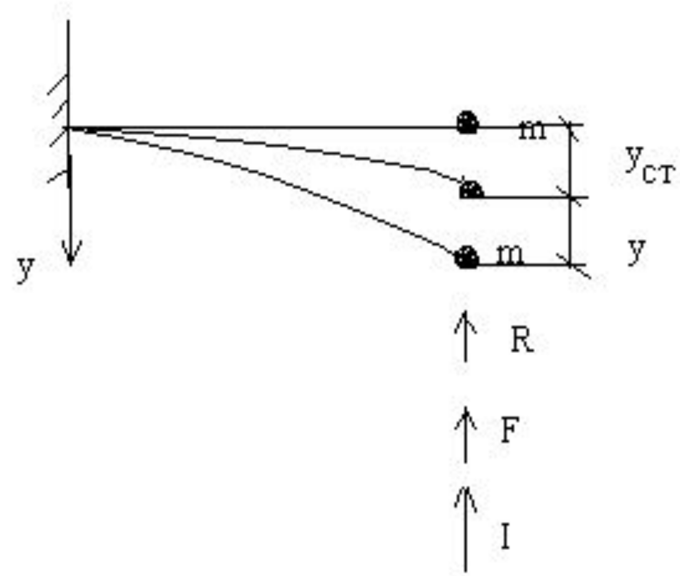
# *Лекция 3-4.*
# *Свободные и вынужденные колебания системы с одной степенью свободы*

## Содержание

1. **Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом *сил* сопротивления.**
2. **Свободные колебания системы с одной степенью свободы без учета *сил* сопротивления.**
3. **Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с учетом *сил* сопротивления.**

# Свободные колебания системы с одной степенью свободы




R=- ry –упругие силы

$$y=\delta_{11}.r=1, \quad r=1/\delta_{11}$$

$$F=-kV$$

F - сила сопротивления

k - коэффициент пропорциональности,
V – скорость, равная dy/dt.

Уравнение динамического равновесия

$$\sum Y=0, \qquad -R-F-I=0,$$

$$y'' + \frac{k}{m}y' + \frac{r}{m}y = 0$$

Сила инерции I

$$I=-m\frac{dV}{dt}=-m\frac{d^2y}{dt^2}=-my''$$

# Корни характеристического уравнения и решение дифференциального уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{r}{m}}, \qquad x_1 = -\frac{k}{2m} \pm \omega i,$$

$$y = C_1 e^{x_1 t} + C_2 e^{x_2 t},$$

$$y = a_o e^{\frac{-kt}{2m}} Sin(\omega t + \varphi_o),$$

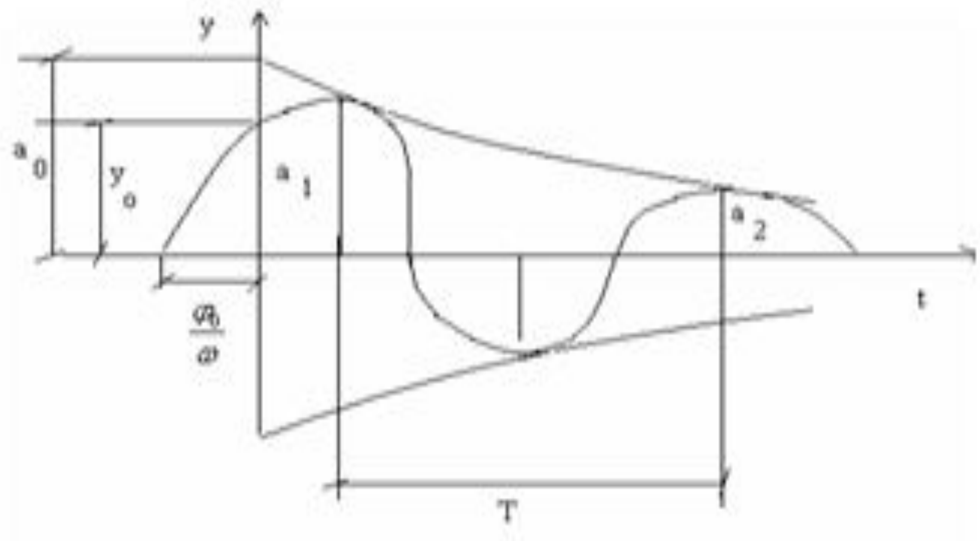
$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$$

