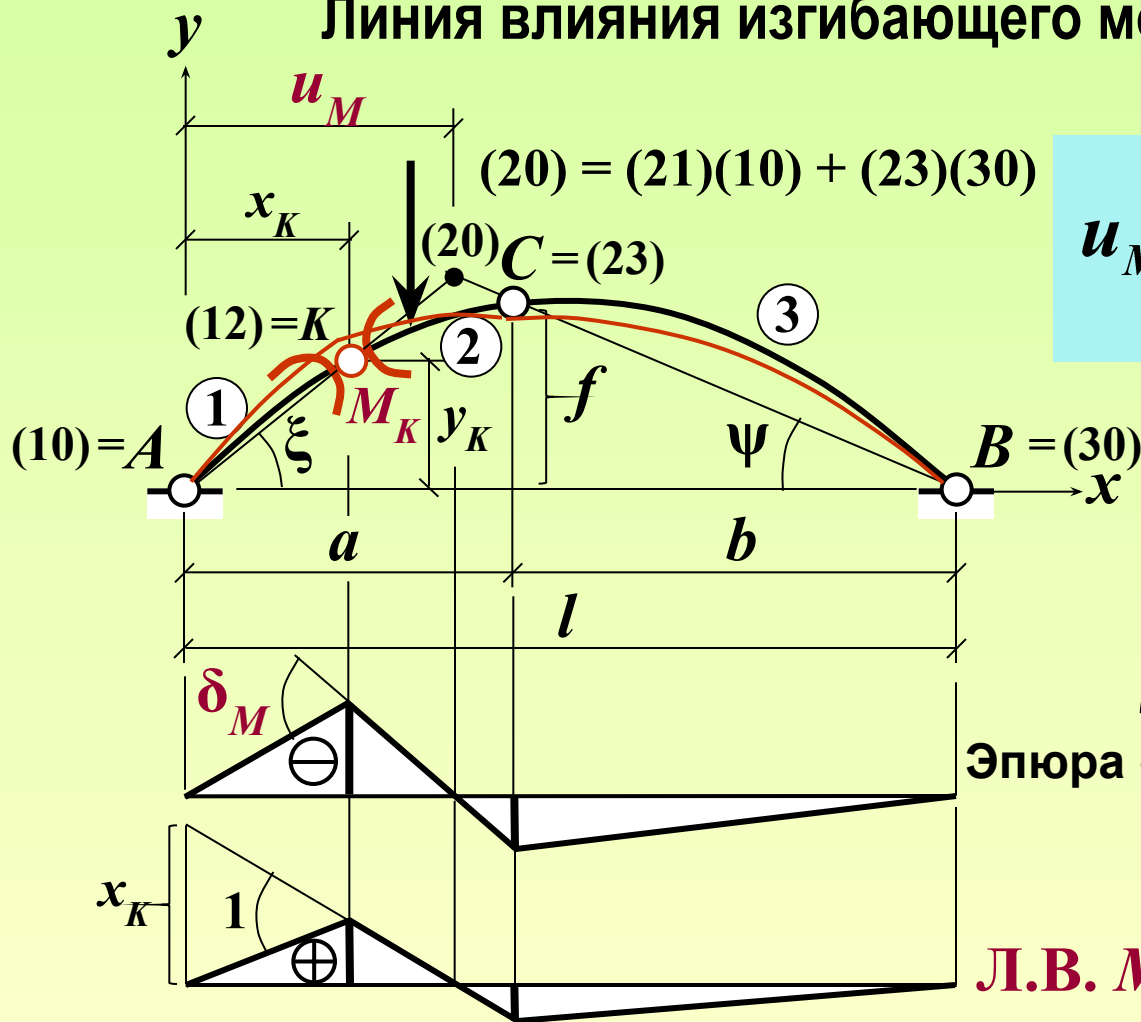
$$M = -\frac{\delta_F}{\delta_M}$$

Линия влияния изгибающего момента

$$u_M = l \cdot \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\xi + \operatorname{tg}\psi}$$

