

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

## Список литературы

### а) основная литература:

1. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 1985. –496 с.,
2. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 2013. –696 с.
3. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 544 с.
4. Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И. Основы теории цепей: Учебник для вузов; Под ред. В.П. Бакалова.- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Радио и связь, 2000. - 592 с.
5. Дмитриков В.Ф., Бакалов В.Ф., Крук Б.И. Основы теории цепей: Горячая линия- Телеком, 2009. – 596 с.
6. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. –М: Высшая школа, 1986. –596 с.

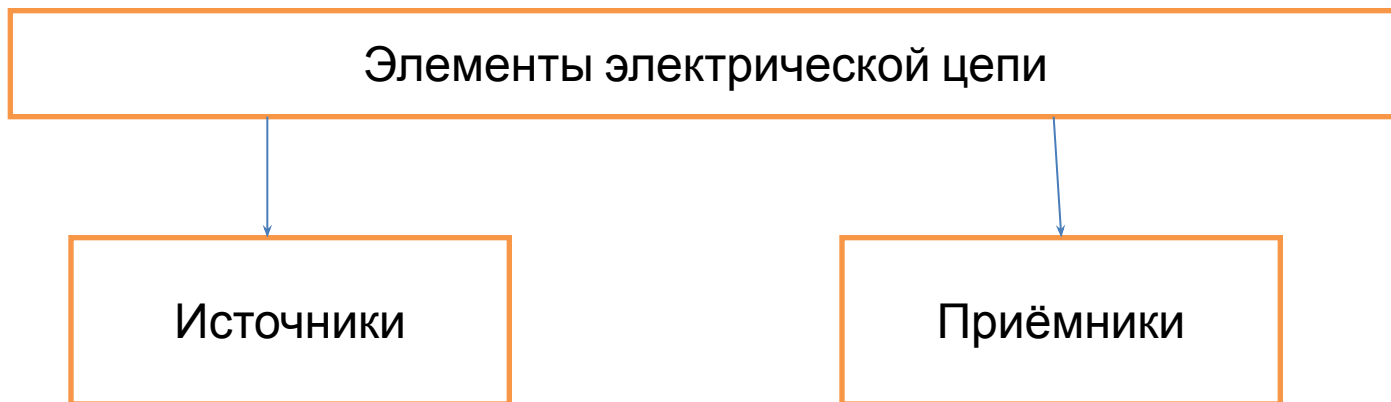
## **б) дополнительная литература**

Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов по спец. “Радиотехника”. - М.: Высшая школа, 1988. - 448 с.

Фриск В.В. Основы теории цепей./ Учебное пособие. – М.: ИП РадиоСофт, 2002. – 288с.

### **Электрическая цепь**

*Электрической цепью называется совокупность элементов и устройств, образующих путь или пути для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны при помощи понятий “электрический ток” и “электрическое напряжение”.*



# Классификация электрических цепей

## Вид

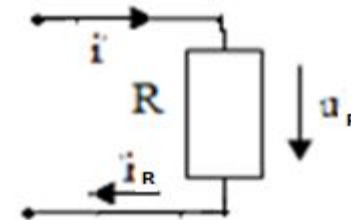
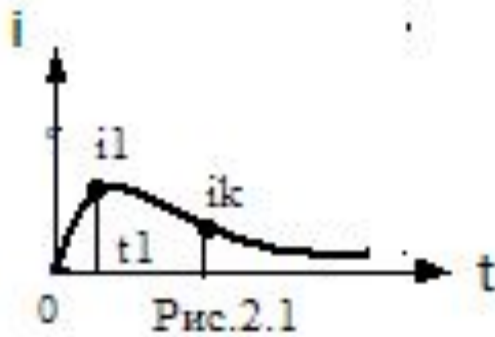
- Пассивные и активные
- Двухполюсники и многополюсники
- Со сосредоточенными и распределёнными параметрами
- Непрерывные и дискретные
- С постоянными и переменными параметрами
- Линейные и нелинейные

## Признак

- Энергетические свойства
- Число внешних зажимов
- Пространственная локализация параметров
- характеру процессов
- свойства элементов
- Вид оператора

Электрический ток и электрическое напряжение. Составные части электрических цепей можно разделить на два класса: источники электрической энергии и её потребители (приемники, нагрузка)..

## ТОК, НАПРЯЖЕНИЕ и ЭНЕРГИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ



$$i(t) = dq(t) / dt \quad [\text{A}]$$

$$u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad [\text{В}]$$

$$W_k = \int_{-\infty}^{t_k} ui dt \quad [\text{Дж}] \quad p_k = \frac{dw_k}{dt} = ui \quad [\text{Вт}]$$

# ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

## Преобразования электрической энергии в элементах электрической цепи

- необратимое преобразование электрической энергии в другие виды энергии;
- накопление энергии в электрическом поле;
- накопление энергии в магнитном поле;
- преобразование энергии неэлектрической природы в электрическую энергию

### Резистивное сопротивление

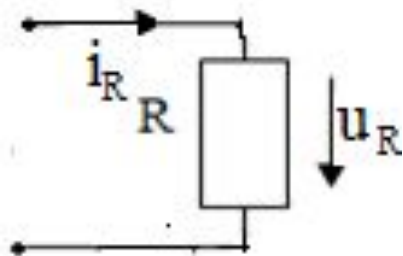


Рис.2.3

$$u_R(t) = R i_R(t)$$

Закон Ома

$$i_R(t) = G u_R(t)$$

$$w_k =$$

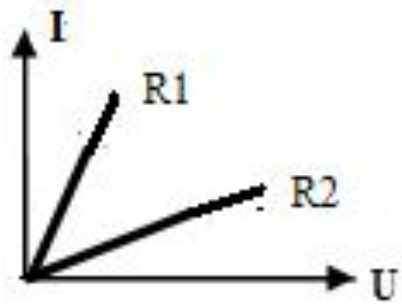


Рис. 2.4

$$P_k = dw_k / dt = u_R I_R$$

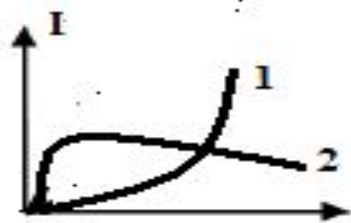


Рис. 2.5

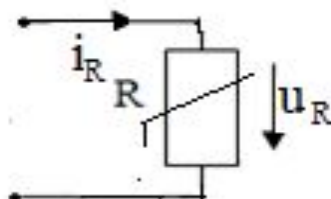


Рис. 2.6

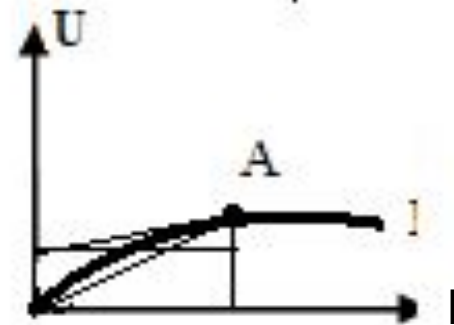


Рис. 2.7

$$R_{ст A} = u_A / i_A$$

$$R_{диф A} = du / di \Big|_A$$

## ЁМКОСТЬ

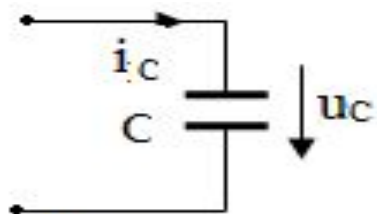
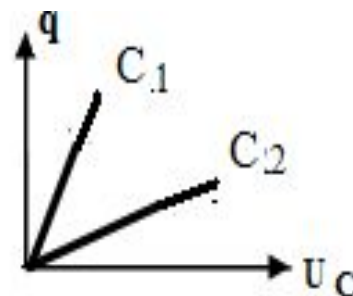


Рис. 2.8

$$q_C(t) = C u_C(t)$$

$$i_C = C du_C / dt,$$



$$i_C = C du_C / dt,$$

$$u_C(t = t_1) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_1} i_C(t) dt$$

[Ф]

$$p_C = i_C u_C = C u_C du_C / dt$$

$$w_C = C u_C^2(t_1) / 2 > 0$$

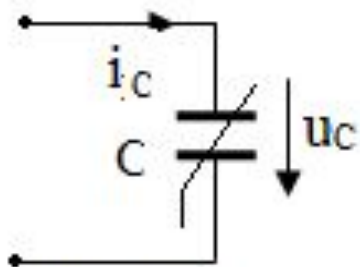


Рис. 2.10

$$C_{cm} = q_C / u_C$$

$$C_{duф.} = dq_C / du_C$$

## ИНДУКТИВНОСТЬ

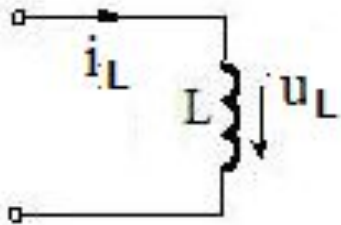


Рис. 2. 11

$$u_L = L di_L/dt$$

$$\Psi(t) = L i_L(t)$$

$$u_L(t) = \Psi(t)/dt$$

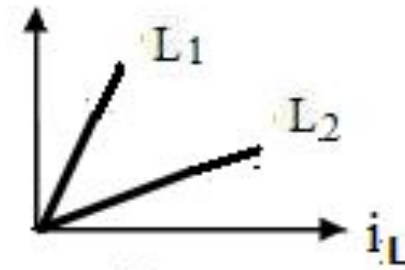


Рис. 2. 1 2

$$i_L(t_1) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_1} u_L(t) dt \quad [ \text{Гн} ]$$

$$p_L = i_L u_L = L i_L di_L/dt$$

$$w_L = \int_{-\infty}^{t_1} p_L(t) dt = L i_L^2(t_1)/2 > 0$$

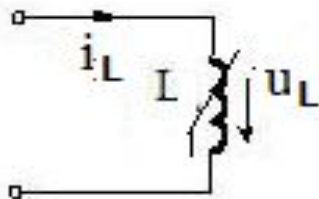


Рис. 2. 13

$$L_{cm} = \Psi/i_L$$

$$, \quad L_{\text{диф}} = d\Psi/di_L$$



ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ АКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Независимый источник напряжения

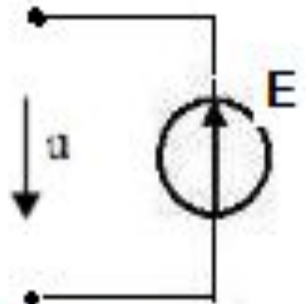


Рис. 2. 14

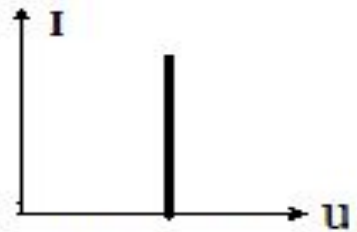


Рис. 2. 15

Независимый источник тока

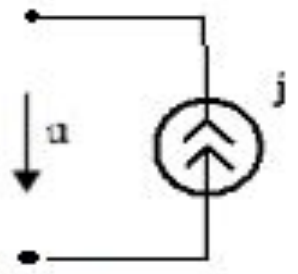


Рис. 2. 16

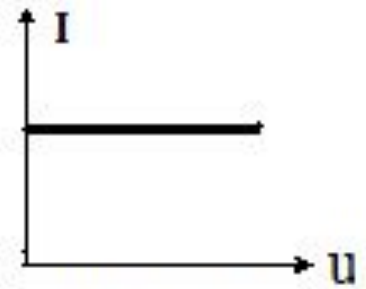
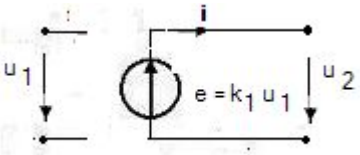
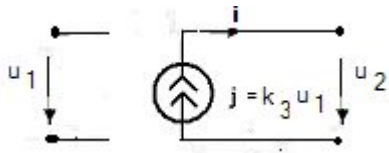


Рис. 2. 17

## Зависимые (управляемые) источники электрической энергии

| Наименование   | Обозначения   |
|--|---|
| <p style="text-align: center;">Источник напряжения, управляемый<br/>напряжением (ИНУН), <math>u_2 = k_1 u_1</math></p> |    |
| <p style="text-align: center;">Источник напряжения,<br/>управляемый током (ИНУТ), <math>u_2 = k_2 i_1</math></p>       |    |
| <p style="text-align: center;">Источник тока, управляемый<br/>напряжением<br/>(ИТУН), <math>i_2 = k_3 u_1</math></p>   |    |
| <p style="text-align: center;">Источник тока, управляемый током<br/>(ИТУТ), <math>i_2 = k_4 i_1</math></p>             |  |

## Схемы электрических цепей

- принципиальная;
- замещения (расчётная);
- функциональная (блок-схема)

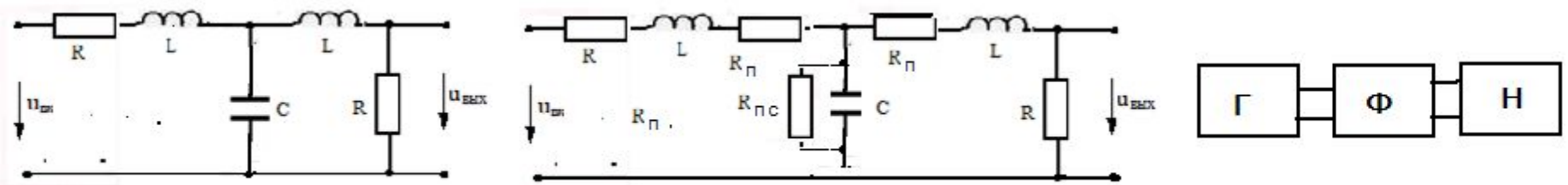


Рис. 2.18

## Схемы замещения реальных элементов электрической цепи

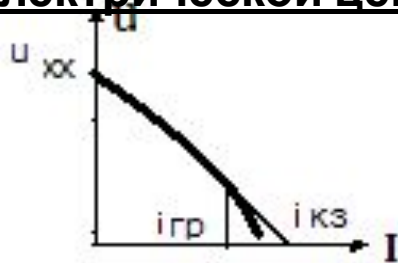


Рис. 2.19

$$i / i_{\text{кз}} - u / u_{\text{хх}} = 1$$

$$u = u_{\text{хх}} - (u_{\text{хх}} / i_{\text{кз}}) I = u_{\text{хх}} - R i$$

$$I = i_{\text{кз}} - (i_{\text{кз}} / u_{\text{хх}}) u = i_{\text{кз}} - G i u$$

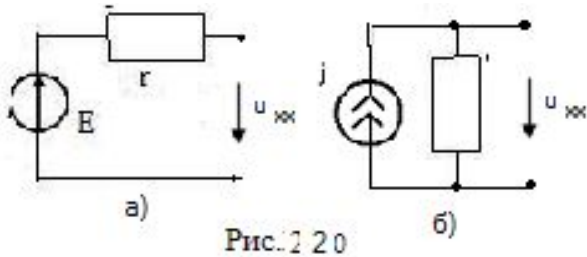


Рис. 2.20

$$j = i_{кз} , G_i = 1/ R_i$$

$$E = i_{кз} R_i \quad R_i = u_{xx} / i_{кз}$$

## Соединения элементов электрической цепи

- последовательное

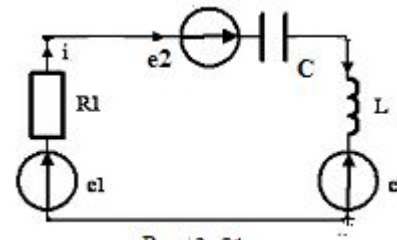


Рис. 2. 21

- параллельное

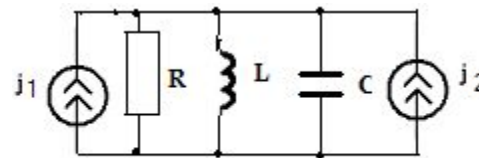


Рис. 2. 2 2

- смешанное

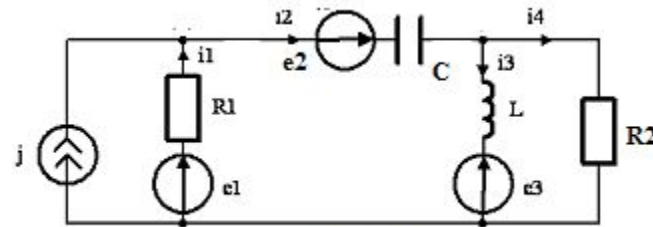
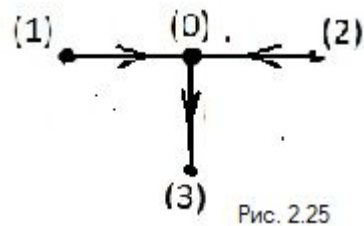
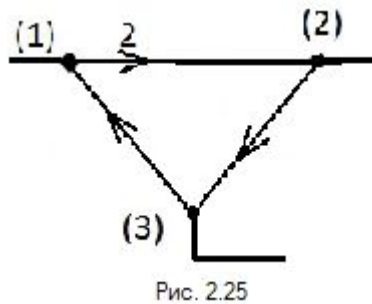


Рис. 2. 23

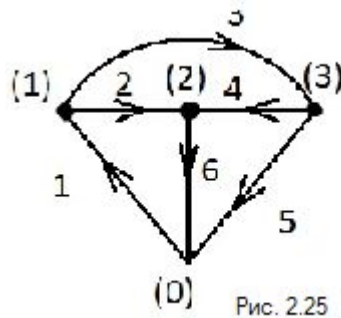
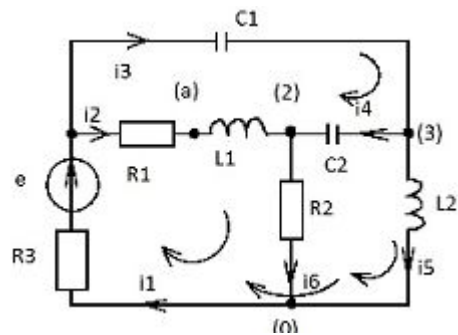
- звезда



- треугольник



## Элементы топологии электрических цепей



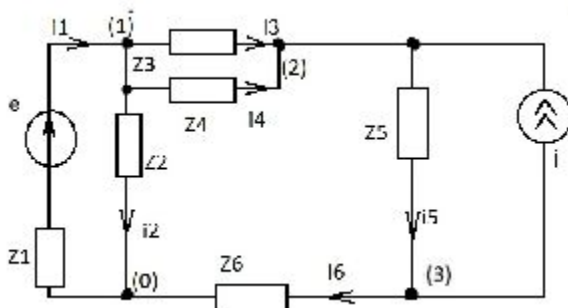
$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

# ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## Первый закон (закон токов) Кирхгофа

В любой момент времени алгебраическая сумма мгновенных значений токов во всех ветвях электрической цепи, имеющих общий узел, равна нулю

$$\sum_{k=1}^Z i_k = 0$$



| № узла    | (1)                          | (2)                        | (3)                  | (0)                   |
|-----------|------------------------------|----------------------------|----------------------|-----------------------|
| Уравнение | $-i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$ | $-i_3 - i_4 + i_5 - j = 0$ | $-i_5 + i_6 + j = 0$ | $i_1 - i_2 - i_6 = 0$ |

### Следствия

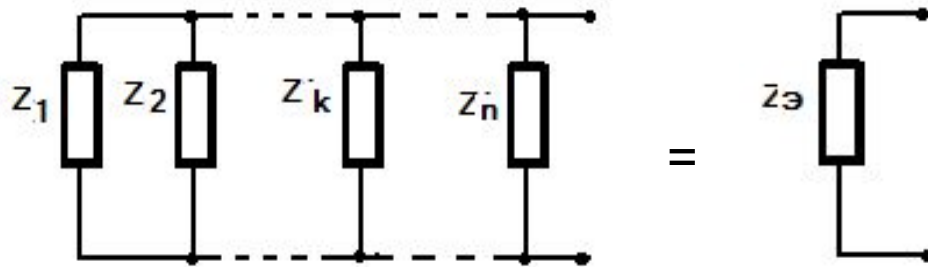


Рис. 3.2

3)  $\mathbf{Z}_k \longleftrightarrow \mathbf{C}_k$

$$\tilde{N}_y = \sum_{k=1}^n \tilde{N}_k.$$

4)  $\mathbf{Z}_k \longleftrightarrow L_k$

$$1/L_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n 1/L_k$$

1)  $\mathbf{Z}_k \longleftrightarrow j_k$

$$\mathbf{Z}_{\text{э}} = j_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n j_k$$

2)  $\mathbf{Z}_k \longleftrightarrow \mathbf{R}_k$

$$G_y = \sum_{k=1}^n G_k.$$

Одноимённые параллельно соединённые элементы могут быть объединены в один элемент.

