Теория вероятностей

1. Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф. «Теория вероятностей и случайных процессов», 1988
2. Магазинников Л.И. «Курс лекций по теории вероятностей», 1989
3. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. «Теория вероятностей и случайных процессов», 2010

Под **событием** мы будем понимать некоторый факт, который может иметь или не иметь место.

Все события можно разделить на две большие группы – события **детерминированные** и события **случайные**.

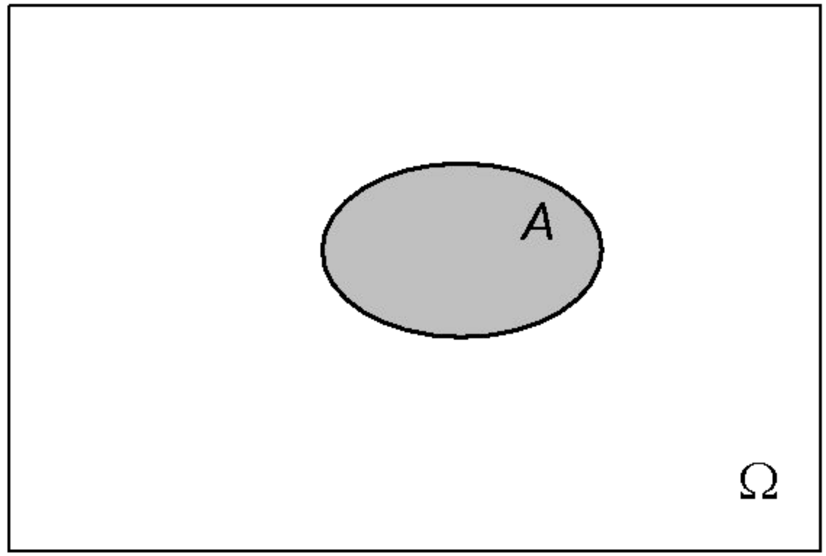
Детерминированными называются события, которые при данном комплексе условия либо всегда наступают, либо никогда не наступают

Случайным событием будем называть любой факт, который может наступить или не наступить. Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами, например, $A, B, C, \ldots$.

Среди всех событий выделим два крайних.

Событие Ω называется **достоверным**, если оно наступает в каждом опыте.

Событие $\varnothing$ называется **невозможным**, если оно не наступает ни в одном опыте.



Геометрическая интерпретация события

Пусть из некоторой области Ω наудачу выбирается точка. Если точка будет выбрана из некоторой области A, то считается, что наступило событие A. Сама область Ω является в этом случае достоверным событием.

1. **Следование событий.**

Говорят, что событие A влечёт событие B, что обозначается как $A \subset B$, если при наступлении события A обязательно наступает и событие B.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называются **равными**, что обозначается как $A = B$.

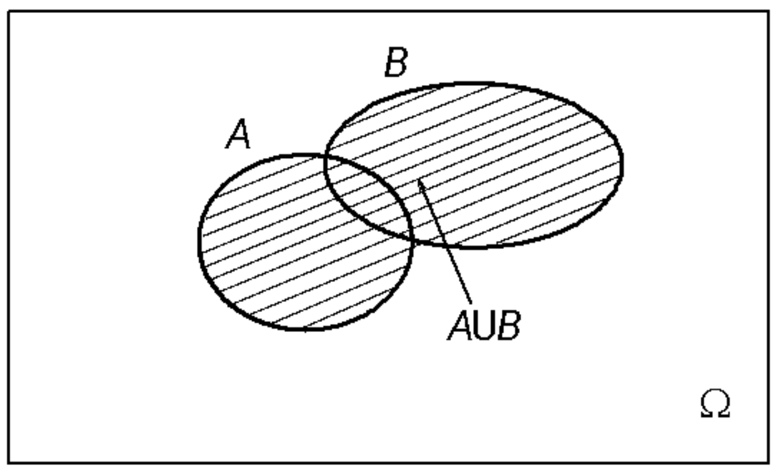
По определению будем полагать, что для любого случайного события A, имеет место соотношение $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. **Сумма событий.**

Суммой событий A и B называется такое событие

$$C = A \cup B,$$

которое наступает тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A или B.