$$\operatorname{tg}\psi = f/b$$

$$\operatorname{tg}\xi = y_K/x_K$$

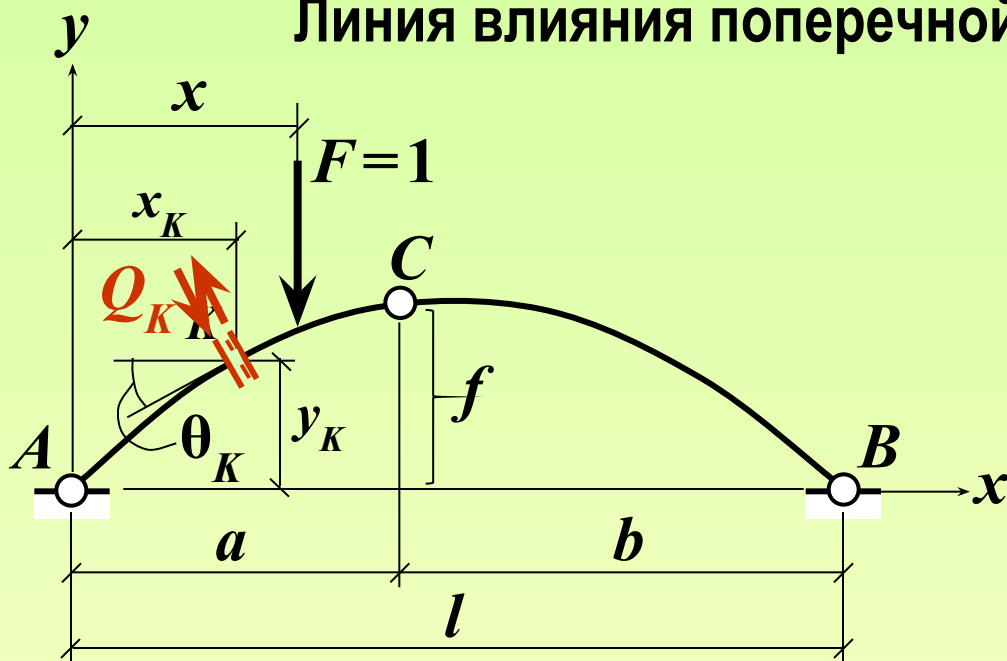


# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

Линия влияния поперечной силы

$$Q = -\frac{\delta_F}{\delta_Q}$$



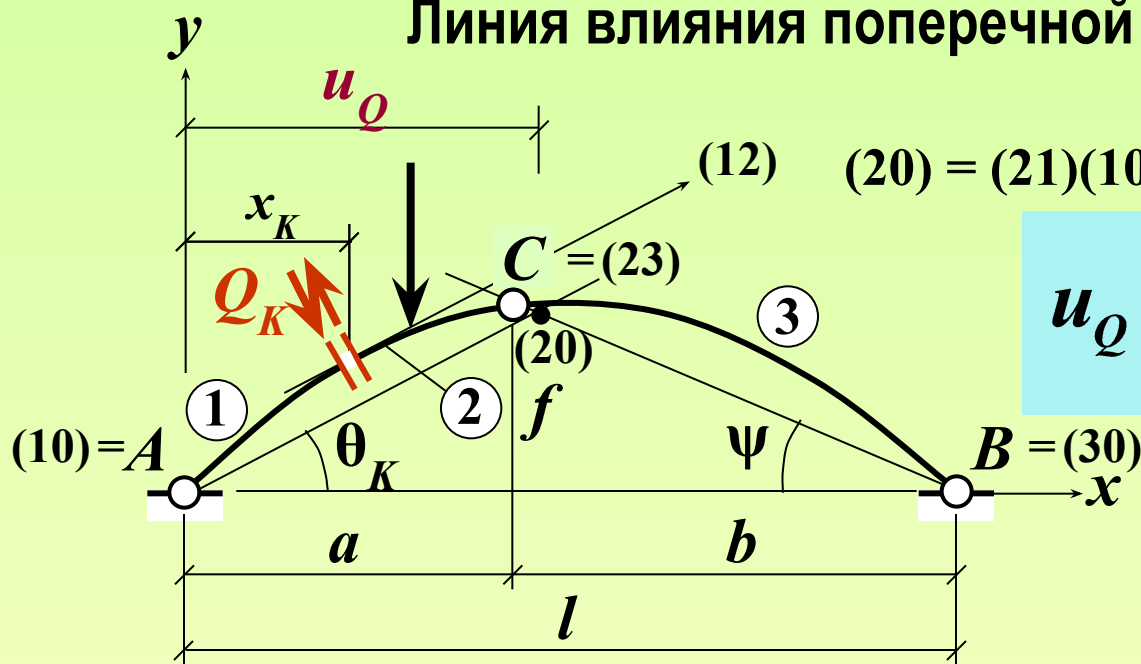


# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

Линия влияния поперечной силы