### Второй закон (закон напряжений) Кирхгофа

Алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в состав произвольного контура электрической цепи, в любой момент времени равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{S_i} u_k =$$

$$\sum_{k=1}^{S_i} u_k = \sum_{l=1}^{S_a} e_l$$

**В любом контуре электрической цепи алгебраическая сумма мгновенных значений падений напряжения на пассивных элементах равна алгебраической сумме мгновенных значений ЭДС, действующих в этом контуре.**

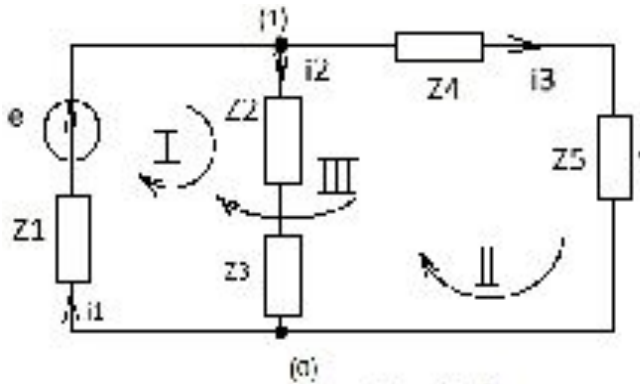


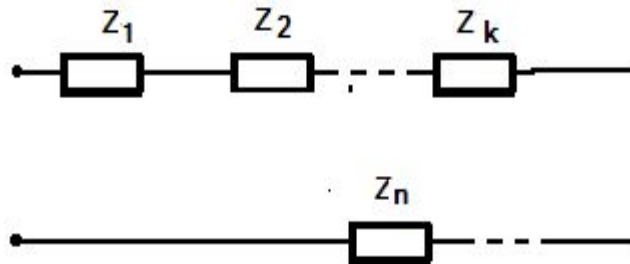
Рис. 3.3

$$u_{z1} + u_{z3} + u_{z2} = e ;$$

$$-u_{z2} - u_{z3} + u_{z4} + u_{z5} = 0 ;$$

$$u_{z1} + u_{z4} + u_{z5} = e.$$

**Следствия**



1)  $Z_k \longleftrightarrow E_k$

$$Z_3 = E_3 = \sum_{k=1}^n E_k$$

2)  $Z_k \longleftrightarrow R_k$

$$Z_3 = R_3 = \sum_{k=1}^n R_k$$



$$3) \quad Z_k \longleftrightarrow L_k$$

$$Z_{\Sigma} = L_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n L_k$$

$$4) \quad Z_k \longleftrightarrow C_k$$

$$1/C_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n 1/C_k$$

Одноимённые параллельно соединённые элементы могут быть объединены в один элемент.

### **ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ И ОСНОВАННЫЙ НА НЁМ МЕТОД АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ (МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ)**

*Реакция линейной электрической цепи  $y(t)$  на воздействие  $x(t)$  в виде линейной комбинации из более простых воздействий  $x_k(t)$ , представляет собой линейную комбинацию реакций этой цепи на каждое из воздействий в отдельности -  $y_k(t)$ , т.е. при*

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k(t)$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k(t)$$

где

$\alpha_k$  - постоянные коэффициенты,  $x_k(t)$  -  $k$ -я составляющая воздействия.

## Метод наложения

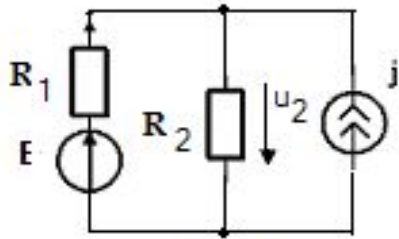
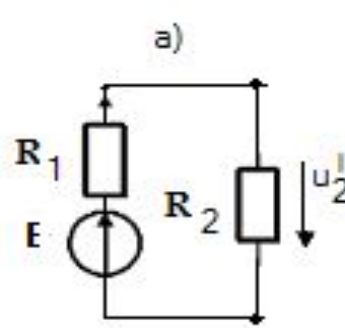


Рис. 3 б

$$u_2 = u'_2 + u''_2 = (e + jR_1)R_2 / (R_1 + R_2)$$



$$u'_2 = eR_2 / (R_1 + R_2)$$

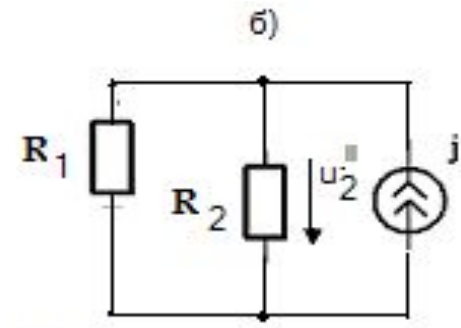


Рис. 3 в

$$u''_2 = jR_1R_2 / (R_1 + R_2)$$

## Теоремы об активном двухполюснике. Метод эквивалентного генератора

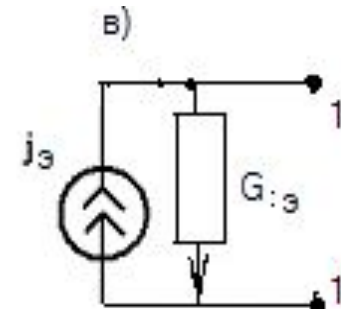
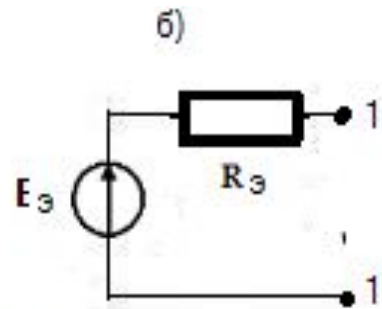
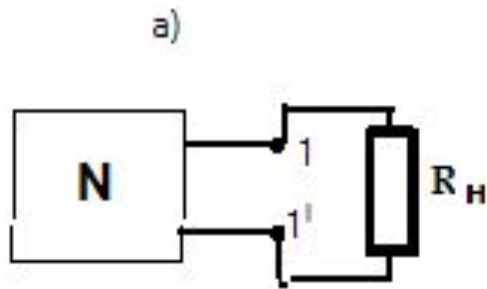


Рис. 3 7

## Теорема об эквивалентном источнике напряжения

*Линейная электрическая цепь, рассматриваемая относительно двух своих зажимов, может быть заменена источником напряжения  $e_3$ , включённым последовательно с сопротивлением  $R_3$ . Задающее напряжение  $u_3$  источника напряжения равно напряжению холостого хода  $u_{xx}$  на рассматриваемых зажимах (ветвь  $R_n$  разомкнута), а сопротивление  $R_3$  равно сопротивлению между этими зажимами, вычисленному в предположении, что ветвь  $R_n$  разомкнута и все содержащиеся в цепи источники напряжения заменены короткозамыкающими перемычками, а цепи всех источников тока разомкнуты.*

## Теорема об эквивалентном источнике тока

*Линейная электрическая цепь, рассматриваемая относительно двух своих зажимов, может быть заменена источником тока  $j_3$ , включённым параллельно с проводимостью  $G_3$ . Задающий ток источника  $j_3$  равен току короткого замыкания рассматриваемой пары зажимов, проводимость  $G_3$  равна входной (со стороны зажимов 1,1') проводимости цепи  $N$ , вычисленной в предположении, что ветвь  $R_n$  разомкнута и все содержащиеся в цепи источники напряжения заменены короткозамыкающими перемычками, а цепи всех источников тока разомкнуты.*

## Метод эквивалентного источника напряжения, порядок расчёта

- задаются направлением тока в ветви  $R_n$ ;
- размыкают ветвь  $R_n$  и находят напряжение холостого хода ( в общем случае с учётом ЭДС  $e$  в ветви  $R_n$ )  $u_{xx} = u_{\dot{y}} = \varphi_1 - \varphi_{1'} + e$ ;
- определяют входное сопротивление  $R_{вх} = R_{\dot{y}}$  цепи  $N$  со стороны зажимов  $1, 1'$ , ветвь  $R_n$  разомкнута;
- по формуле  $i = u_{\dot{y}} / (R_{\dot{y}} + R_n)$  определяют ток в ветви  $R_n$  и по формуле  $u_n = R_n i$  - напряжение на ней.

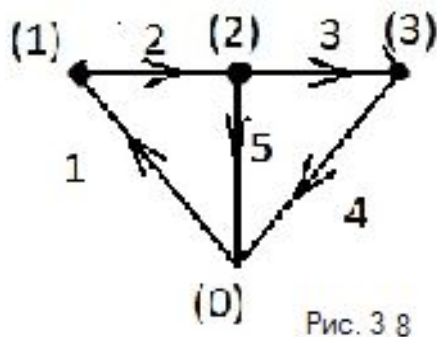
## Метод эквивалентного источника тока, порядок расчёта

- задаются направлением тока в ветви  $R_n$ ;
- закорачивают ветвь  $R_n$  и находят ток короткого замыкания между зажимами  $1, 1' i_{кз} = j_{\dot{y}}$ ;
- определяют входную проводимость  $G_{вх} = G_{\dot{y}}$  цепи  $N$  со стороны зажимов  $1, 1'$ , ветвь  $R_n$  разомкнута;
- по формуле  $i_{rp} G_i / (G_{\dot{y}} + G_i)$  определяют ток в ветви  $R_n$  и по формуле  $u_n = R_n i$  - напряжение на ней.

# Энергетические соотношения в линейной электрической цепи

## Теорема Теллегена

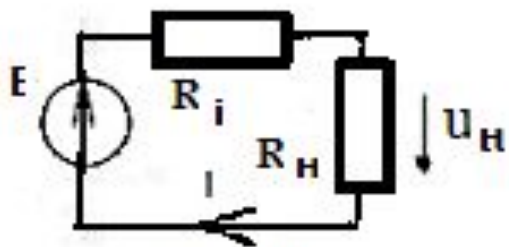
При согласном выборе направлений тока и напряжения в ветвях графа цепи сумма произведений напряжения  $u_k$  и тока  $i_k$  всех ветвей направленного графа цепи в любой момент времени равна нулю, т.е.  $\sum_{k=1}^n u_k i_k = 0$  или в матричной форме:  $\mathbf{u}^T \mathbf{i} = 0$ , где  $\mathbf{u}^T = (u_1 \dots u_k \dots u_m)$ ,  $\mathbf{i}^T = (i_1 \dots i_k \dots i_m)$  – векторы напряжений и токов ветвей соответственно.



## Уравнения баланса мощностей

$$\sum_{k=1}^n p_k = 0$$

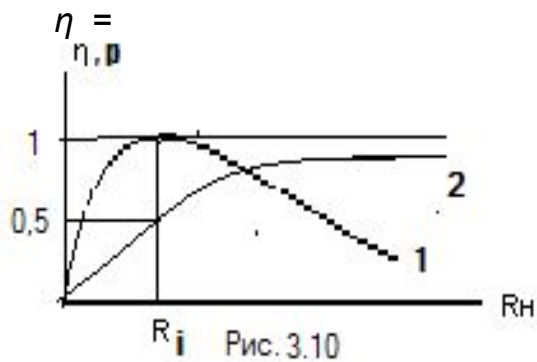
$$\sum_{\check{e}=1}^{n_i} R_k i_k^2 = \sum_{k=1}^{n_{ei}} e_k i_k + \sum_{k=1}^{n_{eo}} u_k j_k$$



$$P = I^2 R_n = E^2 R_n / (R_i + R_n)^2$$

$$dP/dR_i = E^2 [(R_i + R_i)^2 - 2R_i (R_i + R_i)] / (R_i + R_i)^4$$

$$P_{\max} = E^2 / 4R_i$$



$$P_{\text{н}}/P = R_{\text{н}}I^2 / (R_{\text{и}}I^2 + R_{\text{н}}I^2) = R_{\text{н}} / (R_{\text{и}} + R_{\text{н}})$$

#### 4. Общие методы анализа электрических цепей

##### Метод уравнений Кирхгофа

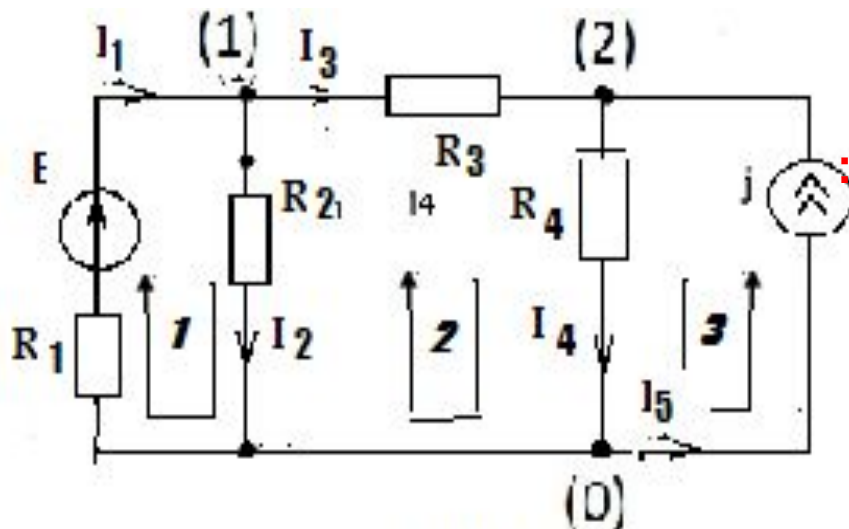


Рис. 4.1

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0, \quad -i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

$$u_1 + u_2 = e, \quad -u_2 + u_3 + u_4 = 0,$$

$$u_4 - u_5 = 0.$$

$$u_1 = R_1 i_1 - e,$$

$$u_3 = R_3 i_3,$$

$$u_2 = R_2 i_2,$$

$$u_4 = R_4 i_4.$$

## ***Метод контурных токов***

### **Порядок расчёта**

- 1. Определить систему независимых контуров**
- 2. Задаться направлениями контурных токов**
- 3. Определить матрицу сопротивлений контуров и вектор контурных ЭДС**
- 4. Записать систему контурных уравнений и решить её**
- 5. Определить токи ветвей**
- 6. Определить напряжения ветвей**
- 7. Выполнить проверку правильности решения**

### **Матрица сопротивлений контуров**

$$\mathbf{R}_k = (R_{ji}), \quad j, i = \overline{1, q}$$

*q* - порядок системы контурных уравнений,  $q = n - (m - 1)$ ,

для цепей с источниками тока  $q = n - (m - 1) - n_{um}$ ,  $n, m$  – число

ветвей и узлов в цепи,  $n_{um}$  – число ветвей, содержащих источники тока

- *собственным сопротивлением  $R_{jj}$   $j$ -го контура называется сумма сопротивлений всех ветвей, входящих в этот контур;*
- *взаимным сопротивлением  $j$ -го и  $i$ -го контуров называется сопротивление  $R_{ji}$ , равное сумме сопротивлений ветвей общих для этих контуров. Взаимное сопротивление имеет знак плюс, если контурные токи  $j$ -го и  $i$ -го протекают через общие для этих контуров ветви в одинаковом направлении, если в противоположных направлениях, то  $R_{ji}$  имеет знак минус. Если  $j$ -й и  $i$ -й контуры не имеют общих ветвей, то их взаимное сопротивление равно нулю.*

$$R_k = \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1j} & \dots & R_{1q} \\ & & \dots & & \\ R_{i1} & \dots & R_{ij} & \dots & R_{iq} \\ & & \dots & & \\ R_{q1} & \dots & R_{qj} & \dots & R_{qq} \end{bmatrix}$$

- *контурной ЭДС  $j$ -го контура  $e_{jj}$  называется алгебраическая сумма ЭДС всех источников напряжения, входящих в этот контур. Если направление ЭДС какого-либо источника, входящего в  $j$ -й контур, совпадает с направлением контурного тока этого контура, то соответствующая ЭДС входит в  $e_{jj}$  со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.*

$$e_{\hat{e}}^{\circ} = (e_{11} \dots e_{ij} \dots e_{qq})$$



## Пример

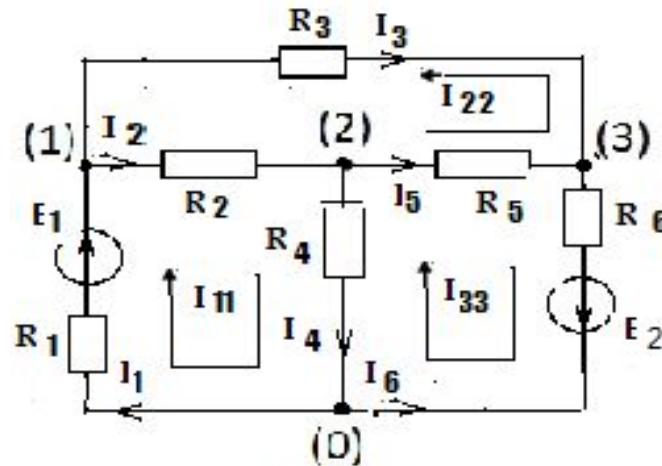


Рис. 4.2

$$\mathbf{R}_{\hat{e}} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 - R_4 & R_2 & -R_4 \\ R_2 & R_2 + R_3 + R_5 & R_5 \\ -R_4 & R_5 & R_4 + R_5 + R_6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{\hat{e}}^{\circ} = (E_1, 0, E_2)$$

## Контурные уравнения

$$\mathbf{R}_k \mathbf{i}_k = \mathbf{e}_k$$

$\mathbf{i}_k^T = (i_{11} \dots i_{jj} \dots i_{qq})$  - вектор контурных токов

$$R_{11}i_{11} + R_{12}i_{22} + \dots + R_{li}i_{ii} + \dots + R_{1q}i_{qq} = e_{11}.$$

.....

$$R_{j1}i_{11} + R_{j2}i_{22} + \dots + R_{ji}i_{ii} + \dots + R_{jq}i_{qq} = e_{jj}.$$

.....

$$R_{q1}i_{11} + R_{q2}i_{22} + \dots + R_{qi}i_{ii} + \dots + R_{qq}i_{qq} = e_{qq}.$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 - R_4 & R_2 & -R_4 \\ R_2 & R_2 + R_3 + R_5 & R_5 \\ -R_4 & R_5 & R_4 + R_5 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{11} \\ i_{22} \\ i_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

## Метод узловых напряжений

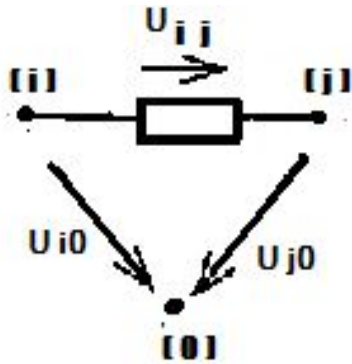


Рис. 4.3

$$u_{i0} = \varphi_i - \varphi_0$$

$$u_{ij} = \varphi_i - \varphi_j = \varphi_i - \varphi_0 - (\varphi_j - \varphi_0) = u_{i0} - u_{j0}$$

### Порядок расчёта

- **если необходимо, осуществить эквивалентные преобразования источников напряжения в источники тока;**
- **заться направлениями токов ветвей;**
- **записать матрицу узловых проводимостей и вектор узловых токов;**
- **записать систему узловых уравнений и решить её;**
- **определить напряжения и токи ветвей цепи;**
- **осуществить проверку правильности решения.**

## Матрица узловых проводимостей

$$\mathbf{G}_y = (G_{ji}), \quad j, i = \overline{1, \delta}$$

$P$  – порядок системы узловых уравнений,  $p = m - 1$ ,  $m$  – число узлов в цепи, для цепей с «источниками напряжения»  $p = m - 1 - n_{ин}$ ,  $n_{ин}$  – число ветвей, в состав которых входят лишь источники напряжения.

