Основы комбинаторики

Список литературы

- Е. С. Вентцель, Л.А. Овчаров, Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М: Высшая школа, 2000г.
- Е. С. Вентцель, Л.А. Овчаров, Задачи и упражнения по теории вероятностей. М: Высшая школа, 2000г.
- Гмурман, В. Е. *Теория вероятностей и математическая статистика*: Учеб. пособие — 12-е изд., перераб.- М.: Высшее образование, 2006.
- Г.В. Горелова, И.А. Кацко, Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением EXCEL.- Ростов-на-Дону.: Феникс, 2001.
- Ю. Е. Шишмарев, Дискретная математика. Конспект лекций, Ч.2. ВГУЭС, 2002г.

Комбинаторика. Принципы сложения и умножения

Комбинаторика

- *Комбинаторика* – раздел математики, посвященный подсчету количеств разных комбинаций элементов некоторого, обычно конечного, множества
- *Комбинаторика* возникла в XVI веке. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр. Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские ученые Паскаль и Ферма. Дальнейшие развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера.

Принципы комбинаторики Принцип сложения

- *Основные принципы комбинаторики:*
- Принцип сложения.
- Принцип умножения.

Принцип сложения

Задача 1: В классе 7 девочек и 8 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать 1 человека для работы у доски?

Решение: Для работы у доски мы можем выбрать девочку 7 способами **или** мальчика 8 способами.

Общее число способов равно 7+8=15.

Задача 2: В классе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек – «5» по истории, 4 человека имеют «5» и по математике и по истории. Сколько человек имеют пятерку по математике или по истории?

Решение: Так как 4 человека входят и в семерку отличников по математике и в девятку отличников по истории, то сложив «математиков» и «историков», мы дважды учтем этих четверых, поэтому вычтя их один раз из суммы, получим результат 7+9-4=12.

Итак, 12 человек имеют пятерку по математике или по истории.

Принцип сложения

- Принцип сложения 1: Если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами и эти способы различны, то объект «***a или b***» можно получить ***n+m***.

- Принцип сложения 2: Если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами, то объект «***a или b***» можно получить ***n+m-k*** способами, где ***k*** – это количество повторяющихся способов.

Принцип умножения

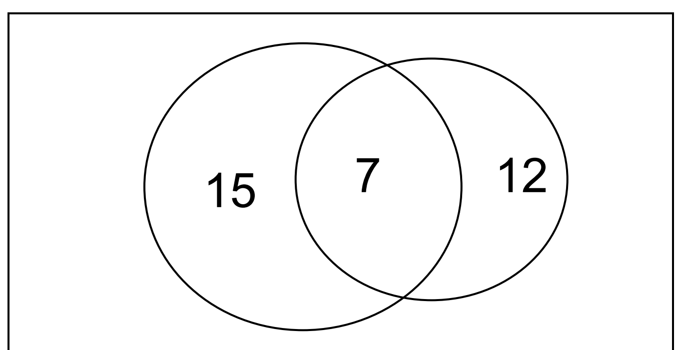
- **<u>Задача</u>**: На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее?
- **Решение:** Для каждого варианта подъема на гору существует 5 вариантов спуска с горы. Значит всего способов подняться на гору и спуститься с нее $5 \cdot 5 = 25$.
- <u>Принцип умножения</u>: если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** *можно получить* ***m*** способами, то объект ***«a и b»*** можно получить ***m·n*** способами.

Задачи

- 1) Из 10 коробок конфет, 8 плиток шоколада и 12 пачек печенья выбирают по одному предмету для новогоднего подарка. Сколькими способами это можно сделать?
- **Решение.** Коробку конфет можно выбрать 10 способами, шоколад – 8, печенье – 12 способами. Всего по принципу умножения получаем $10 \cdot 8 \cdot 12 = 960$ способов.