где e=2,72 – основа натурального логарифма,
ω – частота свободных колебаний, т.е.число циклов колебаний в 2π сек.,
$a_o$, $\varphi_o$ - соответственно амплитуда свободных колебаний и начальная фаза. Обозначим начальное смещение и начальную скорость через $y_o$ и $V_o$, тогда , используя решение дифференциального уравнения, можно записать:

$$t = 0 \qquad y_o = a_o Sin \ \varphi_o,$$

$$t = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = V_0,$$

# График зависимости решения y=y(t)




$$V_o = -\frac{k}{2m} y_o + a_o \omega \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{a_o^2}},$$

$$a_o = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{V_o + \frac{y_o k}{2m}}{\omega}\right)^2},$$

$$\varphi_o = arcSin \frac{y_o}{a_o}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

# свободные колебания системы без учета сил сопротивления

$$y'' + \frac{r}{m} y = 0, \qquad \omega^2 = \frac{r}{m}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{r}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11} Q}} = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}}$$

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

$$y = C_1 Sin\,\omega t + C_2 Cos\,\omega t = a_o Sin(\omega t + \varphi_o)$$

$$t = 0 \qquad y_o = a_o Sin\ \varphi_o,$$

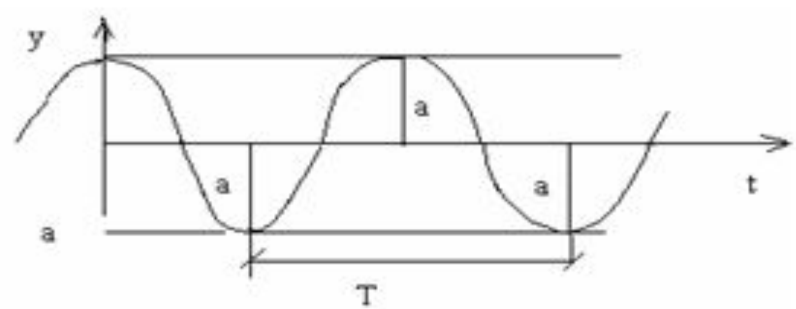
$$t = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = V_0,$$

$$V_o = a_o \omega \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{a_o^2}},$$

$$a_o = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{V_o}{\omega}\right)^2},$$

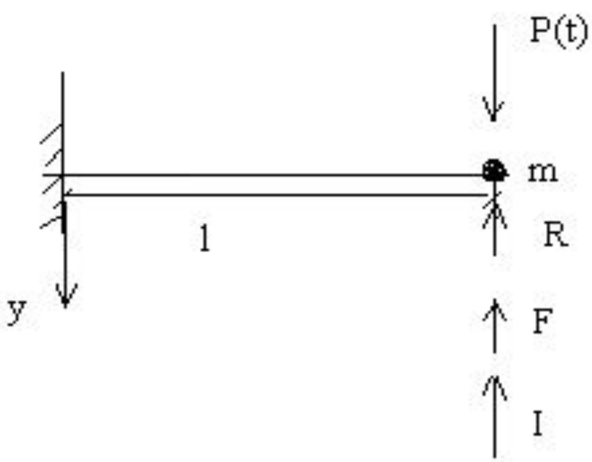
$$\varphi_o = arcSin\ \frac{y_o}{a_o}$$

Q – вес массы, т.е. Q=mg, g – ускорение свободно падающего тела; $y_{ст} = Q\delta_{11}$ - статическое перемещение от веса массы, $\delta_{11}$ – перемещение сечения, где находится масса от единичной силы.



## Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

**Вынужденными называются колебания механической системы, на массу которой кроме восстанавливающей силы, силы сопротивления и силы инерции действует еще возмущающая сила, изменяющаяся во времени.**




P(t)=Psin θt,

**Уравнение динамического равновесия**

$$\sum Y = 0, \qquad R + F + I = P(t),$$

$$y^{//} + \frac{k}{m} y^{/} + \frac{r}{m} y = \frac{P}{m} Sin\theta t,$$

$$y = y_o + y_ч,$$

$$y = a_o e^{\frac{-kt}{2m}} Sin(\omega t + \varphi_o) + \mu y_{cm} Sin(\theta t - \varepsilon)$$

# Формулы для сдвига фазы и динамического коэффициента

**ε – сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к колебаниям возмущающей силы, характеризует величину опережения**

$$\varepsilon = arctg\frac{\frac{k}{m}\theta}{\omega_2 - \theta^2}$$

**μ – динамический коэффициент гармонической нагрузки, показывает во сколько раз ее динамическое действие превышает статическое действие ее амплитуды.**