- **собственной проводимостью  $G_{ii}$   $i$ -го узла электрической цепи называется сумма проводимостей всех ветвей, подключённых к этому узлу;**
- **взаимная проводимость  $i$ -го и  $j$ -го узлов  $G_{ij}$  – это сумма проводимостей всех ветвей, включённых между этими узлами, взятая со знаком минус;**
- **если в цепи отсутствуют ветви, включённые между  $i$ -м и  $j$ -м узлами, то их взаимная проводимость равна нулю.**

$$\mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1j} & \dots & G_{1q} \\ G_{i1} & \dots & G_{ij} & \dots & G_{iq} \\ G_{q1} & \dots & G_{qj} & \dots & G_{qq} \end{bmatrix}$$

- узловым током  $i$ -го узла  $j_{ii}$  называется алгебраическая сумма задающих токов всех источников тока, подключённых к этому узлу. Если ток какого-либо источника направлен к  $i$ -му узлу, то он входит в эту сумму со знаком плюс, если от узла, то он входит в  $j_{ii}$  со знаком минус.

$$\mathbf{j}_y^T = (j_{11} \dots j_{ii} \dots j_{pp})$$

### Пример

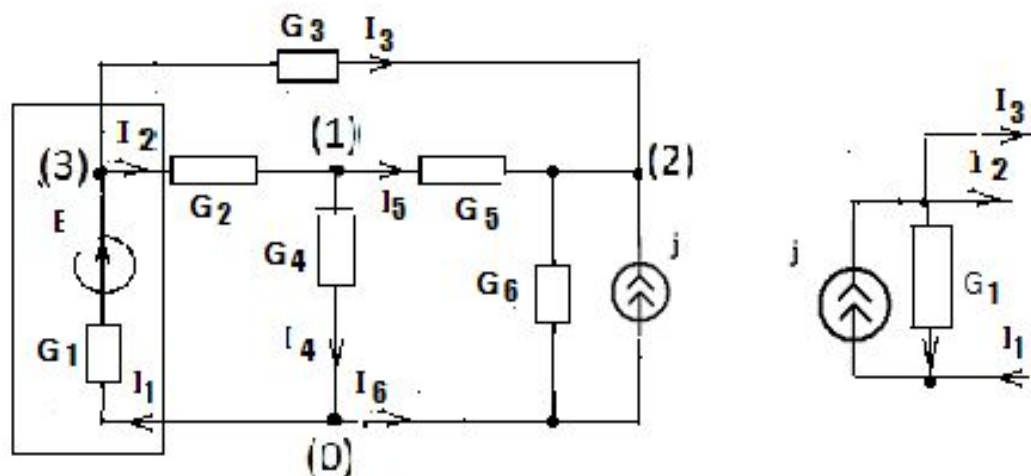


Рис. 45

$$\mathbf{G}_y = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2 + G_4 + G_5 & -G_5 & -G_2 \\ -G_5 & G_3 + G_5 + G_6 & -G_3 \\ -G_2 & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j}_y^T = (\mathbf{0} \dots - j \dots G_1 e)$$

Узловые уравнения

$$\mathbf{G}_y \mathbf{u}_y = \mathbf{j}_y$$

$$\mathbf{u}_y^T = (u_{01} \dots u_{0i} \dots u_{0p}) \quad - \text{вектор узловых напряжений}$$

$$G_{11}u_{01} + G_{12}u_{02} + \dots + G_{1i}u_{0i} + \dots + G_{1p}u_{0p} = j_{11}.$$

.....

$$G_{i1}u_{01} + G_{i2}u_{02} + \dots + G_{ii}u_{0i} + \dots + G_{ip}u_{0p} = j_{ii}.$$

.....

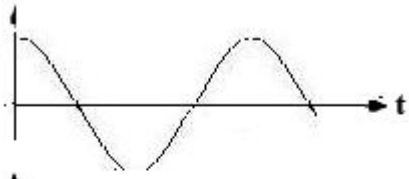
$$G_{p1}u_{01} + G_{p2}u_{02} + \dots + G_{pi}u_{0i} + \dots + G_{pp}u_{0p} = j_{pp}.$$

$$\begin{pmatrix} G_2 + G_4 + G_{5_5} & & -G_5 & & -G_2 \\ & -G_5 & & G_3 + G_5 + G_6 & -G_3 \\ & -G_2 & & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -j \\ G_1 e \end{pmatrix}$$

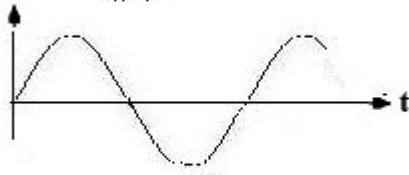
### 3. Электрические цепи при гармоническом воздействии

$$x(t) = X_m \cos (\omega t + \varphi) = X_m \sin (\omega t + \varphi + \pi/2)$$

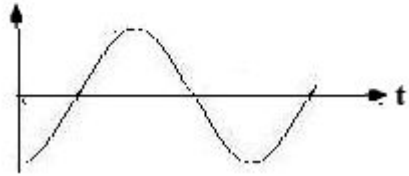
#### Гармонические напряжения и токи в электрических



$$u(t) = U_m \cos \omega t = U_m \sin (\omega t + \pi/2)$$



$$u(t) = U_m \cos (\omega t - \pi/2) = U_m \sin \omega t$$



$$u(t) = U_m \cos (\omega t + \pi/2) = - U_m \sin \omega t$$

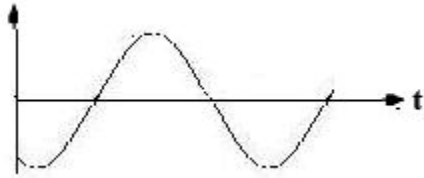
#### Параметры гармонического колебания

$X_m$  - амплитуда,  $\omega$  - частота,  $\varphi$  - начальная фаза гармонического колебания.

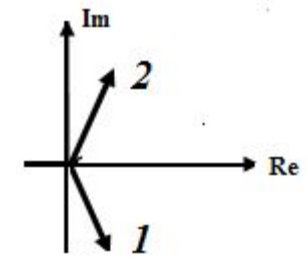
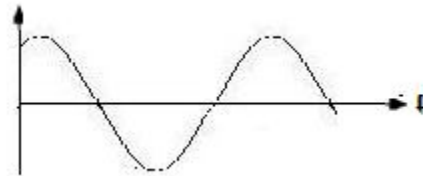
,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f = 1/T$  - циклическая частота,  $T$  - период колебания,

$X = X_m / \sqrt{2}$  - действующее (среднеквадратическое) значение гармонического колебания

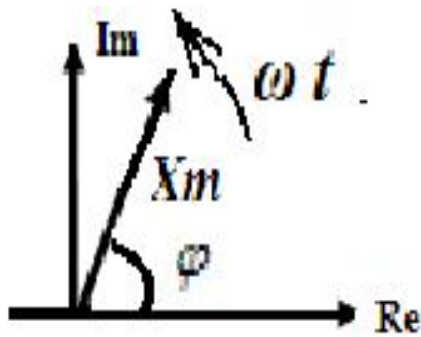
1)



2)



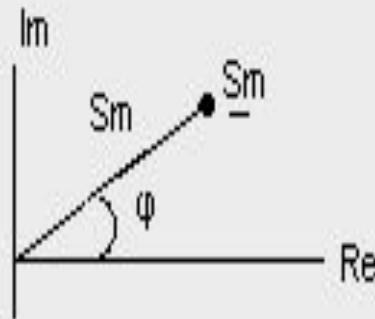
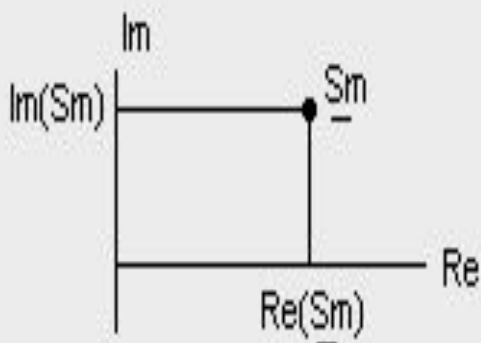
**Комплексная амплитуда и комплексное сопротивление. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме**



$$\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u(t) = \text{Re}[\underline{u}(t)] = \text{Re}[U_m e^{j(\omega t + \varphi)}] = \text{Re}[U_m e^{j\omega t}]$$

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi} = U_m \cos \varphi + j U_m \sin \varphi$$



- комплексная амплитуда  $\underline{u}(t)$



### Первый закон Кирхгофа

*В установившемся гармоническом режиме сумма комплексных амплитуд всех токов, сходящихся в произвольном узле электрической цепи, равна нулю.*

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_{mk} = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0$$

### Второй закон Кирхгофа

*В установившемся гармоническом режиме сумма комплексных амплитуд всех напряжений, действующих в произвольном контуре электрической цепи, равна нулю.*

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_{mk} = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k = 0$$

При суммировании комплексных значений токов и напряжений сохраняются те же правила знаков, что и при суммировании их мгновенных значений

## КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

*Комплексное сопротивление пассивного участка электрической цепи – это отношение комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) напряжения и тока, действующих на зажимах этого участка цепи, т.е.*

$$\underline{Z} = z(j\omega) = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = z(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

*Это выражение называется законом Ома в комплексной форме. В нём:  $z(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  – модуль и аргумент  $\underline{z}(j\omega)$ . Зависимость  $z(\omega)$  от частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) двухполюсника, зависимость  $\varphi(\omega)$  – его фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)*

*Величина, обратная комплексному сопротивлению, называется комплексной проводимостью двухполюсника, т.е.*

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} = \underline{I}/\underline{U} = \left( I_m/U_m \right) e^{-j\varphi} = Y(\omega)e^{-j\varphi}$$

## Комплексные сопротивления пассивных двухполюсных элементов

### Резистивное сопротивление

$$u_R(t) = U_{mR} \cos(\omega t + \varphi) \quad \div \quad U_{mR} e^{j\varphi}$$

$$i_R(t) = \frac{U_{mR}}{R} \cos(\omega t + \varphi) \quad \div \quad I_{mR} = I_{mR} e^{j\varphi} = \frac{U_{mR}}{R} e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z}_R = \frac{U_{mR}}{I_{mR}} = R$$

### Емкость

$$u_C(t) = U_{mC} \cos(\omega t + \varphi_U) \quad \div \quad U_{mC} e^{j\varphi_U} = \underline{U}_{mC}$$

$$i_C(t) = C \frac{dU_C}{dt} = C U_{mC} \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \varphi_U) = -\omega C U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_U) =$$
$$\omega C U_{mC} \cos(\omega t + \varphi_U + \pi/2) \quad \div \quad I_{mC} = I_{mC} e^{j\varphi_i} = j \omega C \underline{U}_{mC}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{U_{mC}}{I_{mC}} = 1/j\omega C = -j 1/\omega C$$

## Индуктивность

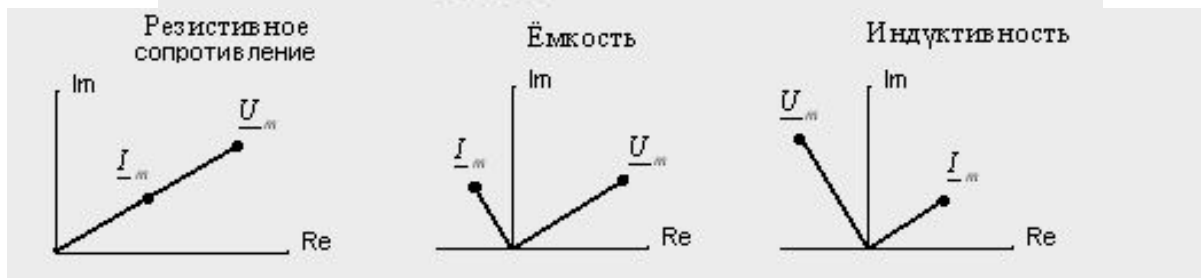
$$i_L(t) = I_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i) \div I_{mL} = I_{mL} e^{j\varphi_i}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L I_{mL} \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \varphi_i) = -\omega L I_{mL} \sin(\omega t + \varphi_i) =$$

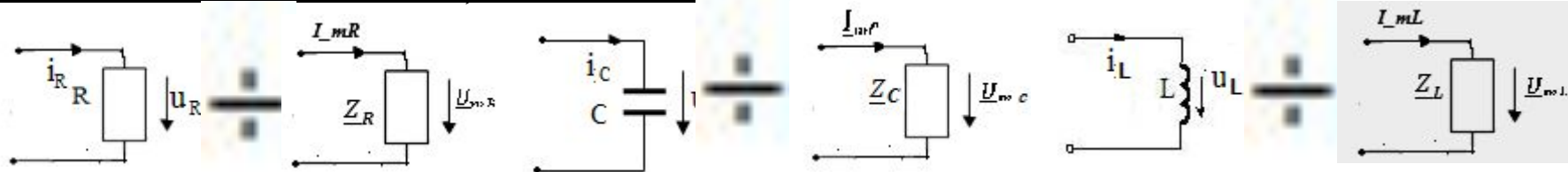
$$\omega L_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2) \div U_{mL} = U_{mL} e^{j\varphi_U} = j\omega L I_{mL}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{U_{mL}}{I_{mL}} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$\underline{Z}_L$



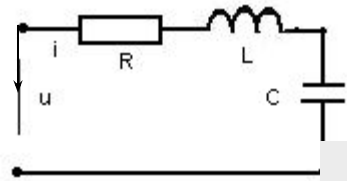
## Комплексные схемы замещения элементов



## Символический метод анализа электрических цепей



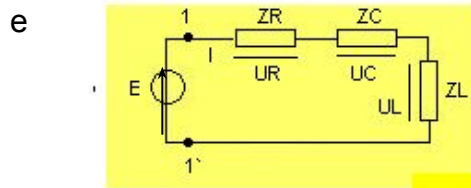
### Пример



$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = ?$$

$$u_R + u_C + u_L = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$



$$I_m = \frac{U_m}{Z_3} \quad U_m = U_m e^{j\varphi}$$

$$Z_3 = R + j(\omega L - 1/\omega C) = Z_3 e^{j\varphi_z} =$$

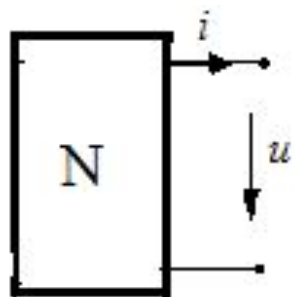
$$= \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} e^{j \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}}$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$e^{j(\varphi_u - j \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R})} \div$$

$$\div i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_u - j \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)$$

### Энергетические соотношения



$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

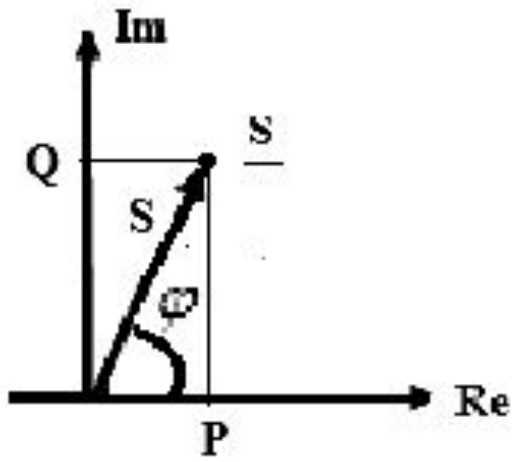
$$p = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi + \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_i)$$

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi, \quad \varphi = \varphi_U - \varphi_i$$

$$S = U \cdot I = \frac{U_m I_m}{2}$$

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = \underline{U} \underline{I}^*$$

$$\underline{S} = S \cos \varphi + j S \sin \varphi = P + jQ$$



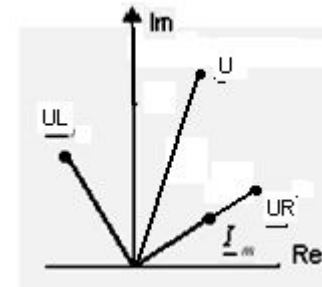
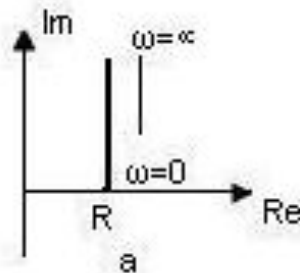
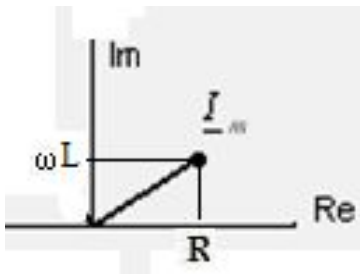
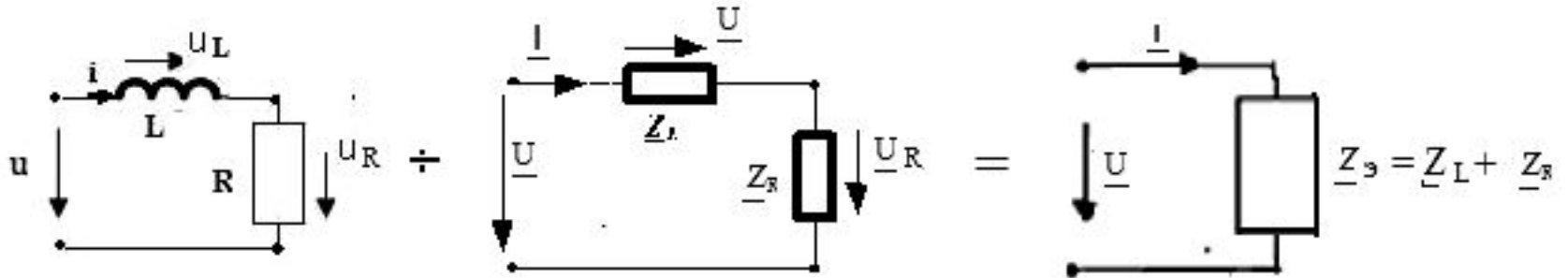
$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Уравнение баланса мощностей

