Определение показательной функции

- Показательной функцией называется функция $y = a^x$, где a – заданное число, $a>0, a \neq 1$.

Примеры:

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$y = 5^x$$

$$y = 2^x$$

$$y = (0,4)^x$$

$$y = \left(\sqrt{3}\right)^x$$

График показательной функции $y = a^x$, $a>1$

Построим график показательной функции

$$y = 2^x,\ a = 2.$$

В этой же системе координат построим графики функций

$$y = 4^x,\ a = 4$$

$$y = (1,5)^x,\ a = 1,5.$$

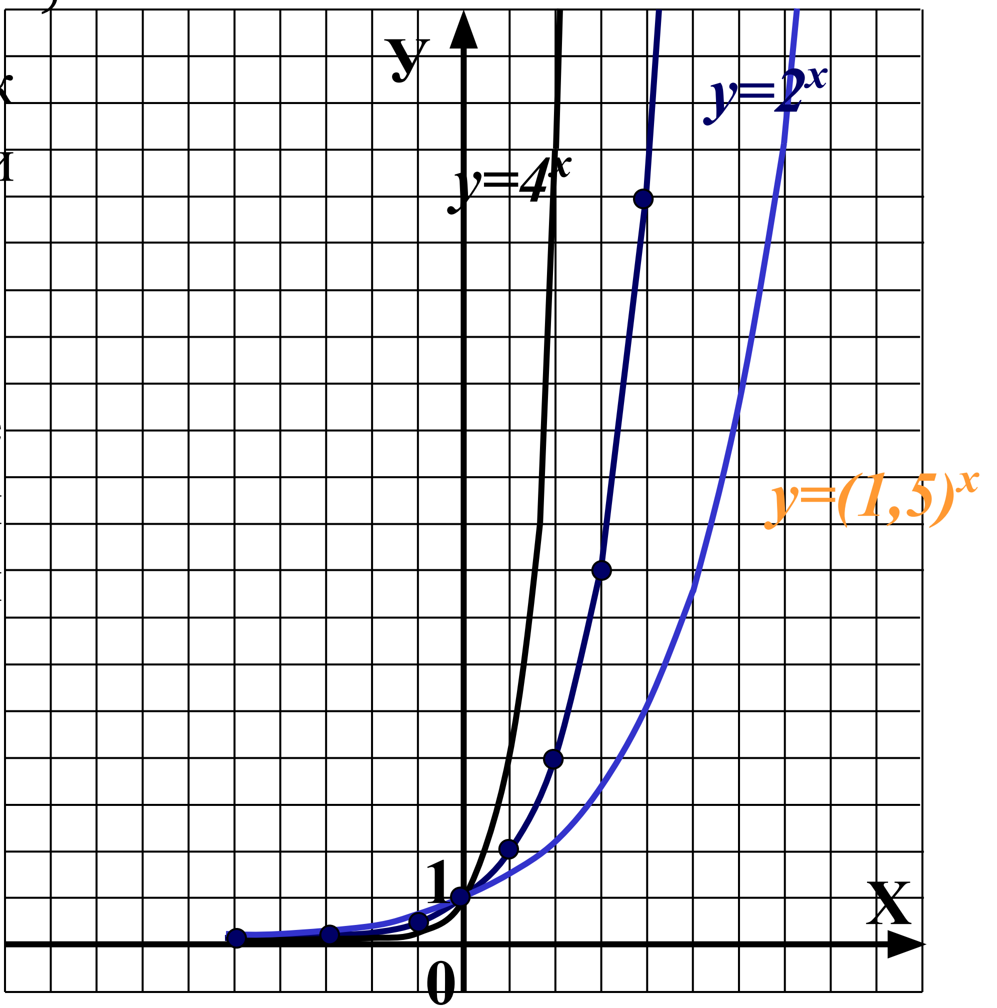


График показательной функции $y = a^x$, $0<a<1$

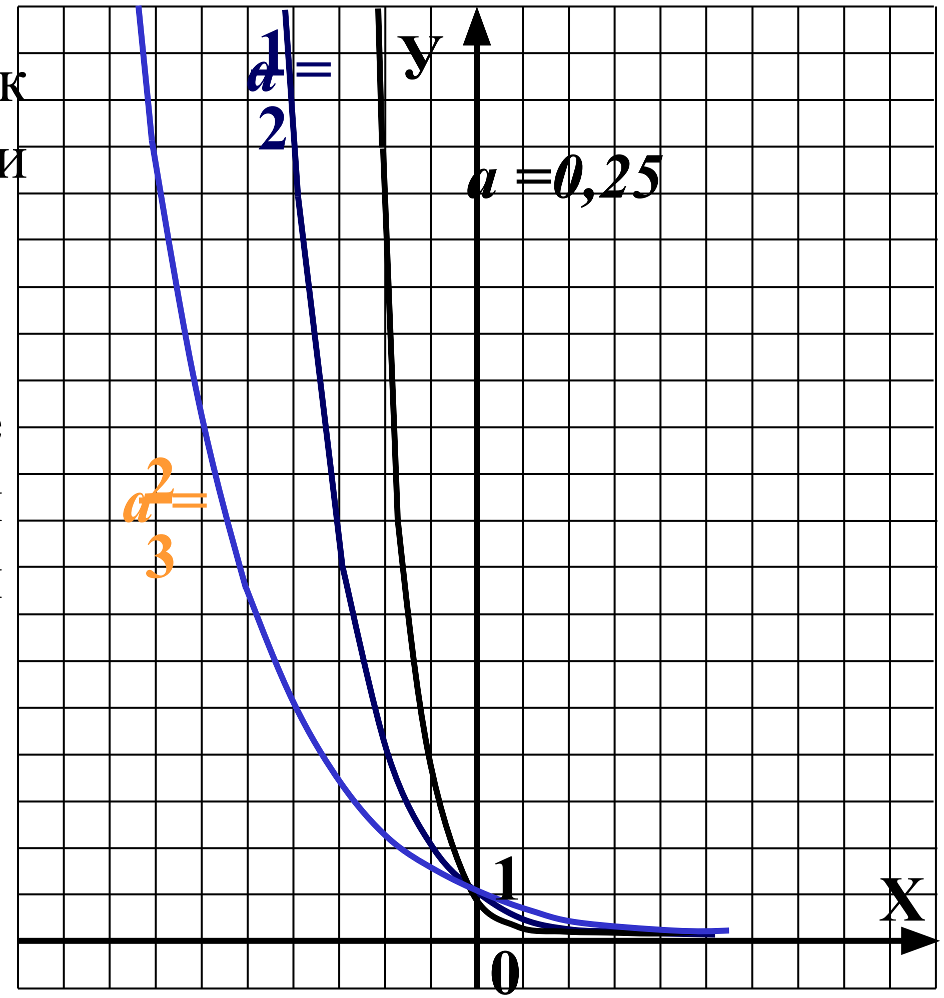
Построим график показательной функции