Задачи

- 2) В группе 24 человека. Из них 15 человек изучают английский язык, 12 – немецкий язык, 7 – оба языка. сколько человек не изучают ни одного языка?
- Решение. По принципу сложения 2 получим количество людей, изучающих английский или немецкий 15+12-7=20. Из общего числа учеников класса вычтем полученное количество людей. 24-20=4. 4 человека не изучает ни одного языка.



Перестановки

Перестановки

- **Определение 1**

Перестановкой из n элементов называется всякий способ нумерации этих элементов

Пример 1

Дано множество $A=\{a;b;c\}$. Составить все перестановки этого множества.

Решение. $(a;b;c);(a;c;b);(b;a;c);(b;c;a);(c;a;b);(c;b;a)$

Перестановки

- Число всех перестановок

$$P_n = n!$$

- **Пример**

В команде 6 человек. Сколькими способами они могут построиться для приветствия?

Решение

Число способов построения равно числу перестановок 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Перестановки с повторениями

Теорема 2

- Число перестановок n – элементов, в котором есть одинаковые элементы, а именно n_i элементов i –того типа ($i = 1, 2, ..., k$) вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1! n_2! ... n_k!},$$

где
$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

Доказательство. Так как перестановки между одинаковыми элементами не изменяют вид перестановки в целом, количество перестановок всех элементов множества нужно разделить на число перестановок одинаковых элементов.

Пример

- **<u>Задача</u>:** Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «экзамен», а в слове «математика»?
- **Решение:** В слове «экзамен» все буквы различны, поэтому используем формулу для числа перестановок без повторений

$$P_7 = 7! = 5040.$$

- В слове «математика» 3 буквы «а», 2 буквы «м», 2 буквы «т», поэтому число перестановок всех букв разделим на число перестановок повторяющихся букв:

$$P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200$$

Размещения

Размещения

- **Определение 1**

Размещением из n элементов по k называется всякая перестановка из k попарно различных элементов, выбранных каким-либо способом из данных n.

Пример

Дано множество $A=\{a;b;c\}$. Составим все 2-размещения этого множества.

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b)$$

Число размещений

- **Теорема 1** Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример

- Абонент забыл последние 3 цифры номера телефона. Какое максимальное число номеров ему нужно перебрать, если он вспомнил, что эти последние цифры разные?
- **Решение.**

Задача сводится к поиску различных перестановок 3 элементов из 10 (так как всего цифр 10). Применим формулу для числа перестановок.

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720$$

Размещения с повторениями

- **Определение 2**

Размещением с повторением из n элементов по k называется всякая перестановка из k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов возможно с повторениями.

- **Пример**

Дано множество $A = \{a; b; c\}$

Составим 2- размещения с повторениями:

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b);(a;a);(b;b);(c;c)$$

Число размещений с повторениями

Теорема 2. Число k- размещений с повторениями из n элементов вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Пример

- Сколько существует номеров машин?

- Решение.

$$\overline{A}_{10}^{3} \cdot \overline{A}_{12}^{3} = 12^{3} \cdot 10^{3}$$

Решение задач

Задачи

- 1)Сколькими способами можно составить список из 8 учеников, если нет полного совпадения ФИО?
- **Решение**

Задача сводится к подсчету числа перестановок ФИО.

$$P_8 = 8! = 40320$$

Задачи

- 2)Сколькими способами можно составить список 8 учеников, так, чтобы два указанных ученика располагались рядом?
- **Решение**

Можно считать двоих указанных учеников за один объект и считать число перестановок уже 7 объектов, т.е.

$$P_7 = 7! = 5040$$

Так как этих двоих можно переставлять местами друг с другом, необходимо умножить результат на 2!

$$P_7 \cdot 2! = 7! \cdot 2! = 5040 \cdot 2 = 10080$$

Задачи

- 3) Сколькими способами можно разделить 11 спортсменов на 3 группы по 4, 5 и 2 человека соответственно?
- **Решение.** Сделаем карточки: четыре карточки с номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3. Будем раздавать эти карточки с номерами групп спортсменам, и каждый способ раздачи будет соответствовать разбиению спортсменов на группы. Таким образом нам необходимо посчитать число перестановок 11 карточек, среди которых четыре карточки с одинаковым номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3.

$$P(4,5,2) = \frac{11!}{4!5!2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 6930$$

Задачи

- 4) Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

Задачи

- 5)Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры различны?
- **Решение.** В разряде единиц тысяч не может быть нуля, т.е возможны 9 вариантов цифры.