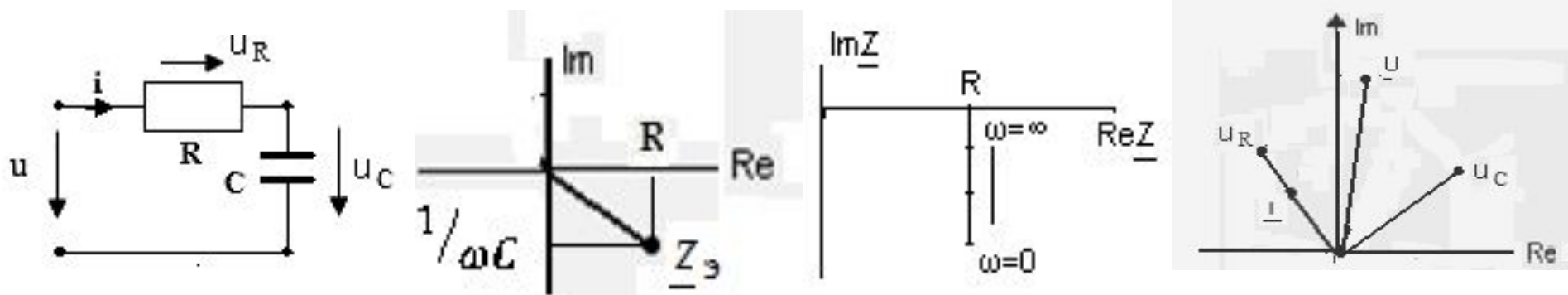
$$\sum_{k=1}^n \underline{S}_k = \sum_{k=1}^n \underline{P}_k + j \sum_{k=1}^n \underline{Q}_k$$

Анализ простейших цепей

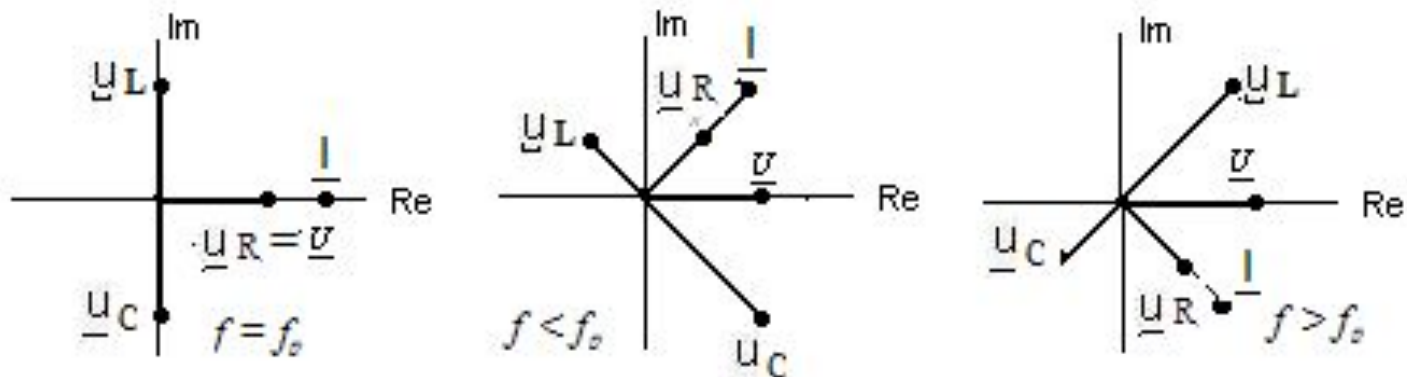
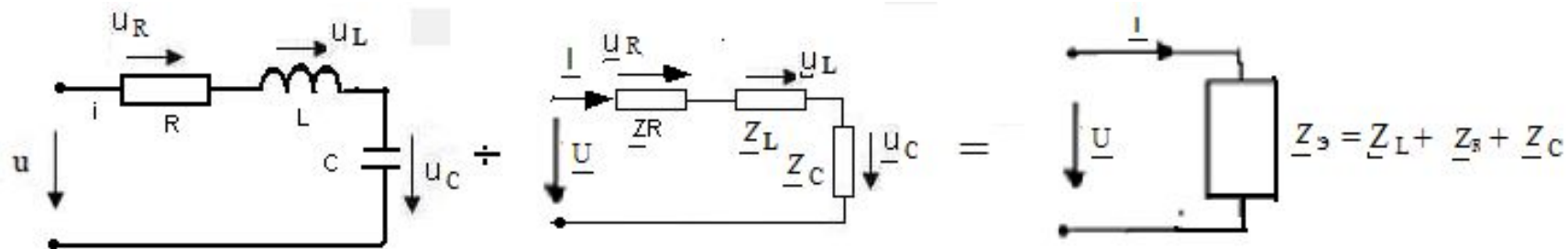
Последовательная RL-цепь



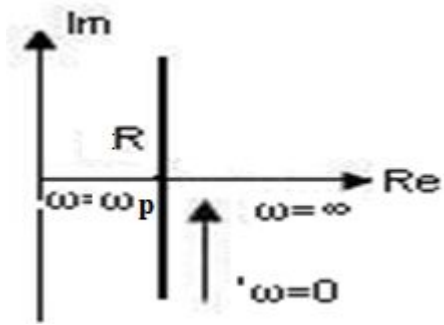
## Последовательная RC-цепь



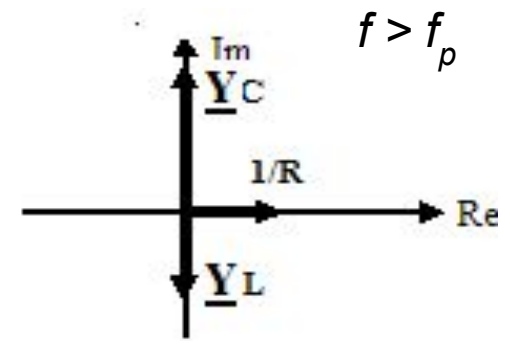
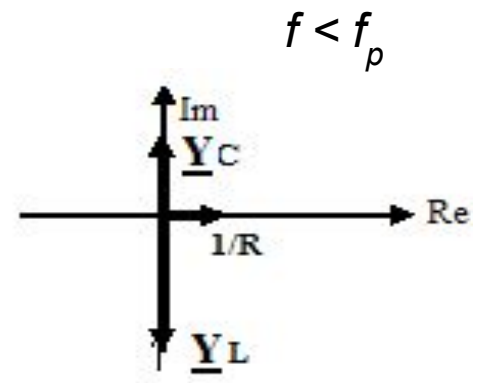
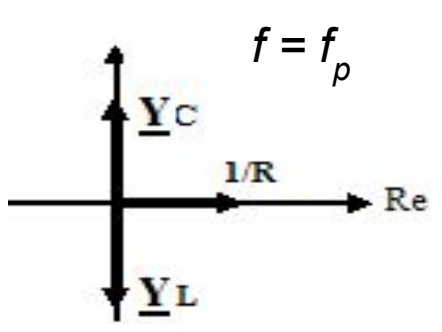
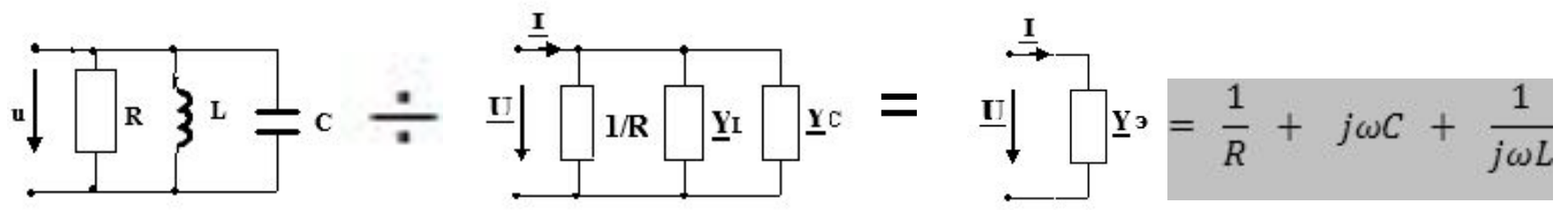
## Последовательная RLC-цепь

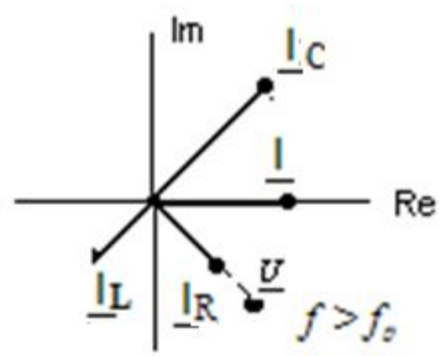
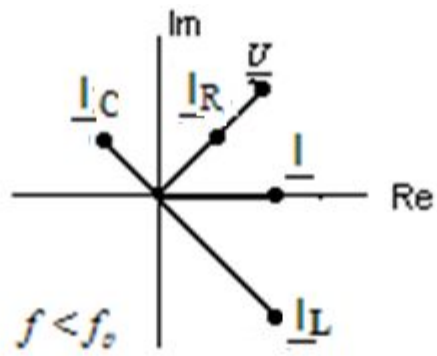
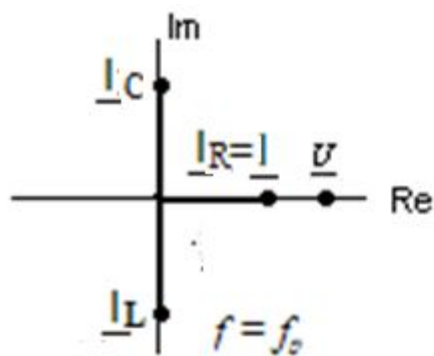
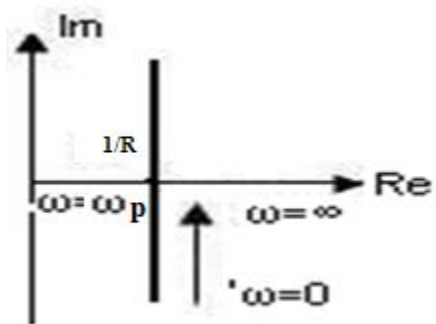






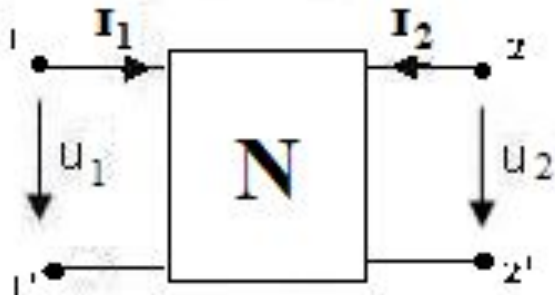
Параллельная RLC-цепь





# ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

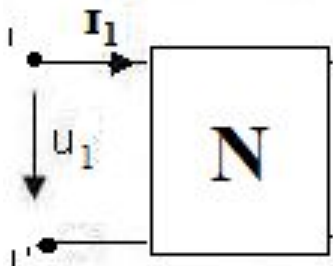
## *Входные и передаточные частотные характеристики*



Системная функция цепи

$$H = \frac{\text{реакция}}{\text{воздействие}}$$

## Входные системные функции



$$H_{11} = \begin{cases} u_1/i_1 \\ i_1/u_1 \end{cases}$$

## Передаточные системные функции

- передаточная функция по напряжению -  $u_1/u_2$
- передаточная функция по току -  $i_1/i_2$
- передаточное сопротивление -  $u_1/i_2$
- передаточная проводимость -  $i_2/u_1$

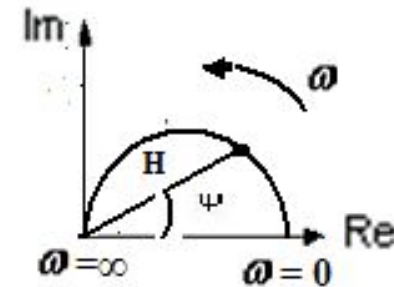
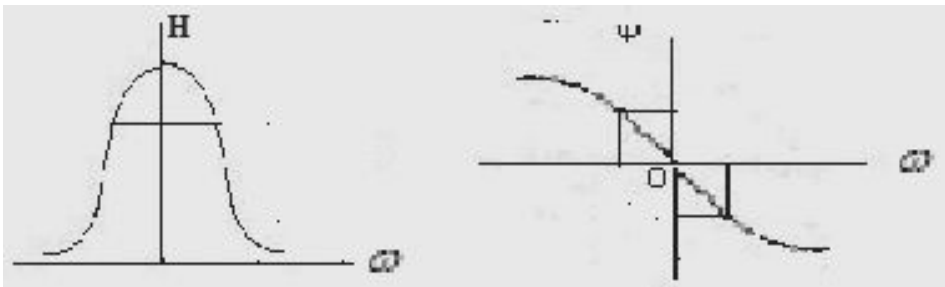
При гармоническом воздействии системные функции цепи называются частотными характеристиками входными и передаточными

$$H(j\omega) = \frac{Y_m}{X_m} \quad \underline{Y_m} - \text{комплексная амплитуда реакции}$$

$\underline{X_m}$  - комплексная амплитуда воздействия

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\psi(\omega)}$$

$H(\omega)$  - АЧХ,  $\psi(\omega)$  - ФЧХ

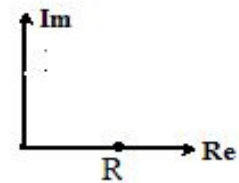
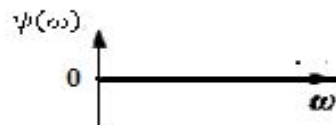
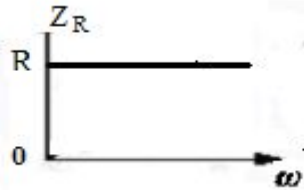


Годограф комплексной частотной характеристики представляет собой геометрическое место комплексных чисел  $H(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $\infty$ .

## Частотные характеристики пассивных двухполюсных элементов

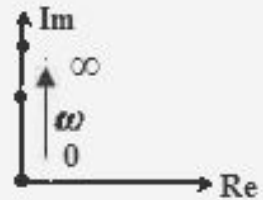
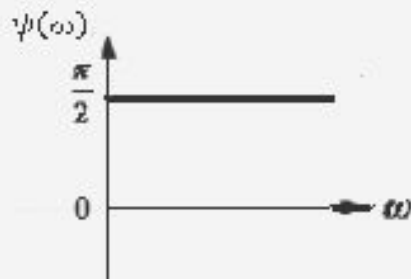
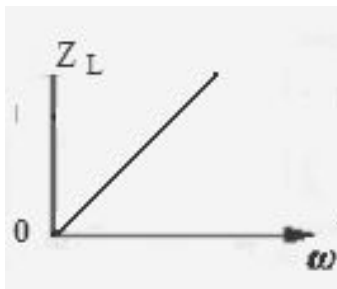
### Резистивное сопротивление

$$\underline{Z}_R = R \quad Z_R = R, \quad \psi_R = 0$$



### Индуктивность

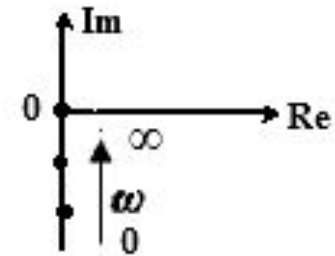
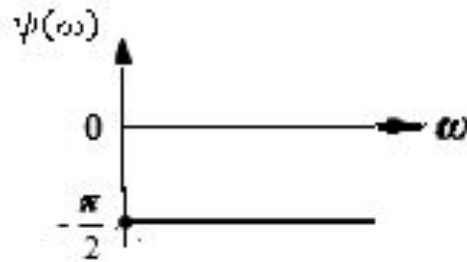
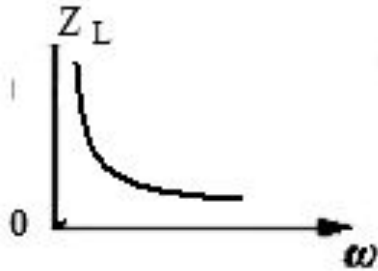
$$\underline{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad Z_L = \omega L, \quad \psi_L = \pi/2$$



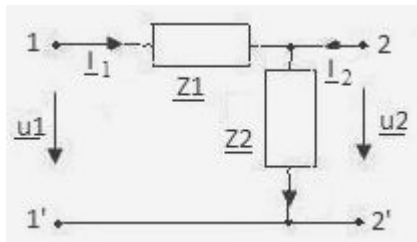
Ёмкости

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$Z_C = 1/\omega C, \quad \psi_C = -\pi/2$$

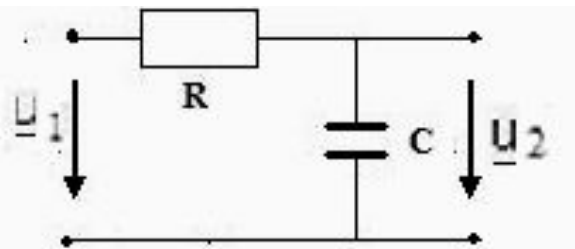


### Частотные характеристики RL и RC цепей



$$Z_{11}(j\omega) = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

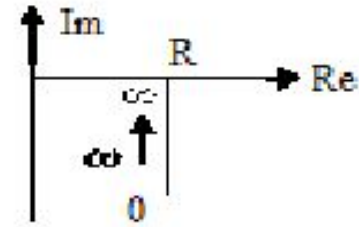
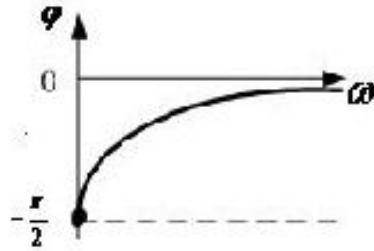
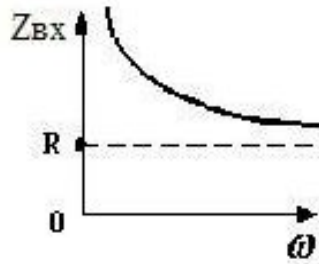
$$H(j\omega) = \frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$