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, \ a=\frac{1}{2}.$$

В этой же системе координат построим графики функций

$$y=(0,25)^x, \ a=0,25$$

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x, \ a=\frac{2}{3}.$$



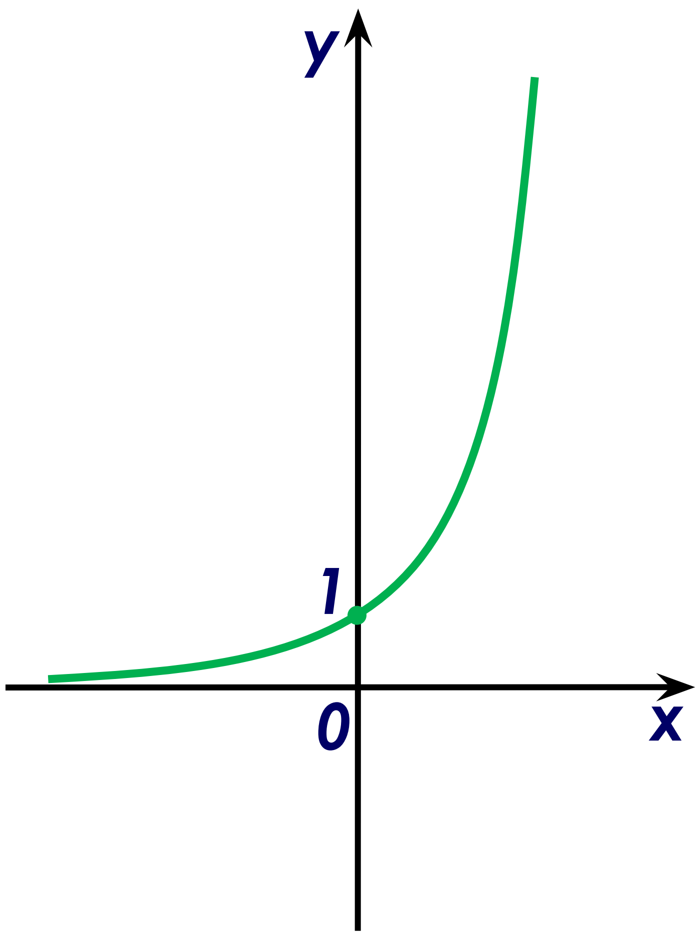
Свойства показательной функции $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$,
   $E(y) = (0; +\infty)$.
2. а) Нулей не имеет;
   б) точка пересечения с осью ординат $(0; 1)$,
   т. к. $y(0) = a^0 = 1$.
3. а) При $a > 1$ функция возрастает на R;
   б) при $0 < a < 1$ функция убывает на R.
4. Ни четная функция, ни нечетная.
5. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна. Выпукла вниз.
8. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
   $a^n : a^m = a^{n-m}$
   $(a^n)^m = a^{nm}$
   $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
   $(a : b)^n = a^n : b^n$

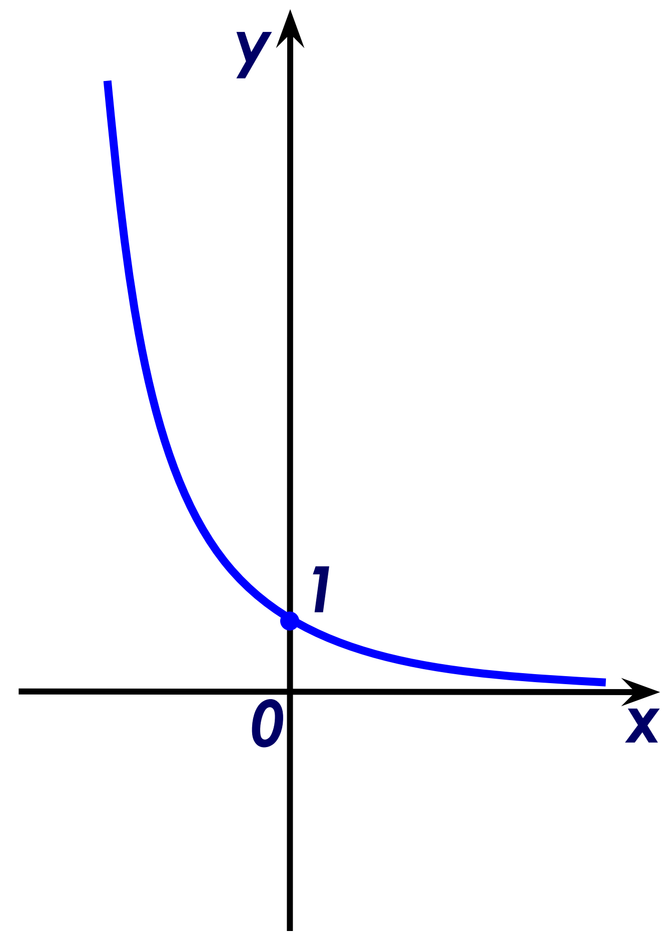
График показательной функции

$y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0$

$y = a^x,\ a > 1$



$y = a^x,\ 0 < a < 1$



Свойства сравнения выражений вида a^x, $a \neq 1$, $a > 0$

1. Если $0 < a < 1$ или $a > 1$, то равенство $a^r = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $r = s$.

2. Если $0 < a < 1$, то
   а) неравенство $a^x > 1$ справедливо $\Leftrightarrow x < 0$;
   б) неравенство $a^x < 1$ справедливо $\Leftrightarrow x > 0$.