$$Q = -\frac{\delta_F}{\delta_Q}$$



$$(20) = (21)(10) + (23)(30)$$

$$u_Q = l \cdot \frac{\text{tg}\psi}{\text{tg}\theta_K + \text{tg}\psi}$$

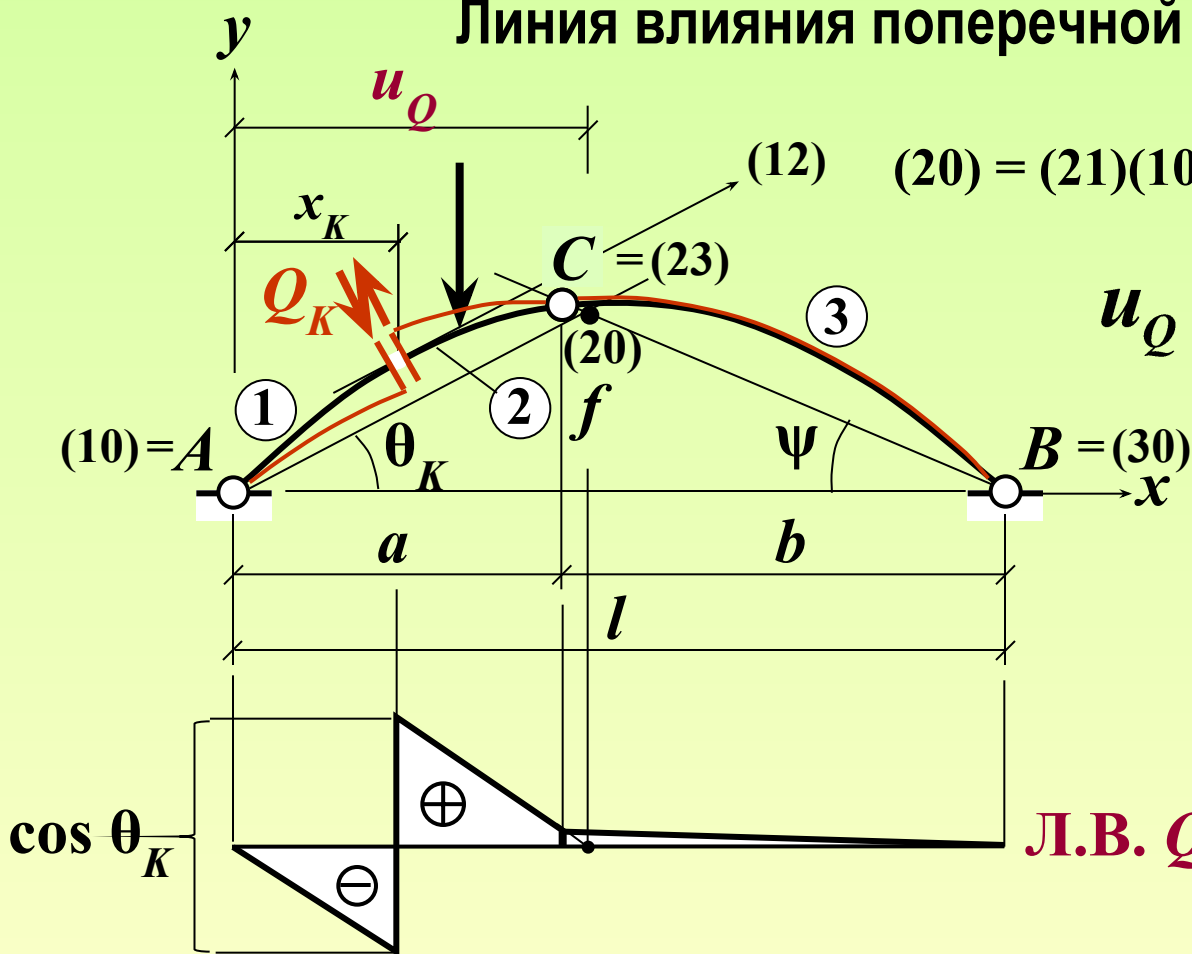
$$\text{tg}\psi = f/b$$

# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

Линия влияния поперечной силы

$$Q = -\frac{\delta_F}{\delta_Q}$$



$$(20) = (21)(10) + (23)(30)$$