Геометрическая интерпретация суммы событий

Случайные события называются ***несовместными***, если в рассматриваемом опыте они не могут произойти одновременно. ***Совместные*** события могут произойти одновременно.

Если события A и B несовместны, то их сумму C будем обозначать так

$$C = A + B.$$

Для сумм конечного или счётного числа событий A_i, $i = 1, 2, \ldots$ будем применять обозначения

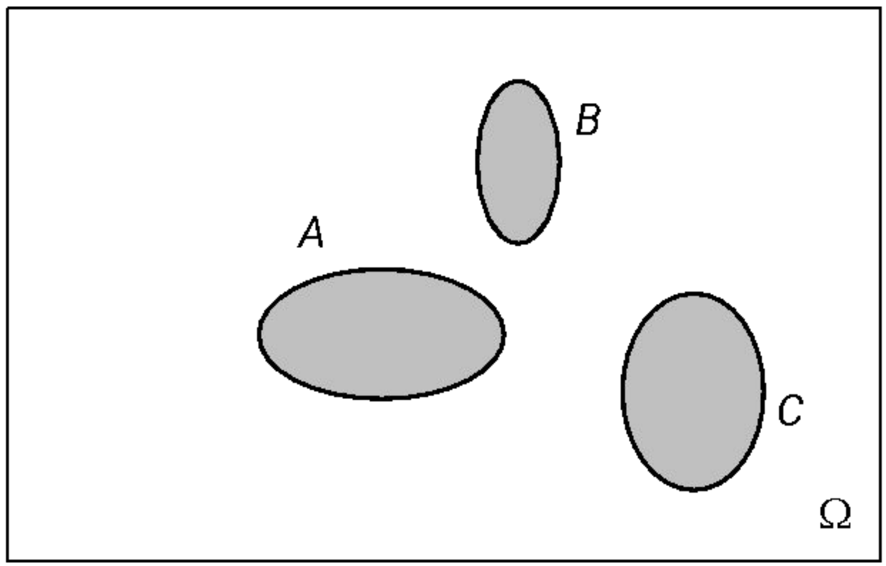
$$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad C = \bigcup_{i} A_i$$

для произвольных событий и обозначения

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad C = \sum_{i=1}^{\infty} A_i, \quad C = \sum_{i} A_i$$

для **попарно несовместных** событий.

События A_i называются **попарно несовместными**, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$. Пример попарно несовместных событий приведен на рисунке.



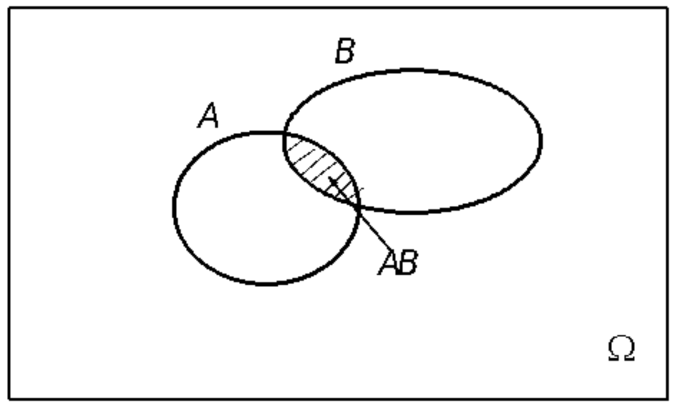
Геометрическая интерпретация попарно несовместных событий

3. **Произведение событий.**

Произведением событий A и B называется такое событие

$$C = A \cap B = AB,$$

которое наступает тогда, когда наступают оба события A и B.



Если $A \cap B = \varnothing$, то события A и B называются **несовместными**.

Для произведения конечного или счетного числа событий A_i, будем применять обозначения