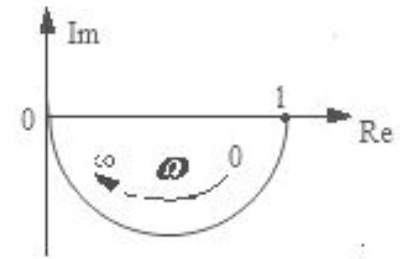
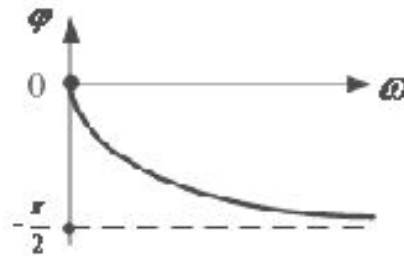
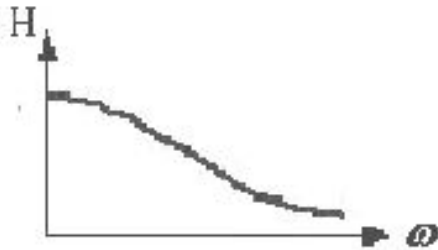
$$Z_{11}(j\omega) = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} e^{-j\arctg 1/\omega RC}$$

$$H(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega CR)^2}} e^{-j\arctg \omega RC}$$

## Входные ЧХ



## Передаточные ЧХ

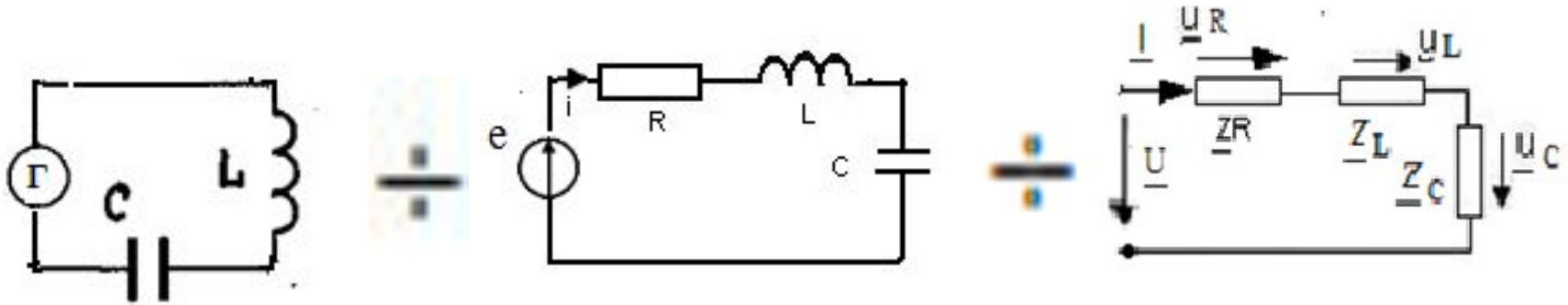


## Резонанс в электрических цепях

*Явление резкого возрастания амплитуды отклика цепи при приближении частоты воздействия к некоторым вполне определённым значениям называется резонансом.*

*Под резонансом понимают такой режим работы электрической цепи, содержащей ёмкости и индуктивности, при котором реактивные составляющие входного сопротивления и проводимости равны нулю.*

## Последовательный колебательный контур



$$Z_{11'}(j\omega) = \underline{Z}_{11'} = R + j\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right) = Z(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{L/C}$$

Отношение действующего значения напряжения на реактивном элементе контура к действующему значению напряжения на контуре на резонансной частоте называется добротностью контура.

$$Q = \frac{U_{L,\omega_0}}{U} = \frac{U_{C,\omega_0}}{U} = \frac{\rho I}{RI} = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \quad d = 1/Q$$



$$\Delta\omega/\omega_p = 2Q\delta$$

## Расстройки

- абсолютная

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad \Delta f = f - f_0;$$

- относительная

$$\delta = \Delta\omega/\omega_0 = \Delta f/f_0$$

- обобщённая

$$\xi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2Q\delta$$

$f$  и  $f_p$  – значения текущей и резонансной частот соответственно. При резонансе все расстройки равны нулю, при  $f < f_p$  они принимают отрицательные значения, при  $f > f_p$  – положительные.

## Входные ЧХ

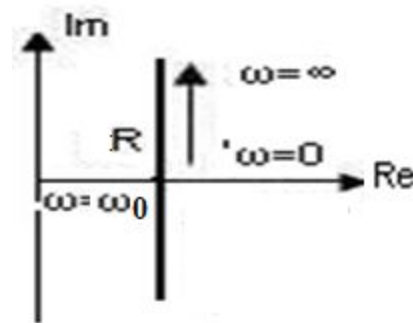
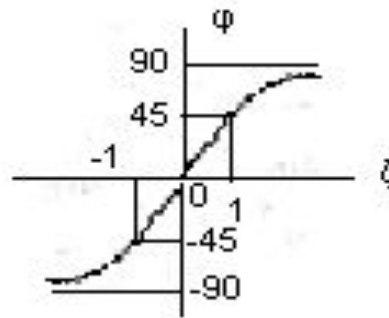
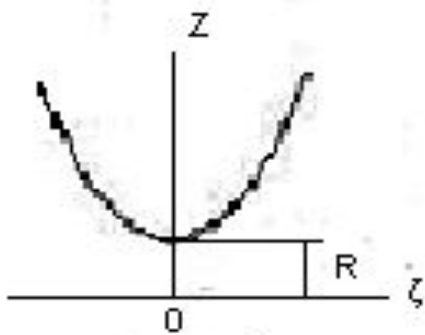
$$Z_{11'}(j\omega) = \underline{Z}_{11'} = R + j\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right) = Z(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

AЧХ

$$|Z(j\omega)| = Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R\sqrt{1 + \xi^2}$$

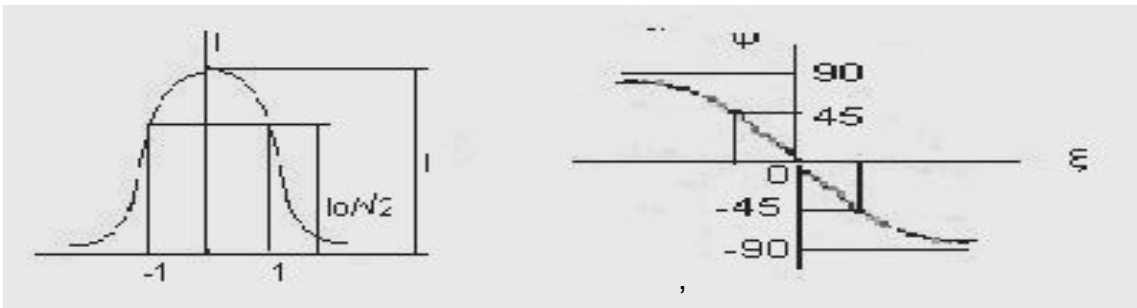
ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{arctg} \xi$$



$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{Z(j\omega)} = \frac{U}{Z(\omega)} e^{j[\psi_U - \varphi(\omega)]} = I(\omega) e^{j\psi_I(\omega)}$$

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad \psi_I = \psi_U - \operatorname{arctg} \xi \quad \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}}{R}$$



## Передаточные ЧХ

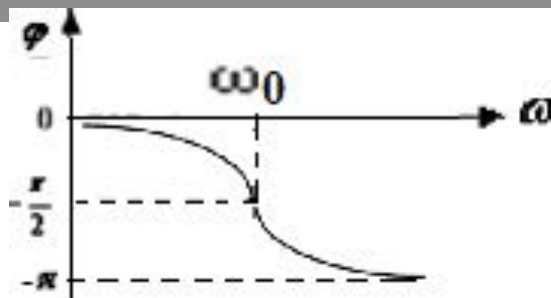
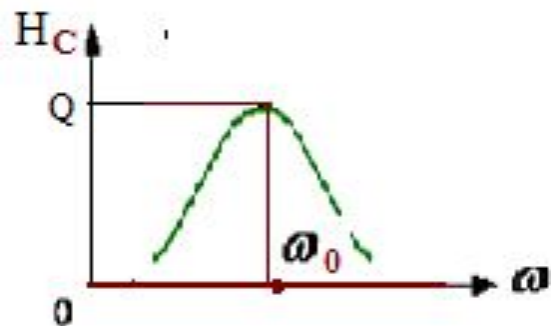
Комплексные напряжения на элементах контура

$$\underline{U}_C(\omega) = U_C(\omega) \cdot e^{j\psi_C(\omega)} = -\frac{j}{\omega C} \underline{I}(\omega) = \frac{I_0}{\omega C \sqrt{1+\xi^2}} \cdot e^{j(\psi_I(\omega)-90^\circ)} = U_1 Q \cdot \frac{\omega_p}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot e^{j(\psi_I(\omega)-90^\circ)}$$

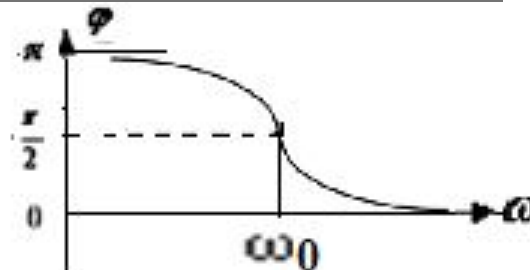
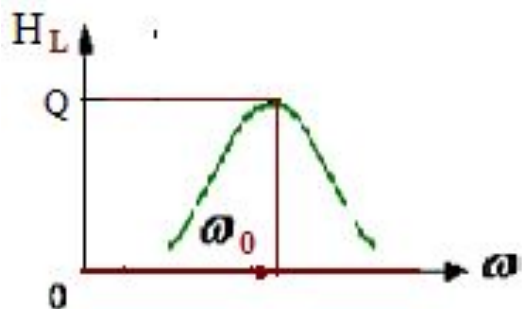
$$\underline{U}_L(\omega) = U_L(\omega) \cdot e^{j\psi_L(\omega)} = j\omega L \underline{I}(\omega) = \frac{\omega L I_0}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot e^{j(\psi_I(\omega)+90^\circ)} = U_1 Q \cdot \frac{\omega}{\omega_p} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot e^{j(\psi_I(\omega)+90^\circ)}$$

$$\underline{U}_R(\omega) = U_R(\omega) \cdot e^{j\psi_R(\omega)} = R \cdot \underline{I}(\omega) = \frac{R \cdot I_0}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot e^{j\psi_I}$$

$$H_c(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega} Q \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-j(\arctg \xi + \pi/2)}$$



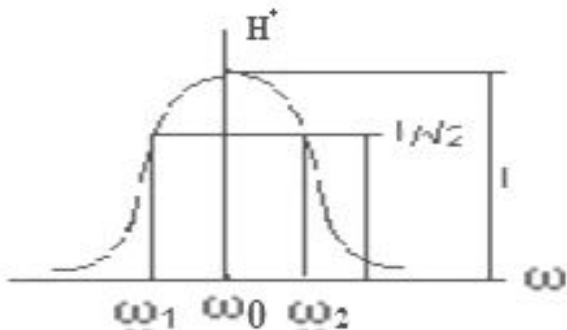
$$H_L(j\omega) = \frac{\omega}{\omega_0} Q \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j(\arctg\xi - \pi/2)}$$



## Избирательность

*Способность электрической цепи выделять колебания отдельных частот из суммы колебаний различных частот называется избирательностью.*

*Диапазон частот, в котором коэффициент передачи уменьшается не более, чем в  $\sqrt{2}$  раза по сравнению с его максимальным значением, называется полосой пропускания.*



$$2\Delta f = f_1 - f_2$$

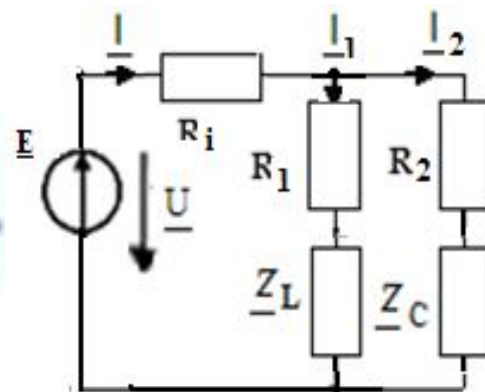
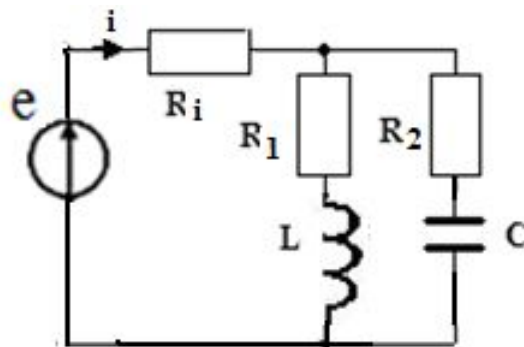
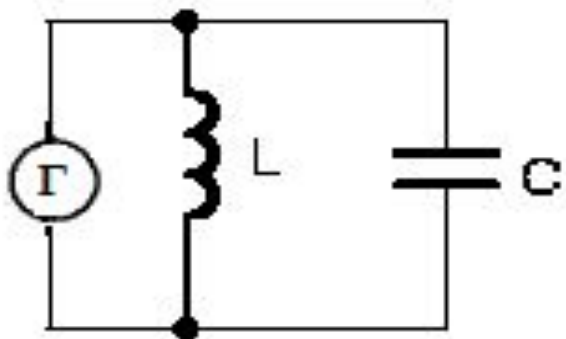
$$d = \frac{2\Delta f}{f_0} = \frac{f_2 - f_1}{f_0}$$

$$B = 20 \lg \frac{H(\omega_0)}{H(\omega)} = 20 \lg \sqrt{1 + \xi^2}$$

$$Q_{\Sigma} = Q \frac{1}{1 + R_{\text{н}}/R}$$

$$Q_{\Sigma} = Q \frac{1}{1 + QP/R_{\text{н}}}$$

### Параллельный колебательный контур



$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C}$$

= При  $\rho \gg R_1, \rho \gg R_2, \rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C}$

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{\rho^2}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)} \quad R = R_1 + R_2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Z_{110} = R_{\text{ex0}} = \rho^2/R = Q\rho = Q^2R$$

$$I_m = \frac{U_m}{\rho Q} (1 + j\xi) = \frac{U_m}{\rho Q} \sqrt{1 + \xi^2} e^{j(\varphi_u + \arctg \xi)}$$

$$I_{10} = I_{20} \approx \frac{U}{\rho}, \quad Q = \frac{I_{10}}{I} = \frac{I_{20}}{I}$$

Входные ЧХ

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{\rho Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j\arctg \xi}$$

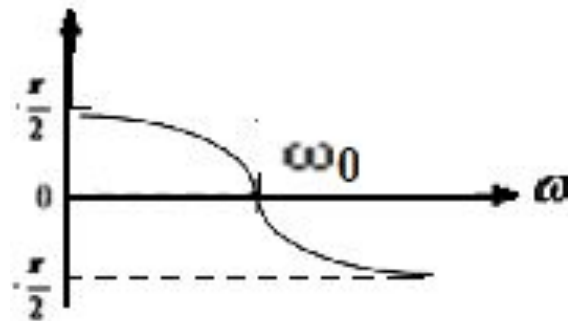
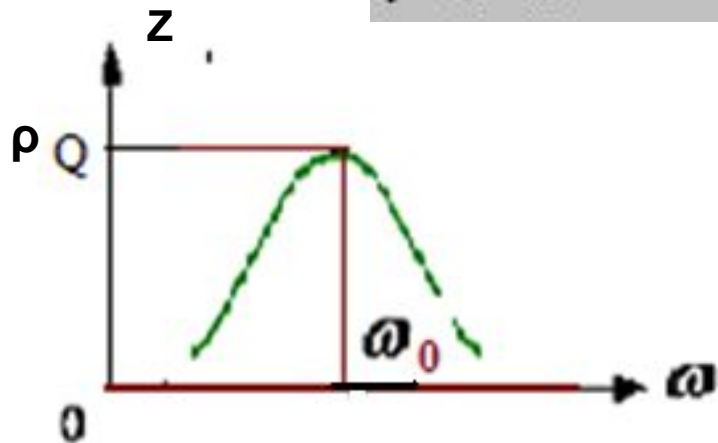
$\rho$

АЧХ

$$Z(\omega) = \frac{\rho Q}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$

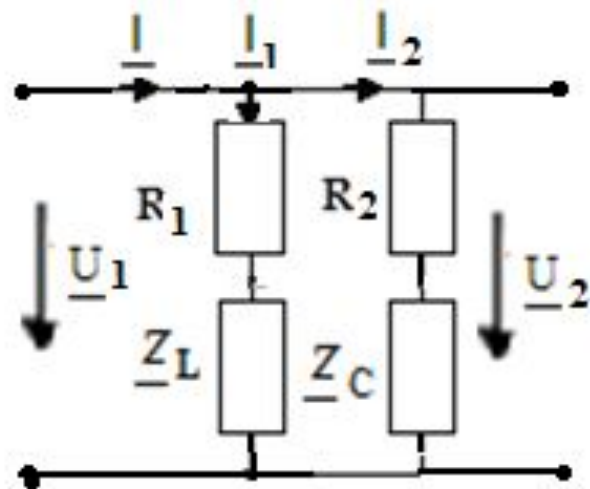
ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\arctg \xi$$

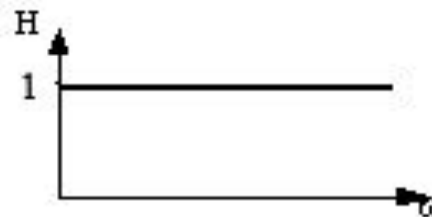


Передаточные ЧХ

по напряжению



$$H(j\omega) = 1 \cdot e^{j0}$$



по току

$$I_m = \frac{U_m}{\rho Q} (1 + j\xi) = \frac{U_m}{\rho Q} \sqrt{1 + \xi^2} e^{j(\varphi_u + \arctg \xi)}$$

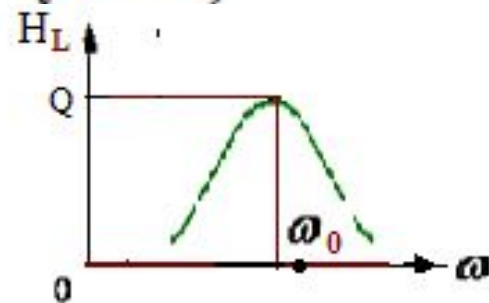
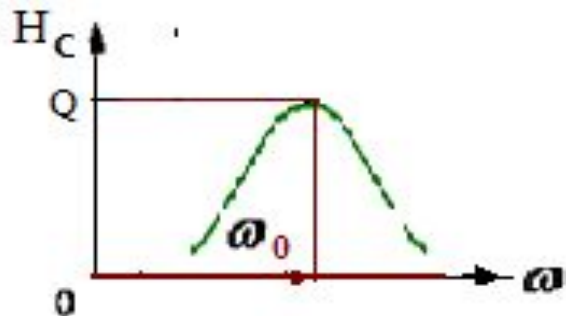
$$I_1(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\varphi_u - \arctg \omega L / R_1)}$$

$$I_2(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (1/\omega C)^2}} e^{j(\varphi_u + \arctg 1/\omega CR)}$$

Для контура с малыми потерями

$$H_{Li}(j\omega) = \frac{I_1}{I} = \frac{\omega_0}{\omega} Q \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j(\pi/2 + \arctg \xi)}$$