$$u_Q = l \cdot \frac{\text{tg}\psi}{\text{tg}\theta_K + \text{tg}\psi}$$

$$\text{tg}\psi = f/b$$

Л.В.  $Q_K$

# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

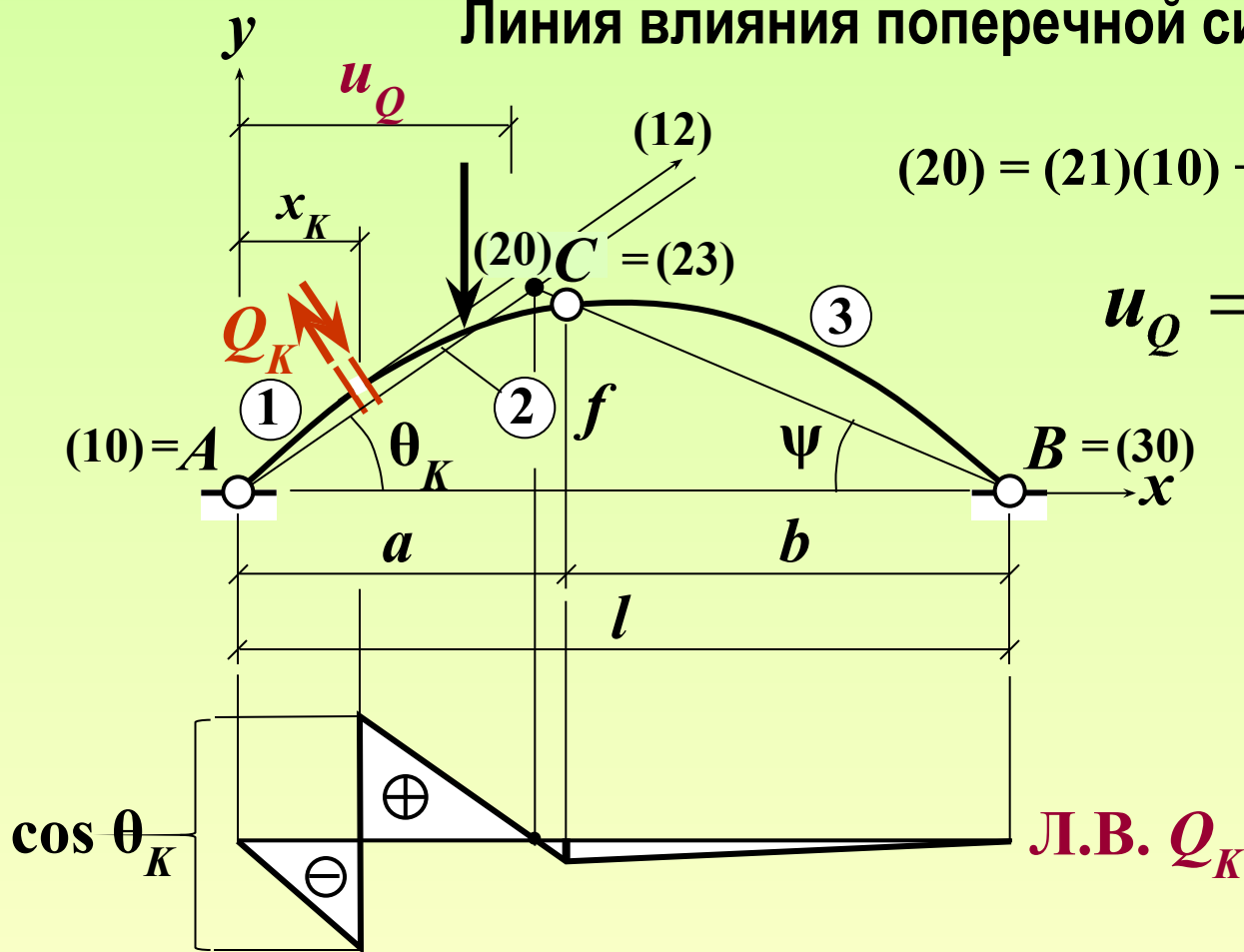
Линия влияния поперечной силы

$$Q = -\frac{\delta_F}{\delta_Q}$$

$$(20) = (21)(10) + (23)(30)$$

$$u_Q = l \cdot \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\theta_K + \operatorname{tg}\psi}$$