$$C = \bigcap^{n} A_i, \quad C = \bigcap^{\infty} A_i, \quad C = \bigcap A_i.$$

4. **Вычитание событий.**

Разностью событий A и B называется такое событие

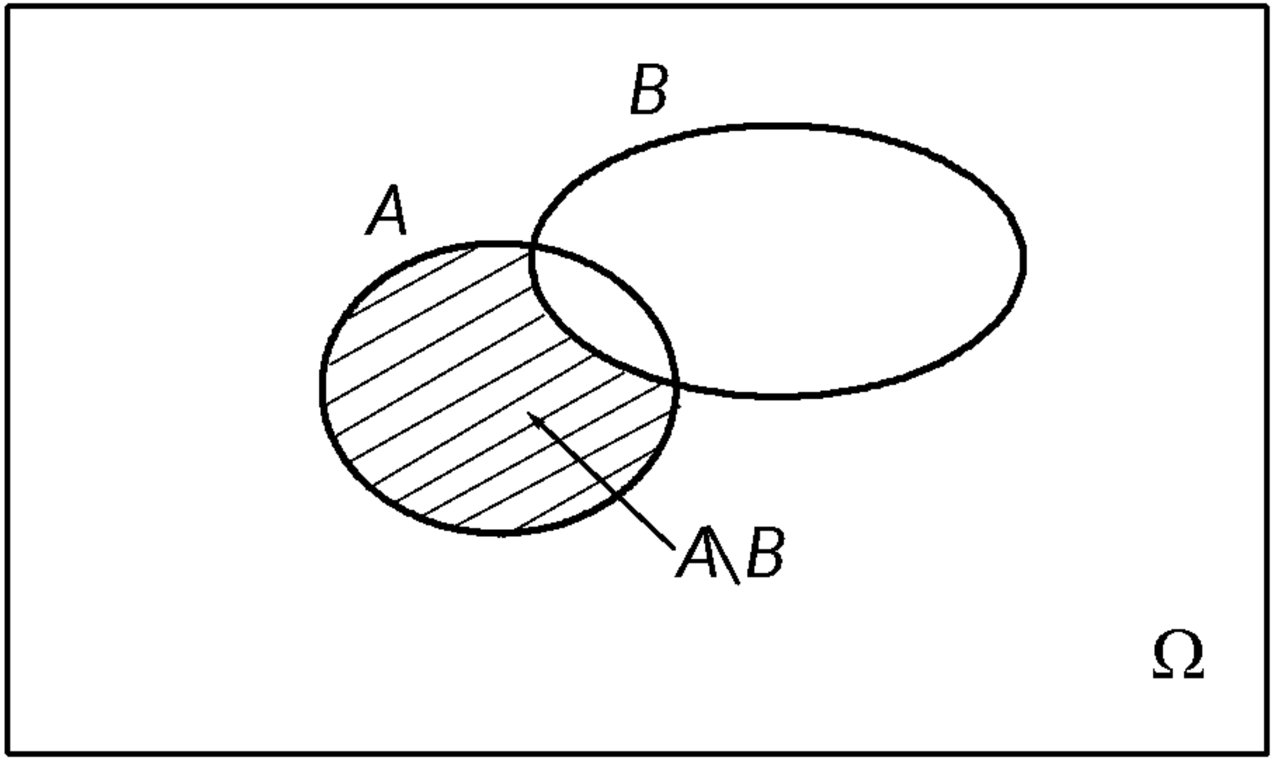
$$C = A \setminus B,$$

которое наступает тогда, когда наступает событие A и не наступает событие B.