3. Если $a > 1$, то
   а) неравенство $a^x > 1$ справедливо $\Leftrightarrow x > 0$;
   б) неравенство $a^x < 1$ справедливо $\Leftrightarrow x < 0$.

4. Если $a > 1$, то
   а) неравенство $a^{f(x)} > a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) > h(x)$;
   б) неравенство $a^{f(x)} < a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) < h(x)$.

5. Если $0 < a < 1$, то
   а) неравенство $a^{f(x)} > a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) < h(x)$;
   б) неравенство $a^{f(x)} < a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) > h(x)$.

Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют показательными уравнениями

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{h(x)}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f(x) = h(x)}$$

Методы решения показательных уравнений:

1. *Функционально-графический метод.*
2. *Метод уравнивания показателей.*
3. *Метод введения новой переменной.*

Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4}=64$$

$$2^{2x-4}=2^6$$

$$2x-4=6$$

$$x=5$$

$Ответ: 5$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x-3,5=0,5$$

$$x=2$$

$Ответ: 2$

Пример 3

$$5^{x^2-3x}=5^{3x-8}$$

$$x^2-3x=3x-8$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$

$Ответ: 2;\ 4$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 4

$$\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-2}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0{,}5} : 5^{0{,}5} = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x-2}$$

$$5^{0{,}5-x-0{,}5} = 5 \cdot \left(5^{-2}\right)^{x-2}$$

$$5^{-x} = 5^{1-2x+4}$$

$$5^{-x} = 5^{5-2x}$$

$$-x = 5 - 2x$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

Пример 5

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$\left(2^2\right)^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$\left(2^x\right)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Пусть $2^x = t$, *где* $t > 0$ *тогда*

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$$

$t_1 = -6$ *не уд-ет условию* $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

Ответ : 2

Показательные уравнения. Примеры

Пример 6

$$2^{2\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)}-\frac{5}{2}\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}=6$$

Пусть $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=t,\ \ t>0$

$$t^2-\frac{5}{2}t-6=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-\dfrac{3}{2}, \\ t_2=4 \end{array}\right.$$

$t_1=-\dfrac{3}{2}$ не уд – ет условию $t>0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=4$$

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=2^2$$

ОДЗ :

$$x^2-2\geq 0$$

$$x^2\geq 2$$

$$|x|\geq\sqrt{2}$$

$$x\in(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2}:+\infty)$$

$$x+\sqrt{x^2-2}=2$$

$$\sqrt{x^2-2}=2-x$$

$$x^2-2=4-4x+x^2$$

$$4x=6$$

$$x=1{,}5$$

Ответ : 1,5.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 7

$$\sqrt[x]{64}-\sqrt[x]{2^{3x+3}}+12=0$$

$$2^{\frac{6}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0$$

$$2^{\frac{6}{x}}-2^{3+\frac{3}{x}}+12=0$$

$$2^{\frac{6}{x}}-8\cdot 2^{\frac{3}{x}}+12=0$$

Пусть $2^{\frac{3}{x}}=t,\ \ t>0$

$$t^2-8t+12=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=2, \\ t_2=6; \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$2^{\frac{3}{x}}=2$ *или* $2^{\frac{3}{x}}=6$

$\frac{3}{x}=1$ $\qquad$ $\frac{3}{x}=\log_2 6$

$x=3$ $\qquad$ $x=\frac{3}{\log_2 6}$

Ответ : $3;\ \frac{3}{\log_2 6}.$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 8

$$9 \cdot 27^{x-\frac{2}{3}} - \frac{2}{81} \cdot 9^{x+2} = 9$$

$$9 \cdot \frac{27^x}{27^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{81} \cdot 9^x \cdot 9^2 = 9$$

$$9 \cdot \frac{27^x}{9} - 2 \cdot 9^x = 9$$

$$27^x - 2 \cdot 9^x - 9 = 0$$

Пусть $3^x = t$, *где* $t > 0$, *тогда*

$$t^3 - 2t^2 - 9 = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + t^2 - 9 = 0$$

$$t^2(t-3) + (t-3)(t+3) = 0$$

$$(t-3)(t^2 + t + 3) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t^2 + t + 3 = 0 - \text{нет корней} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