$$\operatorname{tg}\psi = f/b$$

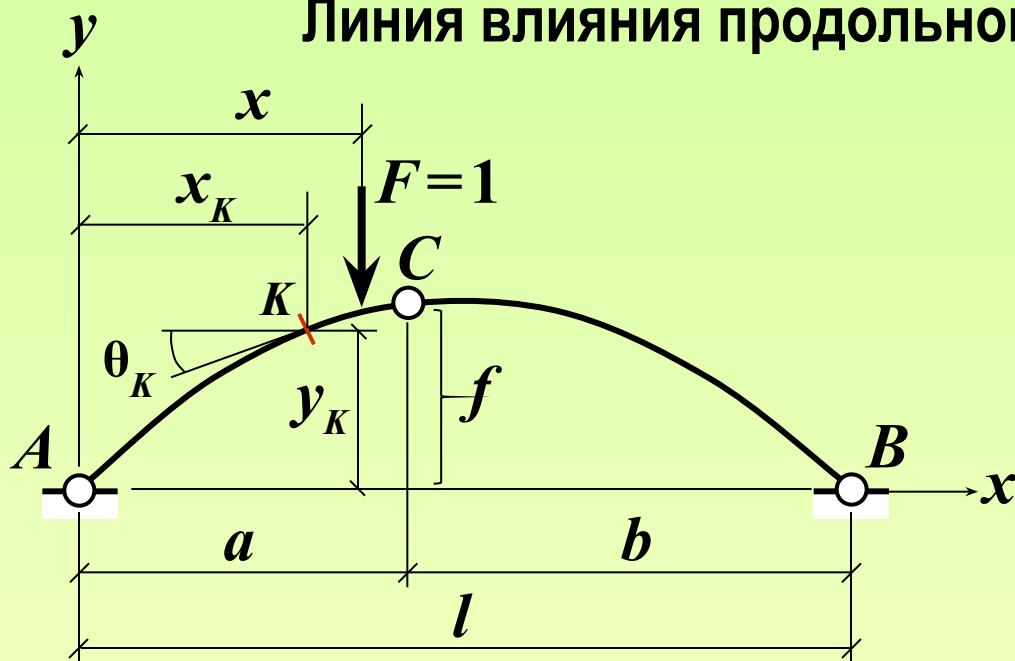


# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

Линия влияния продольной силы