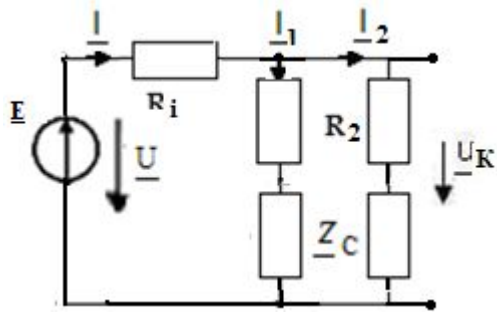
$$H_{Ci}(j\omega) = \frac{I_2}{I} = \frac{\omega}{\omega_0} Q \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{j(\pi/2 - \arctg \xi)}$$







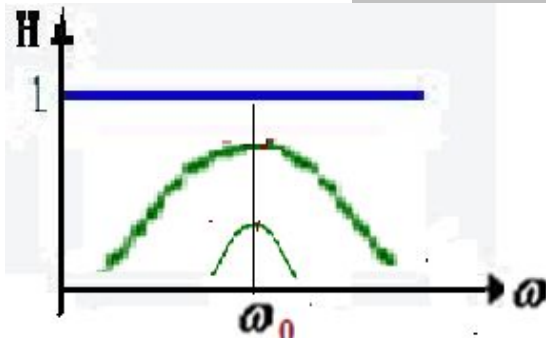
**Влияние внутреннего сопротивления генератора**



$$H_u(j\omega) = \frac{U_k}{U} = \frac{Z_{\text{ВХ}}}{R_i + Z_{\text{ВХ}}}$$

$$H_u(j\omega) = \frac{\rho}{R_i} \frac{Q_3}{1 + j\xi_3} = \frac{\rho}{R_i} \frac{Q_3}{\sqrt{1 + \xi_3^2}} e^{-j\arctg\xi_3}$$

$$Q_3 = \frac{R_i \rho}{R_i + \rho Q}, \quad \xi_3 = Q_3 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$



## Частотные характеристики связанных контуров

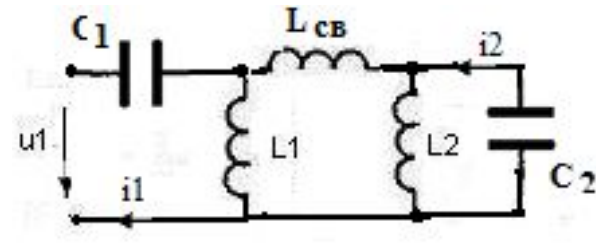
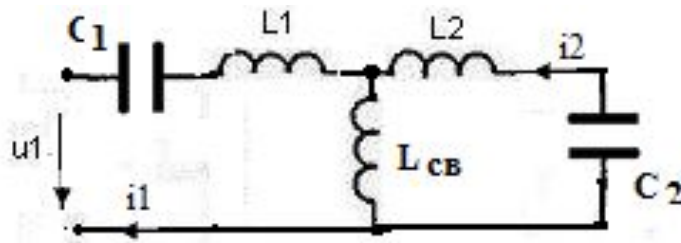
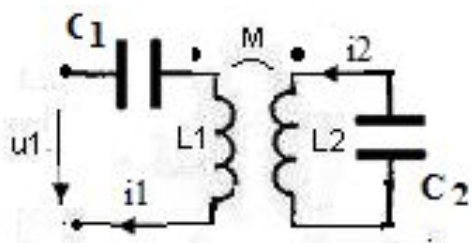
Два контура называются связанными, если возбуждение электрических колебаний в одном из них приводит к возникновению колебаний в другом.

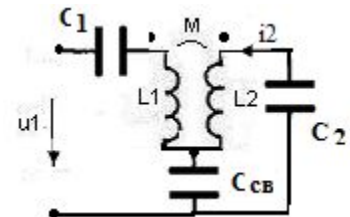
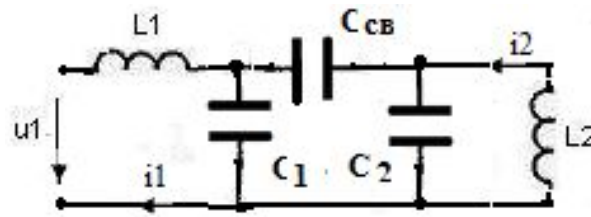
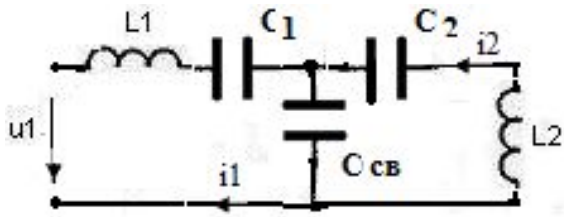
По типу элемента, с помощью которого осуществляется связь различают контуры:

- с трансформаторной связью;
- с индуктивной связью;
- с ёмкостной связью;
- с комбинированной (индуктивно-ёмкостной) связью.

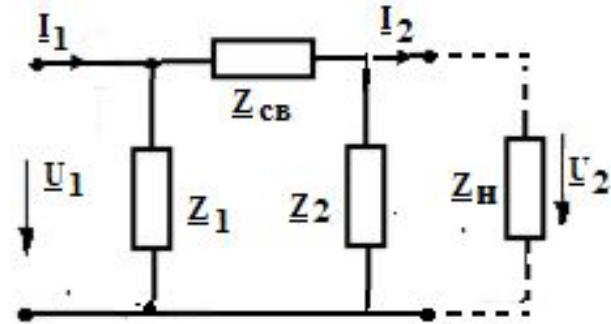
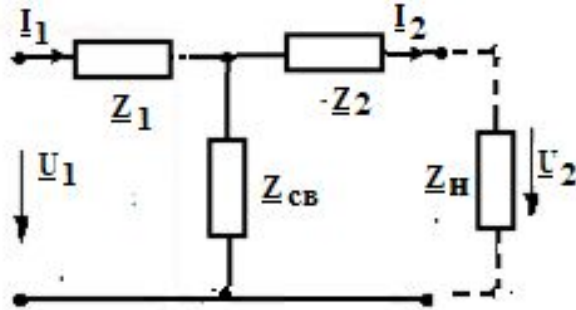
По способу включения элемента связи различают контуры:

- с внешней связью;
- с внутренней связью.





**Комплексные схемы замещения**



1

2

**Коэффициент связи**

трансформаторная связь -

$$k_{CB} = \frac{X_{CB}}{\sqrt{X_1 X_2}}$$

внутренняя индуктивная связь -

$$k_{CB} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

внутренняя ёмкостная связь -

$$k_{CB} = \frac{L_{CB}}{\sqrt{(L_{CB} + L_1)(L_{CB} + L_2)}}$$

$$k_{CB} = \frac{\sqrt{C_{11} C_{22}}}{C_{CB}}$$

$$C_{11} = \frac{C_1 C_{CB}}{C_1 + C_{CB}}$$

$$C_{22} = \frac{C_2 C_{CB}}{C_2 + C_{CB}}$$

### Схема замещения 1

$$\underline{Z}_{11} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{CB} \underline{I}_2 = \underline{U}_1$$

$$\underline{Z}_{22} \underline{I}_2 - \underline{Z}_{CB} \underline{I}_1 = 0$$

$$\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{11}}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{11}}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{2BH}}$$

$$\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_{CB}}{\underline{Z}_{22}}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_{CB}}{\underline{Z}_{22}}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{1BH}}$$

### Обозначения

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{CB}$$

$$= R_{11} + jX_{11} = R_{11}(1 + j\xi_1)$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{CB}$$

$$= R_{22} + jX_{22} = R_{22}(1 + j\xi_2)$$

$$\underline{Z}_{1BH} = -\frac{\underline{Z}_{CB}^2}{\underline{Z}_{22}}$$

$$\underline{Z}_{2BH} = -\frac{\underline{Z}_{CB}^2}{\underline{Z}_{11}}$$

## Виды резонанса

Первый частный

$$\max_{X_{11} = -X_{1ВН}} (I_1) = \frac{\underline{U}_1}{R_{11} + R_{1ВН}}$$

Второй частный

$$\max_{X_{22} = -X_{2ВН}} (I_1) = \frac{\underline{U}_1 X_{св} / Z_{11}}{R_{22} + R_{2ВН}}$$

Сложный

$$\begin{aligned} \max_{X_{22} = -X_{2ВН}} \max (I_2) &= \frac{\underline{U}_1}{2\sqrt{R_{11}R_{22}}} \\ X_{св} &= \sqrt{Z_{11}Z_{22}} \\ X_{11} &= -X_{1ВН} \end{aligned}$$

Сложный

$$\begin{aligned} \max_{X_{22} = -X_{2ВН}} \max (I_2) &= \frac{\underline{U}_1}{2\sqrt{R_{11}R_{22}}} \\ X_{св} &= \sqrt{R_{11}R_{22}} \\ X_{11} &= -X_{1ВН} \end{aligned}$$

При  $\underline{Z}_{св} = jX_{св}$

$$I_2 = \frac{U_1 jX_{св}}{R_{11}R_{22}[1 - \xi_1 \xi_2 + X_{св}^2/(R_{11}R_{22}) + j(\xi_1 + \xi_2)]}$$
$$X_{св}^2/(R_{11}R_{22}) \approx k^2 Q_1 Q_2 \quad A = k\sqrt{Q_1 Q_2} \quad A - \text{фактор связи}$$

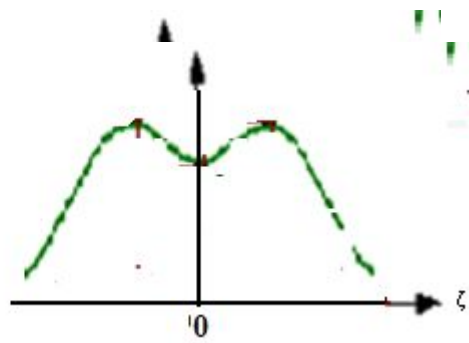
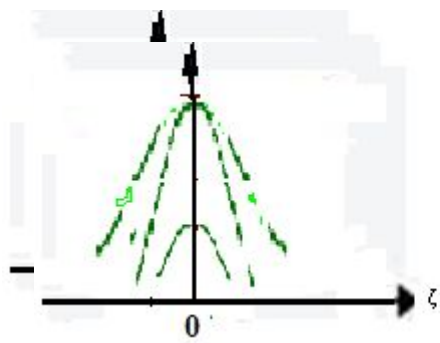
Нормированная относительно  $\max \max I_2$  АЧХ тока  $I_2$

$$(Q_1 = Q_2 = Q \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi)$$

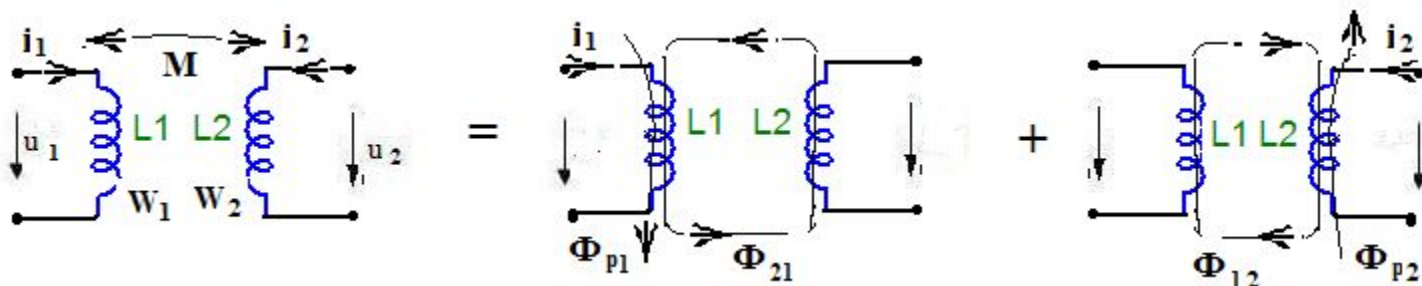
$$\frac{I_2}{\max \max I_2} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2)^2 + 2\xi^2(1 + A^2) + \xi^4}}$$

1.  $K < d, (A < 1)$  - слабая связь
2.  $K > d, (A > 1)$  - сильная связь
3.  $K = d, (A = 1)$  - критическая связь

$$d = \frac{1}{Q}$$



## Электрические цепи с взаимной индуктивностью



$\Phi_{21}$  - магнитный поток, пронизывающий вторую катушку и создаваемый током первой катушки (поток взаимной индукции первой катушки);

$\Phi_{12}$  - магнитный поток, пронизывающий первую катушку и создаваемый током второй катушки (поток взаимной индукции второй катушки);

$\Phi_{p1}$  - поток рассеяния первой катушки;

$\Phi_{p2}$  - поток рассеяния второй катушки.

$\Phi_{11}$  - поток самоиндукции первой катушки,  $\Phi_{11} = \Phi_{21} + \Phi_{p1}$

$\Phi_{22}$  - поток самоиндукции второй катушки,  $\Phi_{22} = \Phi_{12} + \Phi_{p2}$

$\Phi_1$  ,  $\Phi_2$  - полные потоки, пронизывающие каждую из катушек

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}$$



$$\Psi = w\Phi = Li$$

$$L_1 = \Psi_{11} / i_1 \quad L_2 = \Psi_{22} / i_2 \quad M_{12} = \Psi_{12} / i_2 \quad M_{21} = \Psi_{21} / i_1$$

$$\Psi_{ij} = w_i \Phi_{ij}$$

**Закон электромагнитной индукции**

$$e = -d\Psi / dt = - (d\Psi / di)(di / dt)$$

**ЭДС, наводимые в связанных катушках**

$$e_1 = - \left( \frac{d\Psi_{11}}{di_1} \cdot \frac{di_1}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{di_2} \cdot \frac{di_2}{dt} \right)$$

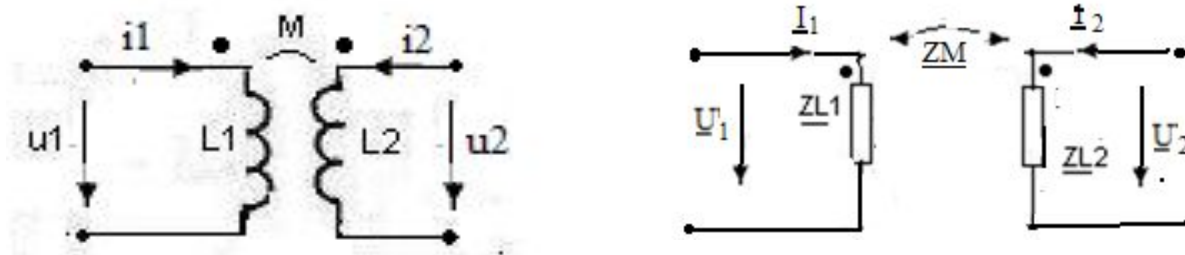
$$e_2 = - \left( \frac{d\Psi_{22}}{di_2} \cdot \frac{di_2}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{di_1} \cdot \frac{di_1}{dt} \right)$$

**Напряжения на зажимах катушек**

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

## Одноимённые зажимы



Одноимёнными называются такие зажимы магнитно связанных элементов, когда при одинаковом направлении токов относительно этих зажимов (оба тока «входят», или оба тока «выходят» со стороны этих зажимов) магнитные потоки обоих элементов направлены согласно

## Коэффициент магнитной связи

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11}} \cdot \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{\Phi_{12} \cdot \Phi_{21}}{(\Phi_{12} + \Phi_{p1})(\Phi_{21} + \Phi_{p2})}}$$

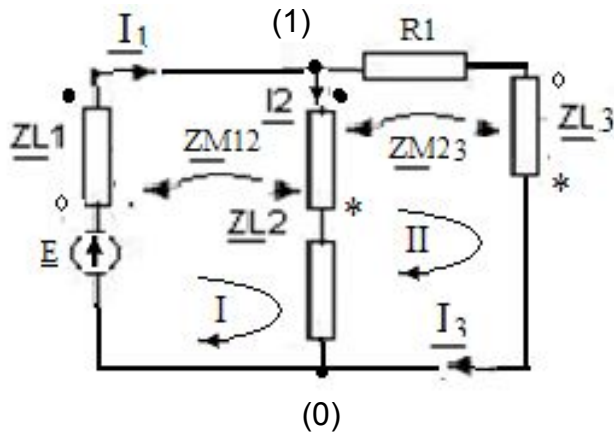
$$k = \sqrt{\frac{M_{12} \cdot M_{21}}{L_1 \cdot L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

## Анализ электрических цепей с взаимной индуктивностью

*Компонентные уравнения для связанных индуктивностей в комплексной форме*

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1$$



Система уравнений электрического равновесия

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

$$\underline{U}_{L1} + \underline{U}_{L2} + \underline{U}_C = \underline{E}$$

$$\underline{U}_R + \underline{U}_{L3} - \underline{U}_C - \underline{U}_{L2} = 0$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_3, \quad \underline{U}_C = \frac{\underline{I}_2}{j\omega C}$$

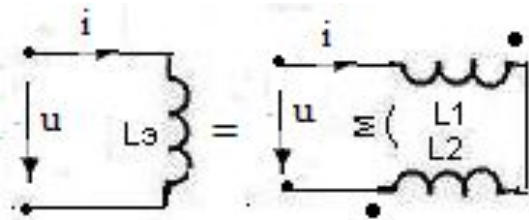
$$\underline{U}_{L1} = j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 - j\omega M_{12} \cdot \underline{I}_2 + j\omega M_{13} \cdot \underline{I}_3$$

$$\underline{U}_{L2} = -j\omega M_{21} \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega M_{23} \cdot \underline{I}_3$$

$$\underline{U}_{L3} = j\omega M_{31} \cdot \underline{I}_1 + j\omega M_{32} \cdot \underline{I}_2 + j\omega L_3 \cdot \underline{I}_3$$

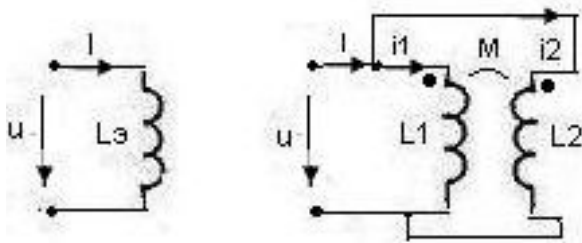
# Эквивалентные преобразования цепей со связанными индуктивностями

## Последовательное включение



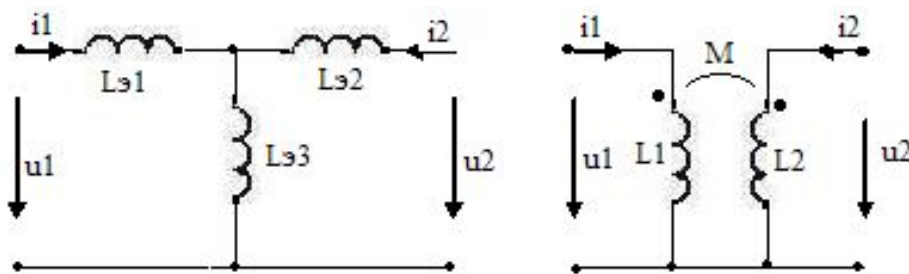
$$L_3 = L_1 + L_2 \pm 2M$$

## Параллельное включение



$$L_3 = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

## Развязка магнитных цепей



$$L_{31} = L_1 \mp M$$

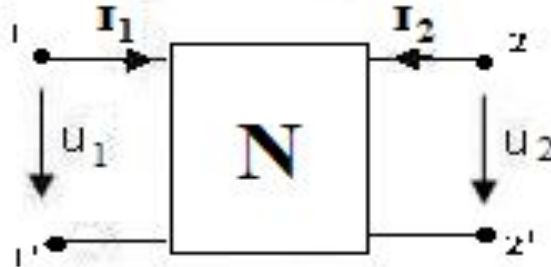
$$L_{32} = L_2 \mp M$$

$$L_{33} = \pm M$$

# Основы теории четырёхполюсников

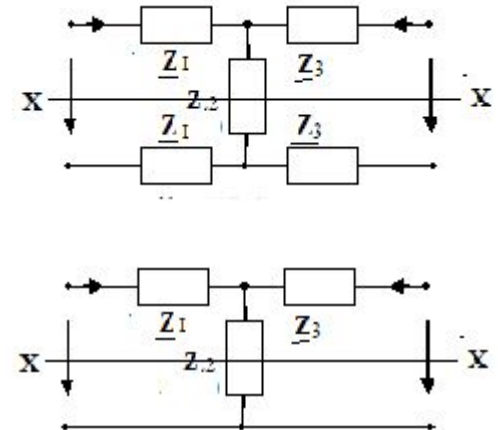
## Определения и классификация

Четырёхполюсник – электрическая цепь любой сложности, имеющая четыре внешних зажима.