Ответ : 1.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 9 (однородное уравнение)

$$5^{2x+1}-13\cdot 15^{x}+54\cdot 9^{x-1}=0$$

$$5\cdot 5^{2x}-13\cdot 15^{x}+54\cdot\frac{9^{x}}{9}=0$$

$$5\cdot 5^{2x}-13\cdot 15^{x}+6\cdot 9^{x}=0$$

Разделим на 9^x, *тогда*

$$\frac{5\cdot 5^{2x}}{9^{x}}-\frac{13\cdot 15^{x}}{9^{x}}+\frac{6\cdot 9^{x}}{9^{x}}=0$$

$$5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}+6=0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=t$, *где* $t>0$, *тогда*

$$5t^{2}-13t+6=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=\frac{3}{5}, \\ t_2=2 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=\frac{3}{5}$ *или* $\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=2$

$x=-1$ $\qquad$ $x=\log_{\frac{5}{3}}2$

Ответ: $-1;\ \log_{\frac{5}{3}}2.$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 10 (составление отношения)

$$4^x - 3^{x-1} = 4^{x-1} + 3^x$$

$$4^x - 4^{x-1} = 3^x + 3^{x-1}$$

$$4^{x-1}(4-1) = 3^{x-1}(3+1)$$

$$4^{x-1} \cdot 3 = 3^{x-1} \cdot 4 \quad \Big| : \left(3^{x-1} \cdot 3\right), \ т.к. \ 3^{x-1} \cdot 3 > 0$$

$$\frac{4^{x-1} \cdot 3}{3^{x-1} \cdot 3} = \frac{3^{x-1} \cdot 4}{3^{x-1} \cdot 3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} = \frac{4}{3}$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

Ответ: 2.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 11 (скрытая замена переменной)

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$$

Заметим, что $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=\sqrt{4-3}=1$

Пусть $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t$, где $t>0$, тогда $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}=\dfrac{1}{t}$

уравнение примет вид:

$$t+\frac{1}{t}=4,\qquad \left|\times t\right.$$

$$t^2-4t+1=0,\ \ D=16-4=12$$

$$t_1=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

$$t_2=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 11 (скрытая замена переменной)

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} = 2-\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$$

$$\frac{x}{2} = -1$$

$$x = -2$$

или

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} = 2+\sqrt{3}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = 1$$

$$x = 2$$

Ответ : $-2;\ 2.$

Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$a > 1$ | $0 < a < 1$

$f(x) > g(x)$ | $f(x) < g(x)$

или

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^{6}$$

$$т.к.\ функция\ \ y = 2^{t}\ \ монотонно$$

$$возрастает\ на\ R,\ то$$

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

$$Ответ:\ \ (5; +\infty)$$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$т.к.\ функция\ \ y = \left(\frac{1}{3}\right)^{t}$$

$$монотонно\ \ убывает\ на\ R,\ то$$

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

$$Ответ:\ \ (2; +\infty)$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 3

$$0{,}5^{x^2-3x} \le 0{,}5^{3x-8}$$

$т.к.\ функция\ \ y = (0{,}5)^t$

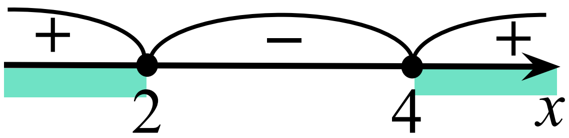
$монотонно\ \ убывает\ \ на\ \ R,\ то$

$$x^2 - 3x \ge 3x - 8$$

$$x^2 - 6x + 8 \ge 0$$

$$н.ф.:\ x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_2 &= 4 \end{aligned}\right.$$



$$x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

$Ответ\ :\ (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad \left| : \left(3^{3x}\right), \right. \ т.к.\ 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} > 2$$

$$Пусть \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t, \ где \ t > 0$$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t-1)\left(t^2 + t + 2\right)$$

$$т.к.\ t^2 + t + 2 > 0 \ для\ любых\ t,\ то\ t - 1 > 0$$

$$t > 1$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

т.к. $a = \frac{2}{3} < 1$, то ф-ция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ убывает на R

$$x < 0$$

Ответ : $(-\infty;\ 0)$.