$$N = -\frac{\delta_F}{\delta_N}$$



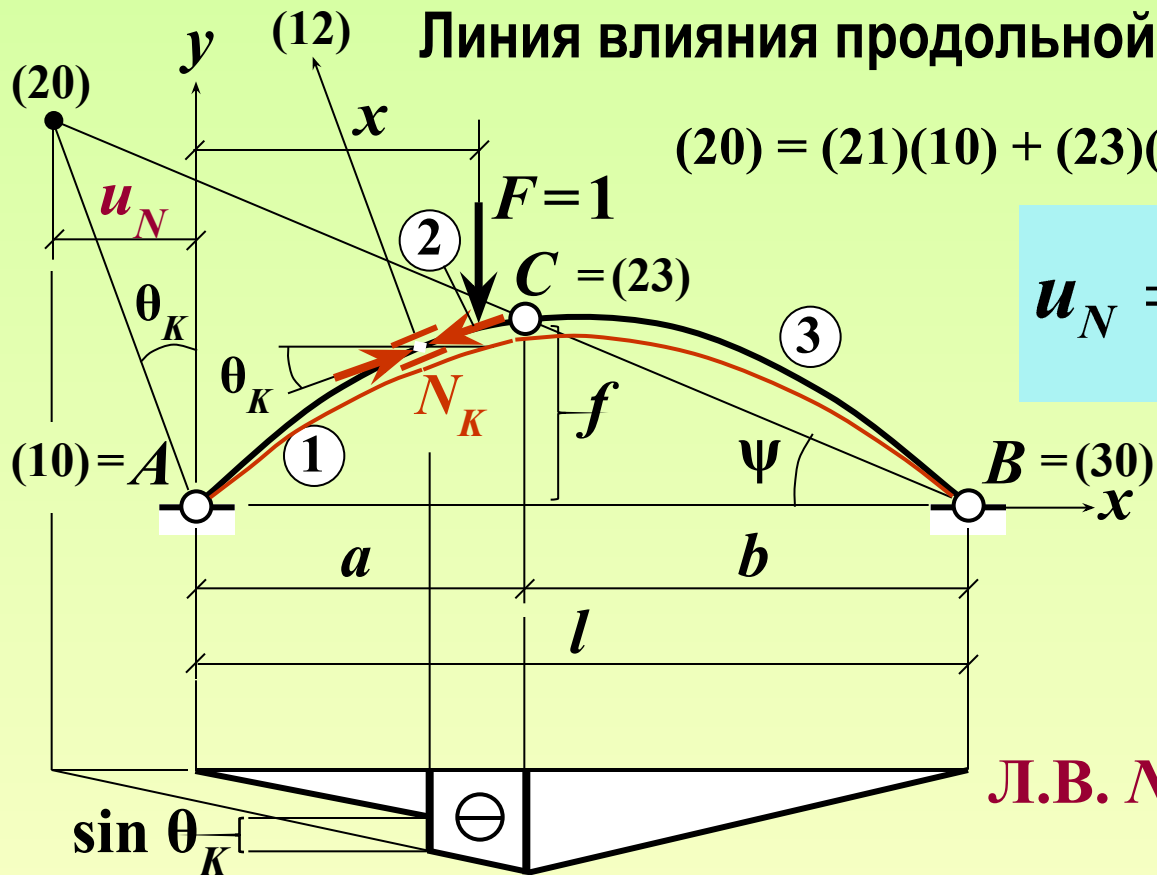
# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