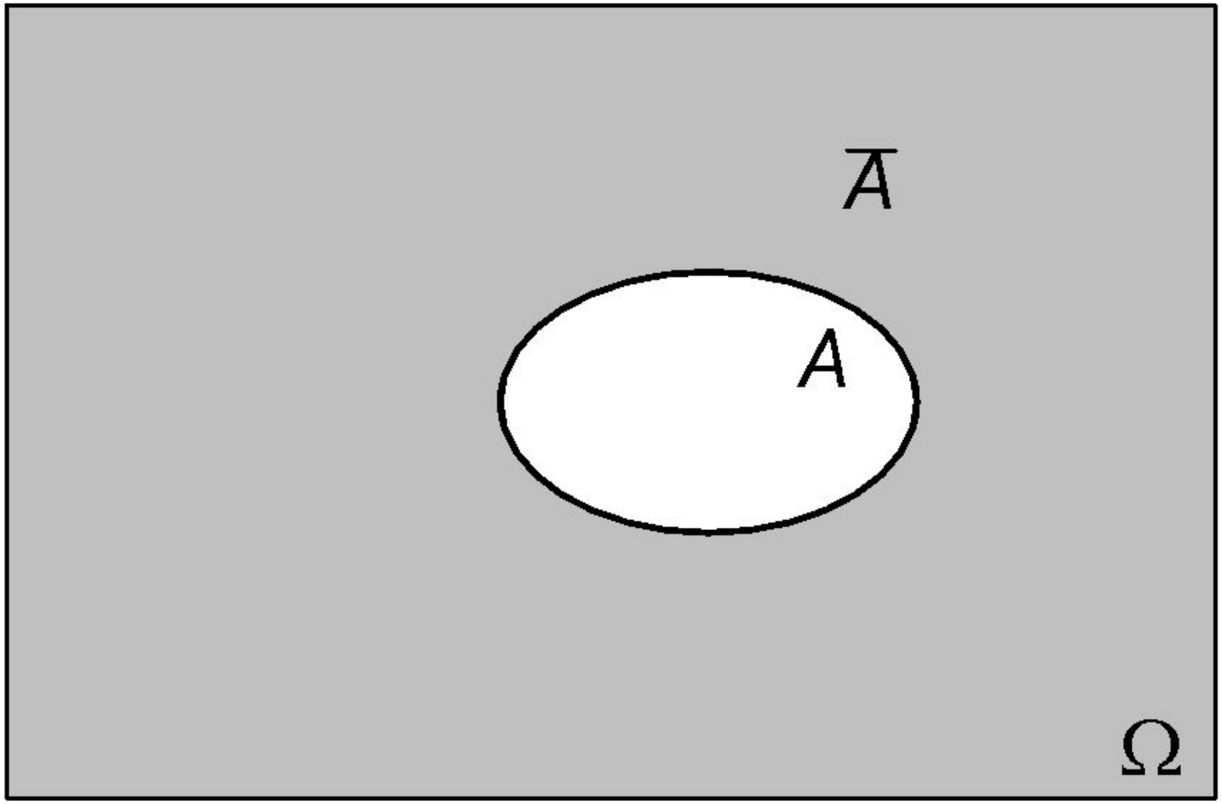
Событие

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$

называется **противоположным** событию A. Оно наступает тогда, когда событие A не наступает, и наоборот, если A наступает, то $\overline{A}$ – не наступает.



Геометрическая интерпретация разности событий



Геометрическая интерпретация противоположного события

5. **Полная группа событий.**

Говорят, события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют **полную группу событий**, если

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий, если

$$1.\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega,$$

$$2.\ A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ для любых } i \neq j,$$

то есть $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Множество событий рассматриваемого опыта, одно из которых в результате опыта обязательно происходит, а любые два из них несовместны, называется **множеством элементарных событий,** а каждое событие из этого множества называется **элементарным событием**

Равновозможными элементарными будем считать такие события, любое из которых не обладает никаким преимуществом появляться чаще других при многократных повторениях испытания

Элементарные события, при которых наступает событие A, называются элементарными событиями, **благоприятствующими** событию A.

Пример 1. Опыт состоит в извлечении наугад из колоды одной карты. Рассмотрим события:

A = появление туза любой масти, B = появление пиковой карты, C = пиковая дама, D = бубновая карта, E = бубновый туз.

Назовите невозможные, совместные, несовместные, элементарные, благоприятствующие события.

Пример 2. Пусть событие A – при бросании кости на верхней грани выпало четное число очков, событие B – при бросании кости на верхней грани выпало не менее 4 очков. Назовите события $(A+B)$, AB, событие $\overline{A}$.

Если события A и B несовместные, то событие AB – невозможное

Аксиоматическое определение случайного события

Пусть при заданном комплексе условий производится некоторый опыт, результатом которого может быть достаточно большое число различных исходов, называемых **элементарными исходами** или **элементарными событиями.**

Пронумеруем все возможные элементарные исходы опыта и k-й из них обозначим ω_k.

Обозначим множество

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

всех элементарных исходов опыта.

Множество Ω называется пространством элементарных исходов или пространством элементарных событий.

Случайным событием A называется некоторое подмножество пространства Ω элементарных событий, но не всякое подмножество. Более точно класс этих подмножеств будет определён ниже.

В частности, $A \subset B$, если $\forall \omega \in A$ можно утверждать, что $\omega \in B$. Равенство случайных событий $A = B$ выполняется тогда и только тогда, когда имеют место соотношения

$$\omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B.$$

Для противоположных событий имеют место так называемые **формулы двойственности**

$$\overline{\bigcup_t A_t} = \bigcap_t \overline{A_t}, \qquad \overline{\bigcap_t A_t} = \bigcup_t \overline{A_t}.$$

Доказательство.