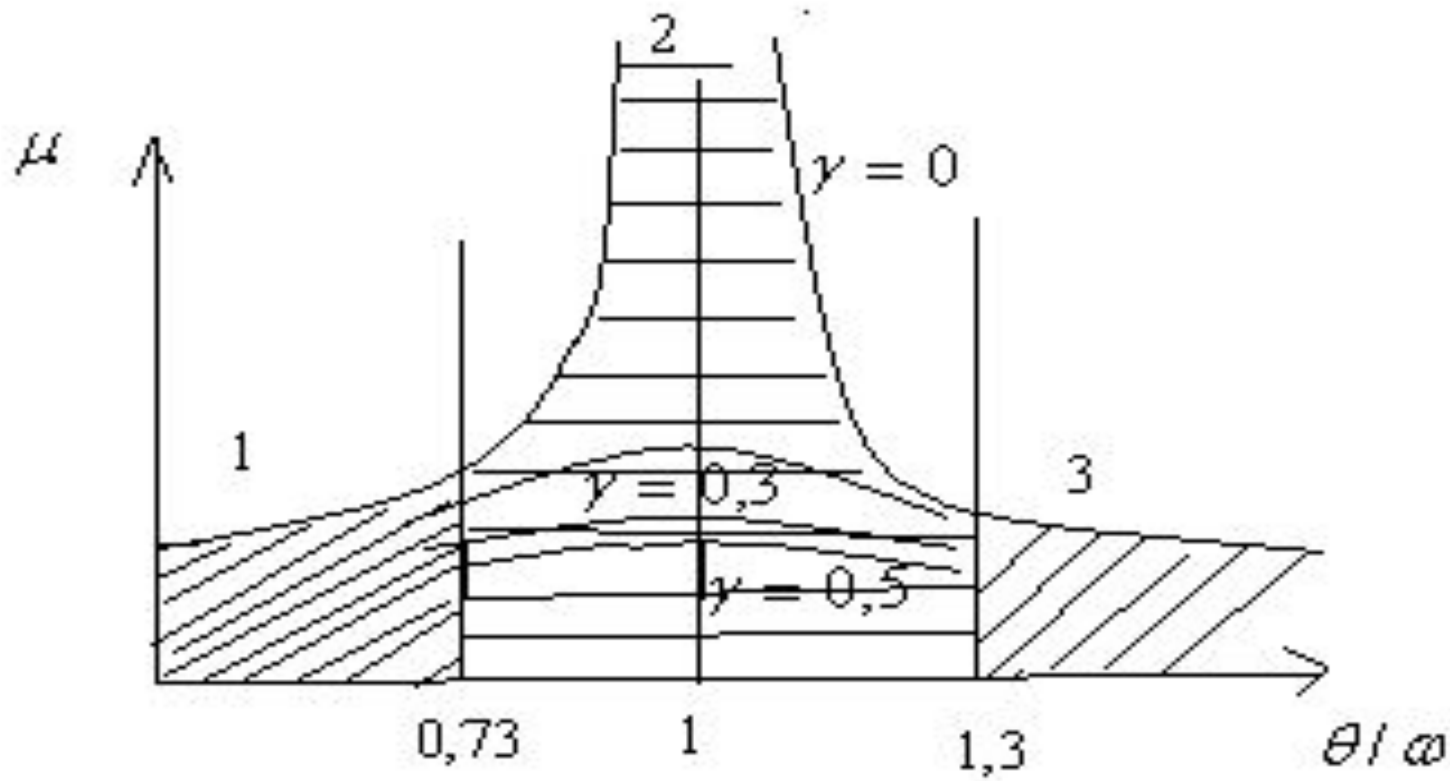
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\theta^2}{\omega^2})^2 + (\frac{k\theta}{m\omega^2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\theta^2}{\omega^2})^2 + (\frac{\gamma\theta}{\omega})^2}},$$

$$\gamma = \frac{k}{m\omega} - коэффициент \quad сопротивления,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - период \quad собственных \quad колебаний,$$