## Классификация четырёхполюсников

- **пассивные и активные**
- **линейные и нелинейные**
- **уравновешенные и неуравновешенные**
- **симметричные и несимметричные**
- **по характеру элементов, входящих в состав четырёхполюсника, различают:**



• реактивные четырёхполюсники

• RC четырёхполюсники

• ARC четырёхполюсники и т.д.

- в зависимости от структуры, различают четырёхполюсники:

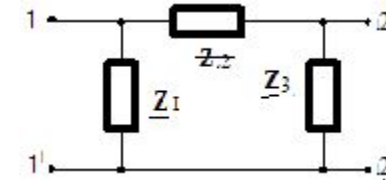
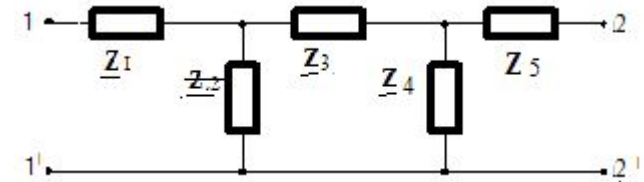
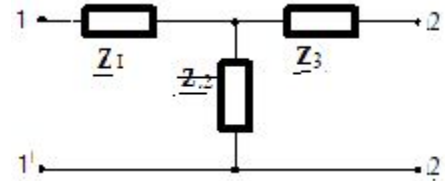
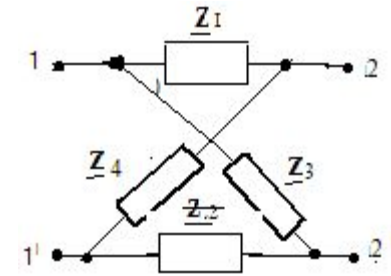
• мостовые

• лестничные

• Г-образные

• Т-образные

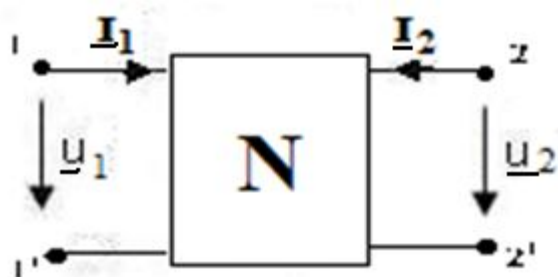
• П-образные и т.д.



### Уравнения передачи четырёхполюсников

Соотношения, которые связывают комплексные напряжения и токи, действующих на зажимах четырёхполюсника, называются уравнениями передачи.

|                         |                                    |                                    |                                    |                                    |                                    |                                    |
|-------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| Зависимые<br>Переменные | $\underline{U}_1, \underline{U}_2$ | $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ | $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ | $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ | $\underline{U}_1, \underline{I}_2$ | $\underline{I}_1, \underline{U}_2$ |
| Зависимые<br>Переменные | $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ | $\underline{U}_1, \underline{U}_2$ | $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ | $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ | $\underline{I}_1, \underline{U}_2$ | $\underline{U}_1, \underline{I}_2$ |
| Система<br>параметров   | $Y$                                | $Z$                                | $A$                                | $B$                                | $F$                                | $H$                                |



$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = (\underline{Y}) \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = (\underline{Z}) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \underline{U}_2 - \underline{A}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \underline{U}_2 - \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix} = (\underline{A}) \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{B}_{11} \underline{U}_1 - \underline{B}_{12} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{B}_{21} \underline{U}_1 - \underline{B}_{22} \underline{I}_1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix} = (\underline{B}) \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{F}_{11} \underline{U}_1 + \underline{F}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{F}_{21} \underline{U}_1 + \underline{F}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = (\underline{F}) \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{H}_{11} \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \underline{U}_2 \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = (\underline{H}) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{H}_{21} \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \underline{U}_2$$

### Уравнения связи

$$(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|Y|} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{pmatrix}$$

**Два и более четырёхполюсника с равными при всех частотах матрицами первичных параметров называются эквивалентными.**

**Первичные параметры четырёхполюсника можно определять при помощи опытов холостого хода и короткого замыкания на его зажимах**

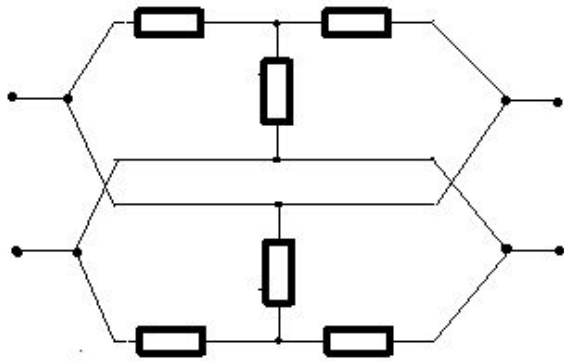
### Первичные параметры составных четырёхполюсников

**Составным называется четырёхполюсник, если он может быть представлен как соединение нескольких более простых (элементарных) четырёхполюсников.**



Если при соединении элементарных четырёхполюсников не происходит изменения соотношений между напряжениями и токами, то первичные параметры составного четырёхполюсника могут быть выражены через первичные параметры исходных четырёхполюсников.

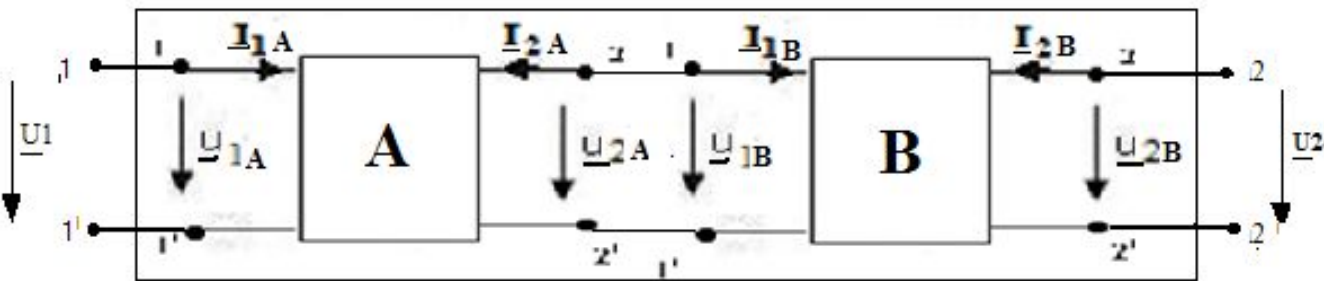
Соединения четырёхполюсников, удовлетворяющие этому условию, называются регулярными.



Известны следующие пять основных видов соединений четырёхполюсников:

- каскадное;
- параллельное;
- последовательное;
- Параллельно-последовательное;
- последовательно-параллельное.

Каскадное соединение

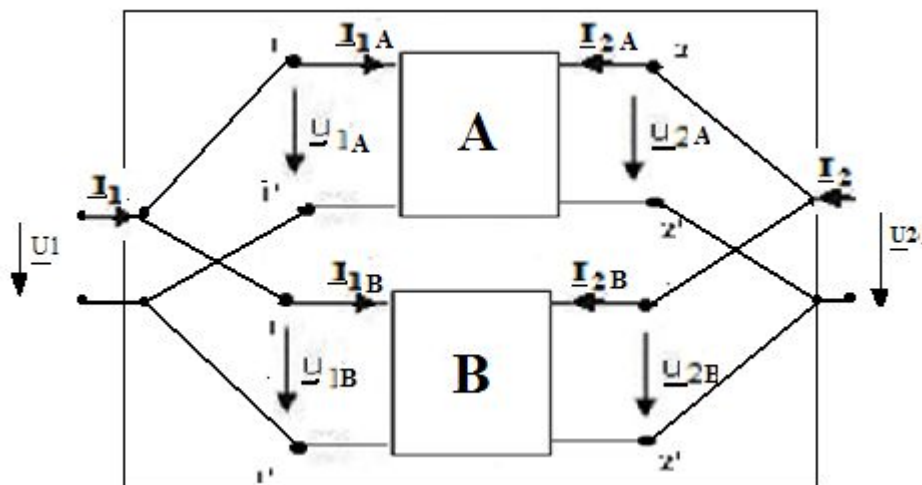


$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_{1A} \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_{2B} \\ \underline{U}_{2A} &= \underline{U}_{1B} \\ -\underline{I}_{2A} &= \underline{I}_{1B} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1A} \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{2B}$$

$$(A) = \prod_{k=1}^n (A_k)$$

Параллельное соединение



$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1A} = \underline{U}_{1B}$$

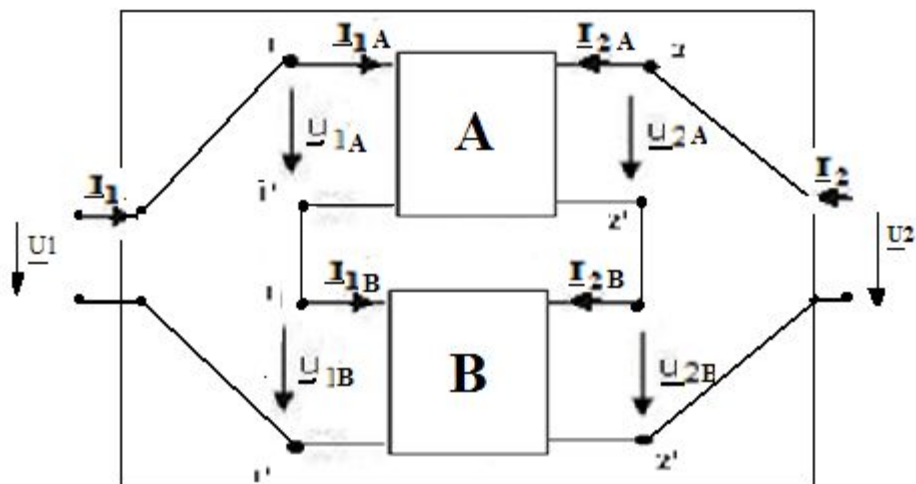
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2A} = \underline{U}_{2B}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2A} + \underline{I}_{2B}$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_A + \underline{Y}_B$$

$$(\underline{Y}) = \sum_{k=1}^n (\underline{Y}_k)$$

Последовательное соединение



$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1A} = \underline{I}_{1B}$$

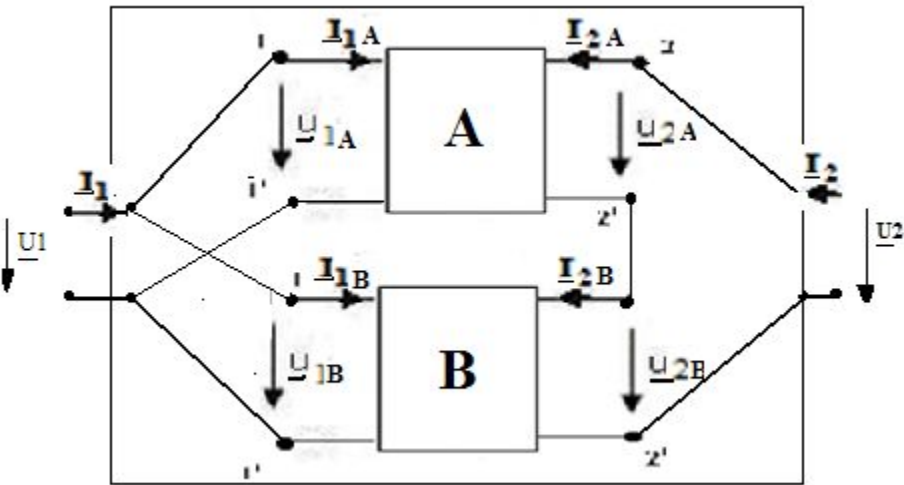
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2A} = \underline{I}_{2B}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{2B}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1A} + \underline{U}_{1B}$$

$$(\underline{Z}) = \sum_{k=1}^n (\underline{Z}_k)$$

### Параллельно-последовательное соединение



$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1A} = \underline{U}_{1B}$$

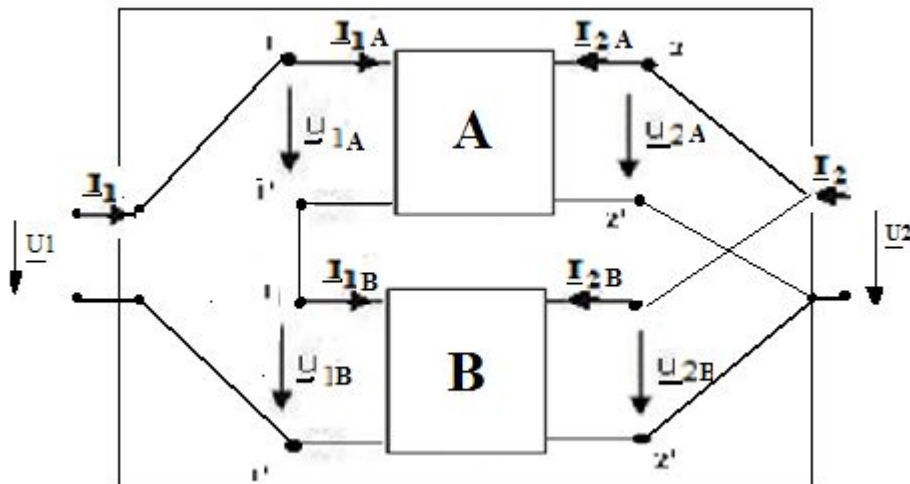
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2A} = \underline{I}_{2B}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{2B}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1A} + \underline{I}_{1B}$$

$$(\underline{F}) = \sum_{k=1}^n (\underline{F}_k)$$

### Последовательно – параллельное соединение



$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1A} = \underline{I}_{1B}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2A} = \underline{U}_{2B}$$

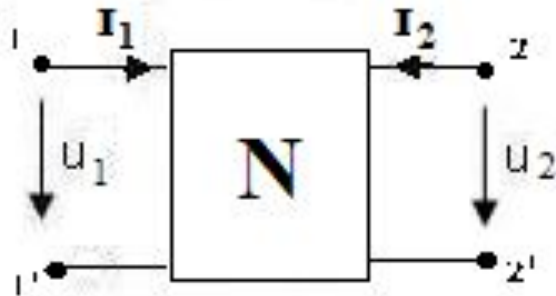
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2A} + \underline{I}_{2B}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1A} + \underline{U}_{1B}$$

$$(\underline{H}) = \sum_{k=1}^n (\underline{H}_k)$$

## 5. Режим негармонических воздействий

### 1. Классический метод анализа



$X(t)$  - воздействие

$Y(t)$  - реакция

### Порядок расчёта

1 записывают дифференциальное уравнение цепи

Основная система уравнений  
электрического равновесия

Решение относительно  
 $y(t)$

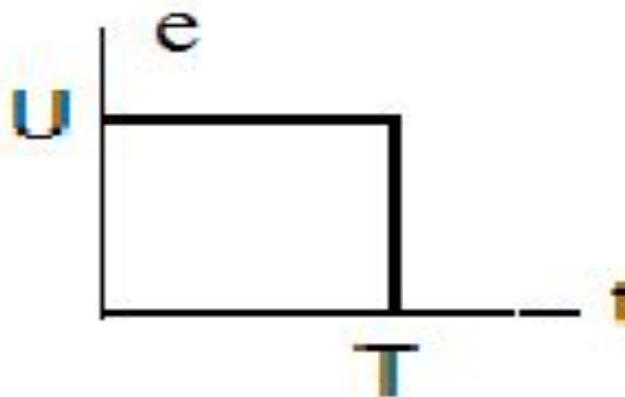
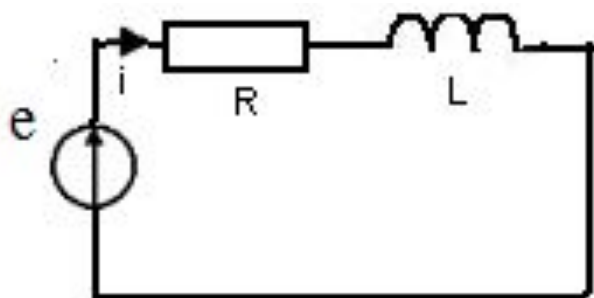
Дифференциальное  
уравнение цепи

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 =$$
$$a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{(m-1)} x(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0$$

\*

$n$  - порядок электрической цепи

## Пример



$$e(t) = U[1(t) - 1(t - T)]$$

$$i(t) = ?$$

$$i(t) = i_R = i_L$$

$$u_R + u_L = e(t)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U[1(t) - 1(t - T)]$$

2. Решение дифференциального уравнения цепи

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{пр}(t)$$

$y_{св}(t), y_{пр}(t)$  - свободная и принуждённая составляющие реакции цепи

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-p_k t}$$

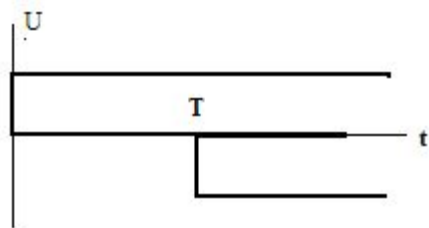
$A_k$ ,  $n$ ,  $k=1, \dots, n$  — постоянные интегрирования и корни характеристического уравнения соответственно

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$$

- а) простые (различные) вещественные корни  $A_k e^{p_k t}$
- б) равные вещественные корни  $\sum_{k=0}^m A_k t^k e^{p t}$
- в) попарно комплексно-сопряжённые корни  $p_{k,(k+1)} = -\alpha_k \pm j\omega_k$   
 $A_k e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$

$$p_1 = -\frac{R}{L} \quad \overline{i_{\text{св}}} = A_1 e^{-\frac{R}{L} t} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\overline{i_{\text{св}}} = \begin{cases} \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-T)} & \forall t \geq T \\ 0 & \forall t < T \end{cases}$$



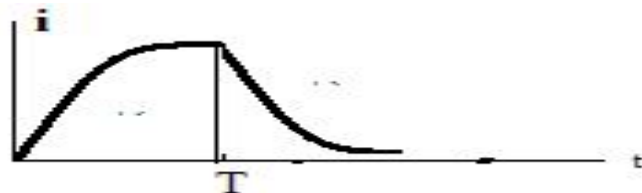
$$i_{\text{св}}(t) = \overline{i_{\text{св}}(t)} + \overline{\overline{i_{\text{св}}(t)}} \quad (**)$$

$$\overline{\overline{i_{\text{np}}}} = -\frac{U}{R}$$

$$i_{\text{np}}(t) = \overline{i_{\text{np}}(t)} + \overline{\overline{i_{\text{np}}(t)}}$$

$$\overline{i_{\text{np}}} = \frac{U}{R}$$

$$i(t) = \overline{i(t)} + \overline{\overline{i(t)}} = \begin{cases} \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) & \forall t \leq T \\ \frac{U}{R} \left( e^{-\frac{R}{L}(t-T)} - e^{-\frac{R}{L}t} \right) & \forall t > T \end{cases}$$



$y_{\text{np}}(t)$  - частное решение уравнения (\*).