В силу определения противоположного события эти формулы можно записать и так: $\Omega \setminus \bigcup\limits_t A_t = \bigcap\limits_t (\Omega \setminus A_t), \quad \Omega \setminus \bigcap\limits_t A_t = \bigcup\limits_t (\Omega \setminus A_t).$

Для первой формулы имеем:

$$\omega \in \Omega \setminus \bigcup\limits_t A_t \Leftrightarrow \omega \notin \bigcup\limits_t A_t \Leftrightarrow \forall t, \omega \notin A_t \Leftrightarrow \forall t, \omega \in (\Omega \setminus A_t).$$

Аналогично получается и вторая формула.

Предел последовательности случайных событий

Пусть имеется последовательность случайных событий $A_1, A_2, \ldots$

Верхним пределом последовательности событий A_n называется такое случайное событие, которое наступает тогда, когда наступает бесконечное число событий из последовательности A_n. Обозначается как $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$.

В теоретико-множественном смысле это означает

$$\omega \in \lim_{n\to\infty} \sup A_n \Leftrightarrow \exists k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots \to \infty, \forall n, \omega \in A_{k_n}.$$

Нижним пределом последовательности событий A_n называется такое случайное событие, которое наступает тогда, когда наступают все, кроме, конечного числа, события из последовательности A_n. Обозначается как $\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n$.

В теоретико-множественном смысле это означает

$$\omega \in \lim_{n\to\infty} \inf A_n \Leftrightarrow \exists n, \forall k \geq n, \omega \in A_k$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n \subset \lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$, то говорят, что существует предел последовательности случайных событий A_n: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$.

Теорема 1. Имеют место равенства

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

<u>Доказательство</u>. Для $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ согласно определению имеем

$$\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n, \forall k \geq n, \omega \in A \Leftrightarrow \exists n, \omega \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Для $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ согласно определению имеем

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots \to \infty, \forall n, \omega \in A_{k_n}$$

Так как для любого s найдется такое $k_n \geq s$, что $\omega \in A_{k_n}$, то $\omega \in \bigcup\limits_{k=s}^{\infty} A_k$, но это соотношение верно $\forall s$, поэтому $\omega \in \bigcap\limits_{s=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=s}^{\infty} A_k$.
Теорема доказана.

Теорема 2. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{A_n}$.

<u>Доказательство</u>. Так как существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, то выполняется равенство $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, которое в силу теоремы 1 перепишем в виде $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

По формулам двойственности имеем

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} = \liminf_{n\to\infty} \overline{A_n}, \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} = \limsup_{n\to\infty} \overline{A_n}.$$

Так как $\liminf\limits_{n\to\infty} \overline{A_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \overline{A_n}$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{A_n} = \liminf\limits_{n\to\infty} \overline{A_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \overline{A_n}$. Теорема доказана.

Монотонные последовательности

Последовательность случайных событий A_n называется **монотонно возрастающей** (обозначается $A_n \uparrow$), если $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$.

Последовательность случайных событий A_n называется **монотонно убывающей** (обозначается $A_n \downarrow$), если $\forall n, A_{n+1} \subset A_n$.

Теорема 3. Для монотонно возрастающей последовательности случайных событий существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Для монотонно убывающей последовательности случайных событий существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Доказательство. Пусть $A_n \uparrow$, тогда в силу монотонного возрастания последовательности случайных событий A_n, можно записать $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cup \left\{ \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k \right\} = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Но тогда выполняется равенство $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

С другой стороны $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ и поэтому $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, следовательно

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

для монотонно возрастающих последовательностей теорема доказана

Пусть $A_n \downarrow$, тогда силу монотонного убывания последовательности случайных событий A_n, можно записать $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ и поэтому $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

С другой стороны, опять-таки в силу монотонного убывания последовательности случайных событий A_n:
$\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cap \left\{ \bigcap\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k \right\} = \bigcap\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Но тогда выполняется равенство $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, следовательно,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Теорема доказана.