  В остальных трех разрядах не может быть цифры, стоящей в разряде единиц тысяч (так как все цифры должны быть различны), поэтому число вариантов вычислим по формуле размещений без повторений из 9 по 3

$$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

По правилу умножения получим $$9 \cdot A_9^3 = 4536$$

Задачи

- 6)Сколько существует двоичных чисел, длина которых не превосходит 10?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений с повторениями из двух элементов по 10

$$\overline{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$$

Задачи

- 7)В лифт 9 этажного дома зашли 7 человек. Сколькими способами они могут распределиться по этажам дома?
- **Решение.** Очевидно, что на первом этаже никому не надо выходить. Каждый из 7 человек может выбрать любой из 8 этажей, поэтому по правилу умножения получим

$$8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8 = 8^7 = 2097152$$

- Можно так же применить формулу для числа размещений с повторениями из 8 (этажей) по 7(на каждого человека по одному этажу)

$$\overline{A}_8^7 = 8^7$$

Задачи

- 8)Сколько чисел, меньше 10000 можно написать с помощью цифр 2,7,0?
- **Решение.** Так как среди цифр есть 0, то, например запись 0227 соответствует числу 227, запись 0072 соответствует числу 72, а запись 0007 соответствует числу 7. Таким образом, задачу можно решить, используя формулу числа размещений с повторениями

$$\overline{A}_3^4 = 3^4 = 81$$

Сочетания

Сочетания

- **Определение 1**
- Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность попарно различных k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.
- Другими словами k-сочетание – это k-элементное подмножество n элементного множества.
- **Пример**. Дано множество $A = \{a;b;c\}$.

Составим 2- сочетания:

$$\{a;b\};\{a;c\};\{b;c\}$$

Сочетания

- **Теорема 1**
- Число k- сочетаний n-элементного множества вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Доказательство.** Из каждого k-сочетания, переставляя его элементы всевозможными способами, получим k! размещений. Значит,

$$k! \cdot C_n^k = A_n^k$$

- Отсюда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример

- Сколькими способами можно выбрать 3 плитки шоколада из имеющихся 5 плиток?
- **Решение.** Задача сводится к вычислению числа сочетаний из 5 по 3

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Свойства сочетаний

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$

Доказательство:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

Доказательство:

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n$$

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n.$$

Свойства сочетаний

3) $C_n^k = C_n^{n-k}$

Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\Rightarrow C_n^k = C_n^{n-k}$$

4) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$

Доказательство:

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Следствия из бинома Ньютона

1)Равенство $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ получается из бинома Ньютона при

$a = b = 1.$

2) Равенство $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$ получается из бинома Ньютона при

$a = 1, b = -1.$

Сочетания с повторениями

Сочетание с повторениями

- **Определение 1**
- Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.

- **Пример:** Дано множество A= $\{a;b;c\}$

Составим 2- сочетания с повторениями:

$$[a;b];[b;c];[a;c];[a;a];[b;b];[c;c]$$

Число сочетаний с повторениями

- **Теорема1.** Число k-сочетание с повторениями n – элементного множества вычисляется по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Пример

- В магазине продаются пирожные 4 сортов. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
- **Решение.** Используем формулу числа сочетаний с повторениями, так как покупка будет содержать пирожные повторяющихся сортов.

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 120.$$

Сводная таблица

	Порядок важен	Порядок не важен
С повторениями	$\overline{A}_n^k = n^k$ $\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Без повторений	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ $A_n^n = P_n = n!$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$