3. На завершающем этапе анализа определяют постоянные интегрирования  $A_k$

Для этого в равенства (\*\*), подставляя значения  $y_{\text{np}}(t)$ , а также начальные условия и решают полученное уравнение.

## Интегральные представления сигналов.

**Спектральные представления негармонических сигналов. (Обобщённый ряд Фурье)**

Определения:

1. Энергия сигнала - 
$$E_S = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt$$

2. Скалярное произведение двух сигналов 
$$(S, V) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot V(t) dt$$

$$(\underline{S}, \underline{V}) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(t) \cdot \underline{V}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\dot{S}}(t) \cdot \underline{V}(t) dt$$

3. Два сигнала называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

**Обобщённый ряд Фурье для сигнала  $S(t)$  в ортогональном базисе  $\{V(t)\}$  имеет вид:**

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot V_n(t)$$

$$C_n = \frac{1}{E_n} \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot V_n(t) dt = \frac{1}{E_n} (S(t) \cdot V_n(t))$$



## Ряды Фурье для периодического сигнала

Периодический сигнал

$$S(t) = S(t \pm nT), n = 1, 2, \dots$$

На интервале  $[-T/2, T/2]$  зададим

ортогональный базис  $\{V(t)\}$   
следующего вида

$$V_0(t) = 1$$

$$V_1(t) = \sin \frac{2\pi t}{T}$$

$$V_2(t) = \cos \frac{2\pi t}{T}$$

.....

$$V_{(2n-1)}(t) = \sin \frac{2\pi n t}{T}$$

$$V_{2n}(t) = \cos \frac{2\pi n t}{T}$$

### Спектральное разложение

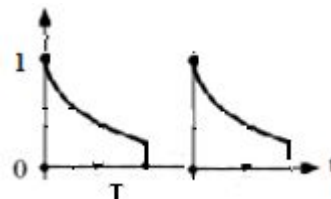
$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot V_n(t) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}$$

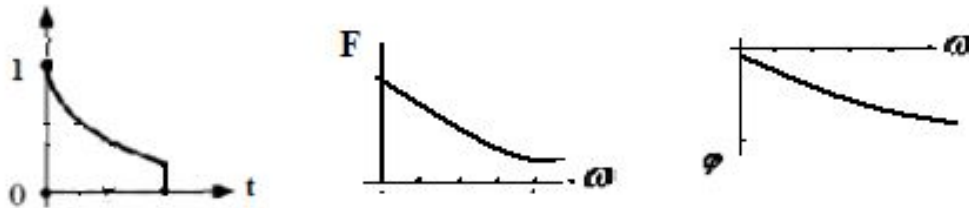


## Интеграл Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = A(\omega) - jB(\omega) = F(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$F(\omega) = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2} \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot \sin \omega t dt,$$



## Обратное преобразование Фурье

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{замена} \quad p = j\omega$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

## Теорема разложения

Если  $F(p)$  может быть представлено в виде отношения двух полиномов от  $p$ , не имеющих общих корней

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{(m-1)} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + b_1 p + b_0}$$

причём степень полинома  $N(p)$  выше, чем степень полинома  $M(p)$ , а уравнение  $N(p) = 0$  не имеет кратных корней, то

1)

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{\frac{dN(p)}{dp} \Big|_{p=p_k}} e^{p_k t}$$

и  $S(t)$  при действительных значениях корней уравнения  $N(p) = 0$ ,

$p_k, k = \overline{1, n}$  - корни уравнения  $N(p) = 0$ , представляет собой сумму  $n$  экспонент

Комплексно-сопряжённым корням соответствует убывающее по экспоненциальному закону гармоническое колебание.

2) Если уравнения  $N(p) = 0$  имеет один корень, равный нулю, т.е.  $N(p) = p N_1(p)$   
то

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(0)}{N_1(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M(p_k)}{p_k \frac{dN_1(p)}{dp} \Big|_{p=p_k}} e^{p_k t}$$

## Преобразование Лапласа

Прямое

$$L(p) = \int_0^{\infty} S(t) \cdot e^{-pt} dp$$

Обратное

$$\sigma = 0 \quad \omega = 0 \quad S(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} L(p) \cdot e^{pt} dp$$

### Способы вычисления

$\omega = 0$

1. Интегрирование с использованием теоремы вычетов
2. Таблицы оригинал - изображение
3. Разложение  $L(p)$  простые дроби с последующим использованием таблиц оригинал - изображение

$p = \sigma + j\omega$  — комплексная частота

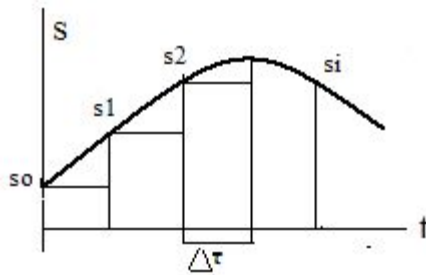
## Представления сигналов во временной области

$S(t)$ :

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau;$$

$$S(t) = S_0(t) + \int_0^t \frac{dS(\tau)}{d\tau} \cdot 1(t - \tau) d\tau;$$

$$\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$$



$$S(t) \approx S_0 \cdot 1(t) + \sum_{n=1}^N \Delta S_n \cdot 1(t - n\Delta\tau) = S_0 \cdot 1(t) + \sum_{n=1}^N \frac{\Delta S_n}{\Delta\tau} \cdot 1(t - n\Delta\tau) \Delta\tau$$

При

$$\Delta\tau \rightarrow 0 \quad \Delta\tau \div d\tau, n\Delta\tau \div \tau, \quad N\Delta\tau \div t, \quad \frac{\Delta S_n}{\Delta\tau} \div \frac{dS(\tau)}{d\tau}$$

## Представления цепей

| Представление сигнала | Описание цепи                     |
|-----------------------|-----------------------------------|
| $S(t)$                | Схема замещения (расчётная схема) |
| $F(j\omega)$          | Комплексная схема замещения       |
| $L(p)$                | Операторная схема замещения       |

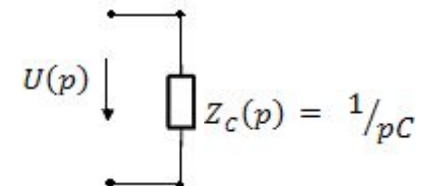
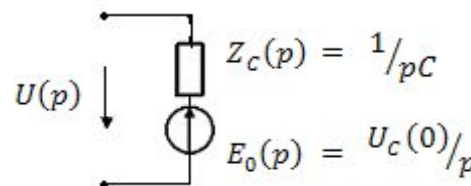
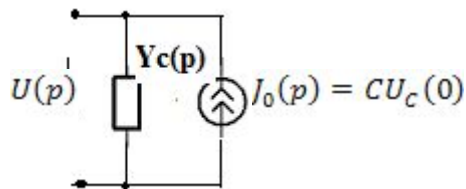
*Комплексная схема замещения следует из расчётной схемы цепи путём замены гармонических колебаний, описывающих задающие напряжения и токи независимых источников электрической энергии, их комплексными амплитудами, а элементов цепи - их комплексными сопротивлениями.*

$$\underline{Z}_R = R \quad \underline{Z}_C = 1/j\omega C \quad \underline{Z}_L = j\omega L$$

*Операторная схема замещения следует из расчётной схемы цепи путём замены гармонических колебаний, описывающих задающие напряжения и токи независимых источников электрической энергии, их  $L$ -изображениями, а элементов цепи - их операторными сопротивлениями.*

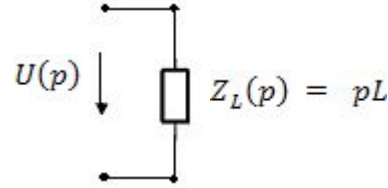
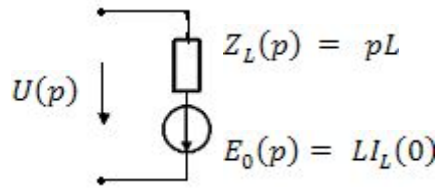
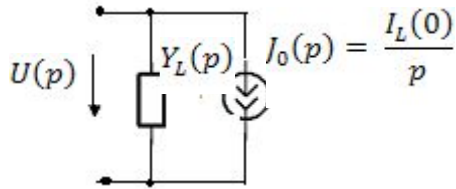
### Операторная схема замещения ёмкости

$$Y_C(p) = pC$$

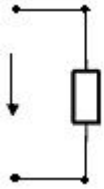


## Операторная схема замещения индуктивности

$$Y_L(p) = 1/pL$$



## Операторная схема замещения резистивного сопротивления



$$Z_R(p) = R$$

$$Y_R(p) = 1/R$$

## Системные функции электрических цепей

$$H(p) = \frac{L \text{ изображение реакции}}{L \text{ изображение воздействия}}$$

$p = \sigma + j\omega$  — комплексная частота

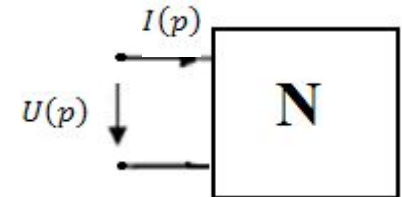
### Входные системные функции

Входное операторное сопротивление

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{U(p)}{I(p)}$$

Входная операторная проводимость

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$$



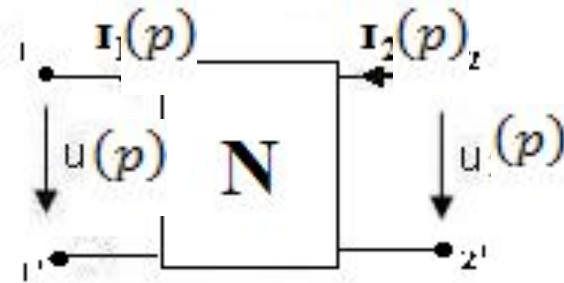
## Передаточные системные функции

Операторная передаточная функция по напряжению  $H_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$

Операторная передаточная функция по току  $H_I(p) = \frac{I_2(p)}{I_1(p)}$

Операторное передаточное сопротивление  $Z(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)}$

Операторная передаточная проводимость  $Y(p) = \frac{I_2(p)}{U_1(p)}$



### Способы определения

1. На основе дифференциального уравнения цепи

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 =$$

$$a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{(m-1)} x(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0$$

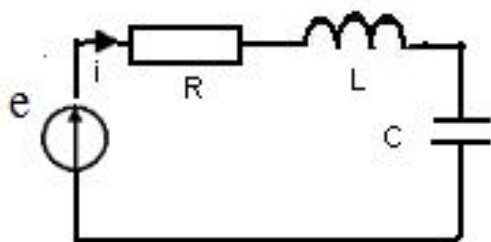
Это уравнение в операторной форме имеет вид:



$$Y(p)(b_n p^n + b_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + b_1 p + b_0) = X(p)(a_m p^m + a_{m-1} p^{[m-1]} + \dots + a_1 p + a_0)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{[m-1]} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + b_1 p + b_0}$$

Пример



Определить

А) Входную операторную проводимость

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$$

Б) Операторную передаточную функцию по напряжению

$$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$$

$$\text{А) } LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{de}{dt} \quad I(p)(LCp^2 + RCp + 1) = E(p) pC$$

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{I(p)}{E(p)} = \frac{pC}{LCp^2 + RCp + 1}$$

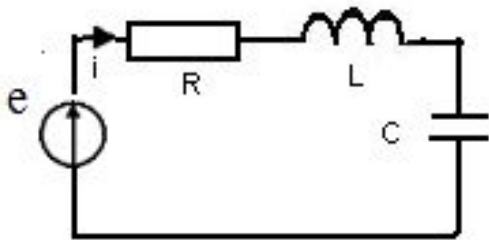
$$\text{Б) } LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = e \quad U_C(p)(LCp^2 + RCp + 1) = E(p)$$

$$H_U(p) = \frac{U_C(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

## 2. На основе анализа операторных схем замещения цепи

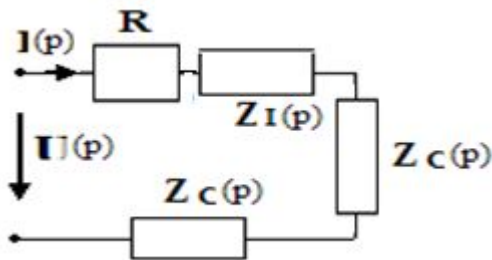
Заменяв в заданной электрической цепи двухполюсные элементы их операторными схемами замещения, а задающие токи и напряжения независимых источников электрической энергии их  $L$ -изображениями, получим операторную схему замещения заданной цепи. При записи уравнений электрического равновесия для  $L$ -изображений независимых переменных можно использовать все методы, которые используются с этой целью в символическом методе анализа электрических цепей. Ясно, что при этом комплексные амплитуды реакций и воздействий должны быть заменены их  $L$ -изображениями, а комплексные сопротивления (проводимости) – операторными сопротивлениями (проводимостями). В результате анализа операторной схемы замещения цепи определяется  $L$ -изображение требуемой реакции цепи и после деления его на  $L$ -изображение входного воздействия- искомая системная характеристика цепи.

Пример



$$H_U(p) = \frac{U_C(p)}{E(p)} = \frac{I(p) \cdot Z_C(p)}{I(p) \cdot Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{Z_C(p)}{Z_{\text{вх}}(p)}$$

$$Z_C(p) = \frac{1}{pC} \quad Z_{\text{вх}}(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$$



$$H_U(p) = \frac{U_C(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

Заменяя оператор  $p$  на  $j\omega$  в выражении для  $H(p)$ , получим комплексную входную или передаточную функцию цепи

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

### Импульсная и переходная характеристики электрической цепи

Реакция электрической цепи на воздействие в виде  $\delta$ -функции называется импульсной характеристикой этой цепи -  $h_\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \forall t = 0 \\ 0 & \forall t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Реакция электрической цепи на воздействие в виде функции единичного скачка называется переходной характеристикой этой цепи -  $h(t)$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \forall t > 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$$

$$h_\delta(t) = \frac{d}{dt} h(t), \quad h_\delta(t) = \frac{d}{dt} h(t) + h(0)\delta(t)$$

Импульсная и комплексная передаточная функции электрической цепи связаны между собой парой преобразования Фурье, т.е.

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} h_\delta(t) e^{-j\omega t} dt, \quad h_\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Импульсная и операторная передаточная функции электрической цепи связаны между собой парой преобразования Лапласа, т.е.

$$H(p) = \int_0^{\infty} h_{\delta}(t) e^{-pt} dt, \quad h_{\delta}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} H(p) e^{pt} dp$$

### Частотный (спектральный) метод анализа электрических цепей

Необходимо:

- определить комплексную спектральную плотность воздействия -  $F_{вх}(j\omega)$
- определить комплексную передаточную функцию цепи -  $H(j\omega)$
- определить комплексную спектральную плотность реакции цепи -  $F_{вых}(j\omega)$
- Определить реакцию цепи во временной области -

## Пример

•

•

•

•

## Условия безыскажённой передачи сигналов через электрическую цепь

Если спектр входного воздействия  $S(t)$ -  
то спектр  
и

Как следует из последнего выражения, безыскажающая электрическая цепь имеет постоянную АЧХ при любых значениях  $\omega$ , ФЧХ этой цепи линейна.

Комплексная передаточная функция многозвенной электрической цепи.

## Операторный метод анализа электрических цепей

### Необходимо:

- определить L-изображение воздействия
  
- определить операторную передаточную функцию цепи –  $H(p)$
- определить L-изображение реакции цепи -
  
- определить реакцию цепи во временной области -

### Пример

- 

- 

- 

- 

## Временной метод анализа электрических цепей

*Интеграл Дюамеля*

1.

2.



3

4.

*Если воздействие описывается двумя различными функциями, действующими на различных участках временной оси  $t$ .е.*

## Порядок расчёта реакции цепи

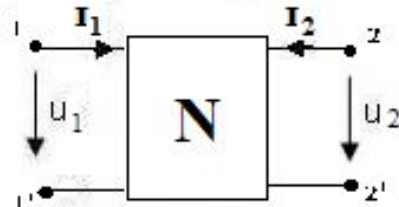
Необходимо:

- определить либо импульсную, либо переходную характеристики цепи
- пользуясь одной из форм записи интеграла Дюамеля, определить искомую реакцию цепи

### Пример

- $H(p) =$

### **Дифференцирующие электрические цепи**



$$\psi(\omega) =$$

$$H(p) =$$

=

=

=

- постоянная времени цепи

$H(p)$

=

При  $R \ll 1/pC$

Следовательно, при  $R \ll C$

**напряжение, снимаемое с резистивного сопротивления последовательной RC цепи имеет форму, близкую к производной от воздействия.**

**Переходная характеристика RC цепи имеет вид**

**последовательной RC цепь называется практически дифференцирующей, если  
верхняя частота рабочей полосы**

**...я сигнала, показанного выше,**

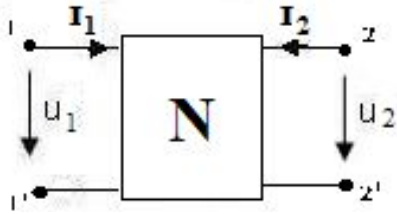
**Активная дифференцирующая цепь**

при  $\mu =$

**$H$**

**$T =$**

# Интегрирующие электрические цепи



$$\psi(\omega) =$$

$$H(p) =$$

= = =

T

H(p)

При  $R \gg 1/pC$

следовательно, при  $R \gg$

*напряжение, снимаемое с ёмкости, имеет форму, близкую к интегралу от воздействия.*

*Переходная характеристика имеет вид*

*последовательная RC цепь называется практически интегрирующей, если*

$0.1 R$

*нижняя частота рабочей полосы частот  
ствия*

# Активная интегрирующая цепь

при  $\mu = \infty$   $H =$