Следствие. Для нижнего и верхнего пределов последовательности событий имеют место равенства $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\}$, $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\}$.

<u>Доказательство</u>. Так как последовательности $B_n = \left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\}\uparrow$ и $C_n = \left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\}\downarrow$ монотонные, то

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right\} = \lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \varliminf_{n\to\infty} A_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\} = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

Следствие доказано.

Пространство случайных событий.

Класс F подмножеств пространства элементарных событий Ω называется σ-алгеброй, если выполнены следующие условия.

1. $\Omega \in F$, $\varnothing \in F$.

2. Если $A \in F$ и $B \in F$, то $A \setminus B \in F$.

3. Если $A \in F$, то $\overline{A} \in F$.

4. Если $A_i \in F$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F$, а также $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

Подмножества класса F называются **измеримыми.**

Измеримые подмножества $A \in F$ пространства элементарных событий Ω называются **случайными событиями,** а пару $\{\Omega, F\}$ будем называть **пространством случайных событий.**

Классическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности основано на первичном, не формализуемом, интуитивно очевидном понятии **равновозможности элементарных событий**, которое отражает, в определённом смысле, симметрию в появлении элементарных событий, именно эта симметрия и обеспечивает их равновозможность.

Пусть пространство элементарных событий – Ω конечно, то есть

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

и все элементарные события равновозможны.

Пусть некоторое случайное событие $A \subset \Omega$ состоит из m элементарных событий, то есть

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\}.$$

Вероятностью случайного события A называется величина

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

то есть отношение числа исходов опыта, благоприятствующих наступлению события A к общему числу всех равновозможных исходов опыта.

Задача 1. Одновременно бросают два кубика. Какова вероятность, что на верхних гранях выпадет одинаковое число очков?

Задача 2. Одновременно бросают два кубика. Какое событие вероятней: на верхних гранях выпадет 8 очков или 9 очков?

Геометрическое определение вероятности.

Пусть пространство элементарных событий Ω представляет собой некоторую ограниченную замкнутую область точек на плоскости.

Опыт заключается в том, что из этой области наудачу выбирается точка. Выбор любой точки из пространства элементарных событий равновозможен.

Пусть случайное событие A заключается в том, что выбранная точка принадлежит области $A \subset \Omega$.

Вероятностью случайного события A называется величина

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ – площади этих областей.

Если область Ω трёхмерная, то вместо площади следует брать объёмы этих областей, а в одномерном случае – рассматривают длины соответствующих отрезков. В общем случае пишут

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)},$$

где $\mathrm{mes}(A)$ и $\mathrm{mes}(\Omega)$ – меры (длины, площади, объёмы и так далее) этих областей.

Очевидно, что эта вероятность пропорциональна длине (площади, объему) области Ω и не зависит от ее формы и расположения.

Задача. На шахматную доску наудачу брошена монета, диаметр которой вдвое меньше стороны каждого из квадратов шахматной доски. Какова вероятность того, что монета окажется полностью на черном поле?

Статистическое определение вероятности.