Линия влияния продольной силы

$$N = -\frac{\delta_F}{\delta_N}$$

$$(20) = (21)(10) + (23)(30)$$



$$u_N = l \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{ctg} \theta_K - \operatorname{tg} \psi}$$

$$\operatorname{tg} \psi = f/b$$

Л.В.  $N_K$

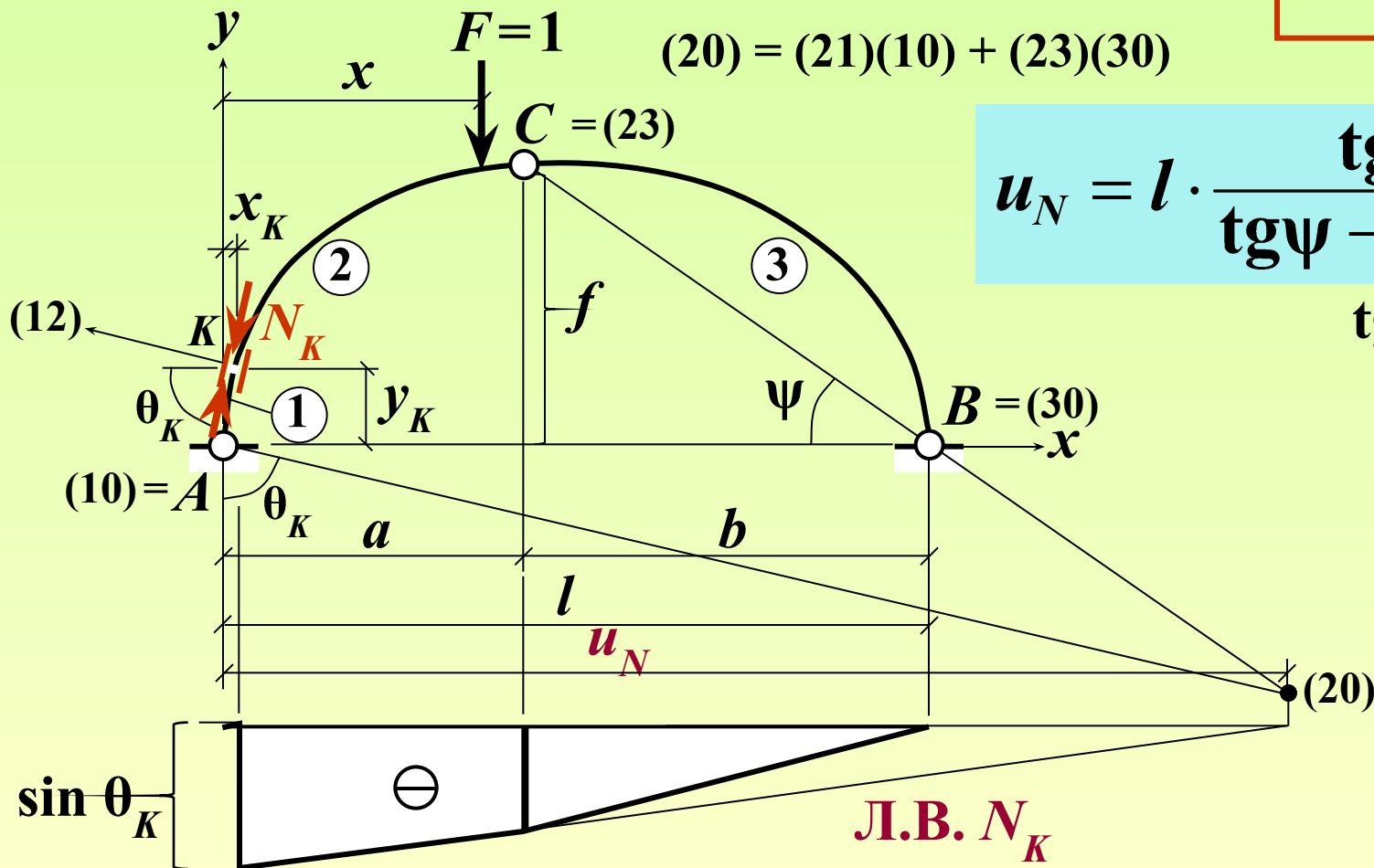
# ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМАХ

(кинематический метод)

Линия влияния продольной силы

$$N = -\frac{\delta_F}{\delta_N}$$

$$F=1 \quad (20) = (21)(10) + (23)(30)$$



$$u_N = l \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{ctg} \theta_K}$$

$\operatorname{tg} \psi = f/b$

# Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках\*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 30»)

1. Какие усилия возникают в произвольном сечении арки? (2)
2. Дифференциальные уравнения равновесия элемента криволинейного стержня. (3)
3. Как определяются вертикальные составляющие опорных реакций трёхшарнирной арки с опорами на одном уровне в случае вертикальной нагрузки? (4)
4. Как зависит распор трёхшарнирной арки от стрелы подъёма? (4)
5. Почему ключевой шарнир трёхшарнирной арки располагают обычно в её вершине? (4)
6. Формула для изгибающих моментов в трёхшарнирной арке при вертикальной нагрузке. (5)
7. Изгибающие моменты в арке больше или меньше моментов в балке того же пролёта при той же вертикальной нагрузке? Почему? (5)
8. Формула для поперечных сил в трёхшарнирной арке при вертикальной нагрузке. (5)
9. Формула для продольных сил в трёхшарнирной арке при вертикальной нагрузке. (5)
10. Особенности очертания эпюр ВСФ в трёхшарнирных арках.
11. Как используются дифференциальные зависимости между усилиями в криволинейном стержне для построения и проверки эпюр ВСФ в арке?
12. Какую особенность имеет эпюра  $Q$  в арке в месте приложения сосредоточенной силы  $F$ ?
13. Какую особенность имеет эпюра  $N$  в арке в месте приложения сосредоточенной нагрузки  $F$ ?
14. Чему равна поперечная сила в сечении в вершине арки? (5)
15. Чему равна продольная сила в сечении в вершине арки? (5)
16. Почему трёхшарнирная арка экономичнее по расходу материала, чем балка того же пролёта? (самостоятельно)
17. Что такое арка рационального очертания? (11)

самостоятельно

\* ) Только в режиме «Показ слайдов»

# Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках\*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 31»)

18. Главное свойство арки рационального очертания. (11)
19. Какие усилия возникают в арке рационального очертания? (11)
20. Каково рациональное очертание оси арки при равномерно распределённой по всей её длине гидростатической нагрузке? (12)
21. Уравнение оси арки рационального очертания при вертикальной нагрузке. (11)
22. Каково рациональное очертание оси арки при равномерно распределённой по всему пролёту вертикальной нагрузке? (самостоятельно, по аналогии с (11))
23. Какое очертание оси арки – параболическое или эллиптическое – выгоднее при вертикальных нагрузках, приложенных вблизи от опор? (самостоятельно)
24. Какой вид имеет линия влияния распора трёхшарнирной арки с опорами на одном уровне? (14)
25. Какой вид имеет линия влияния изгибающего момента в произвольном сечении трёхшарнирной арки? (22)
26. Какой вид имеет линия влияния поперечной силы в сечении арки, расположенном слева (справа) от ключевого шарнира? (25) слева (справа) от ключевого шарнира? (25) (26)
27. Чему равен скачок на Л.В.  $Q$  в сечении трёхшарнирной арки? (25) в сечении трёхшарнирной арки? (25) (26)
28. Какой вид имеет линия влияния продольной силы в сечении арки левее (правее) ключевого шарнира? (28) ключевого шарнира? (28) (29)
29. Чему равен скачок на Л.В.  $N$  в сечении трёхшарнирной арки? (28) в сечении трёхшарнирной арки? (28) (29)
30. Какое нагружение равномерно распределённой нагрузкой для симметричной арки более опасное – по всему пролёту или по его половине? (16)
31. При каком нагружении трёхшарнирной арки равномерной временной нагрузкой в её сечениях возникают наибольшие по абсолютной величине продольные силы? (самостоятельно)