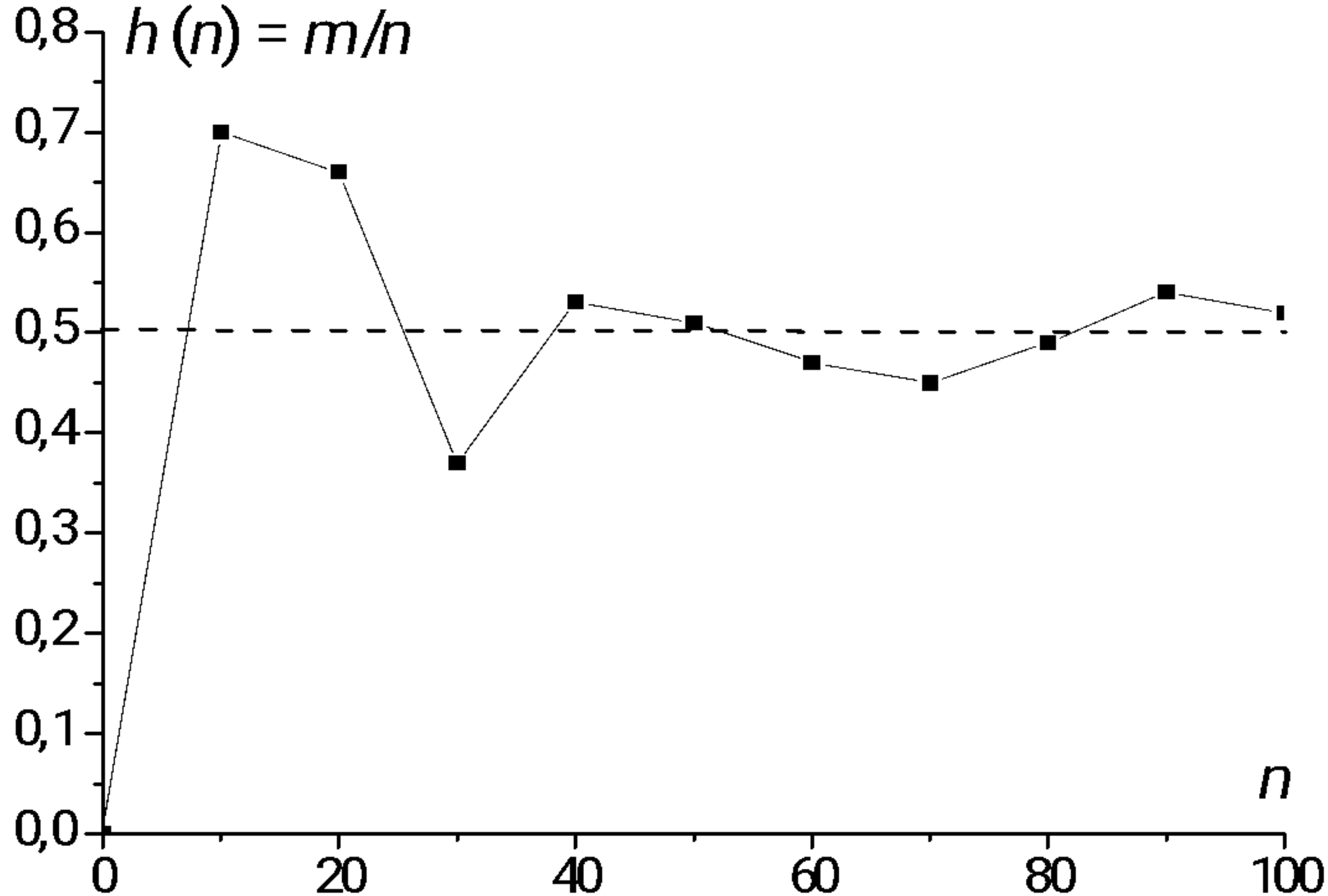
Статистическое определение вероятности основано на экспериментально установленном факте – так называемой **устойчивости частот.**

Пусть в результате опыта может наступить или не наступить некоторое случайное событие A.

Пусть этот опыт повторён n раз, в которых событие A наступило m раз, а в $n-m$ повторениях не наступало. Тогда величина

$$h(n)=\frac{m}{n}$$

называется частотой наступления события A в серии из n опытов.



h (n) = m/n
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
n
0
20
40
60
80
100

Экспериментально подтвержден тот факт, что с увеличением числа n опытов в серии частота «сходится» к некоторой величине, однозначной для рассматриваемого случайного события A. Эту величину называют **статистической вероятностью** случайного события A.

Замечено, что чем больше испытаний проведено, тем меньше отклонение частоты от вероятности.

Более того, в тех случаях, когда применимо классическое определение вероятности, это колебание частоты происходит около вероятности. Поэтому за численное значение вероятности при большом числе однородных независимых испытаний принимают частоту события A.

На статистическом определении вероятности основана, концепция Рихарда Мизеса. Согласно Мизесу, так как при увеличении числа опытов частота все меньше отличается от вероятности, то вероятность можно определить следующим образом: вероятность

$p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n}$ (n – число опытов, m – число появлений события).

Парадокс Бертрана

Бертраном была поставлена следующая задача. В круге наудачу выбирается хорда. Какова вероятность того, что ее длина больше длины стороны правильного, вписанного в этот круг, треугольника?

Учеными того времени были предложены три варианта значений этой вероятности: $P(A)=1/3, P(A)=1/4, P(A)=1/2$. Одного ответа так получено и не было, поэтому это и называется – «парадокс Бертрана».