$$T_\theta = \frac{2\pi}{\theta} - период \quad вибрационной \quad нагрузки.$$

# Зависимость динамического коэффициента от отношения частот



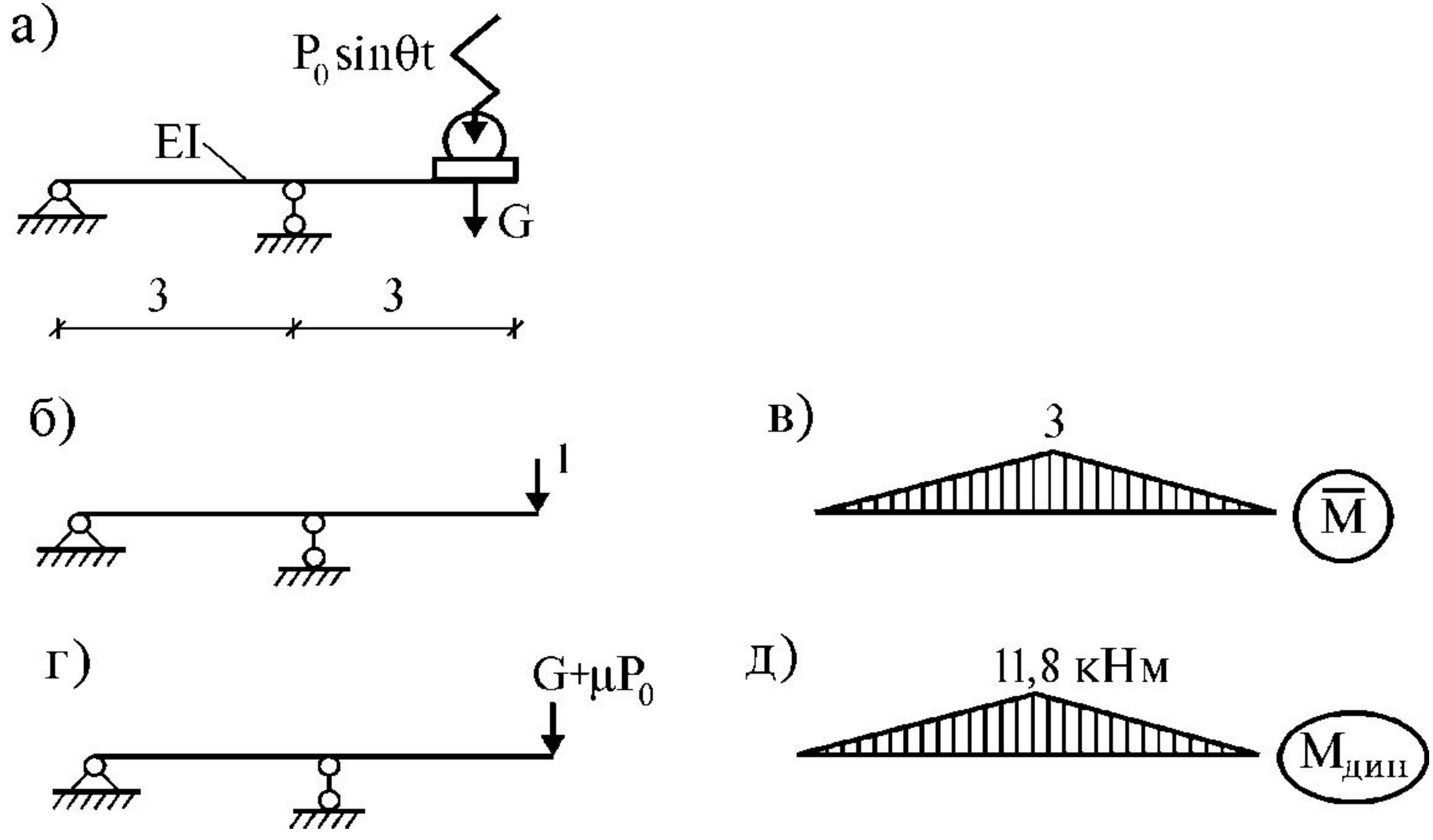
# ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**<u>Пример 1</u>**. На стальной балке находится работающий двигатель весом *G=200* кг (рис. 1а), создающий при *N=2000 об/мин* вибрационную нагрузку с амплитудой $P_0=10$ *кг*. Решить четыре задачи динамики при следующих данных: балка двутавр *№60* с моментом инерции $I=76806$ $см^4$ и моментом сопротивления изгибу $W=2560$ $см^3$, модуль упругости стали $E=2\cdot10^6$ $кг/см^2$, допустимое напряжение $[\sigma]=1600$ $кг/см^2$.

*<u>Решение</u>*. Вначале представим исходные данные в системе СИ:

$P_0=98$ *Н*; *G=1960 Н*; $E=19{,}6\cdot10^{10}$ $Н/м^2$; $I=7{,}68\cdot10^{-4}$ $м^4$; $W=2{,}56\cdot10^{-3}$ $м^3$; $[\sigma]=1{,}57\cdot10^8$ $Н/м^2$.

# Построение единичной и динамический эпюр изгибающих моментов



# Определение перемещения массы от единичной инерционной силы

$$\delta = \sum \int \frac{\overline{M}^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 2 = \frac{18}{EI} = \frac{18}{19{,}6 \cdot 10^{10} \cdot 7{,}68 \cdot 10^{-4}} = 1{,}19 \cdot 10^{-7}$$

# Определение частоты собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g}{G \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{9,8}{1960 \cdot 1,19 \cdot 10^{-7}}} = 204,5$$

# Определение частоты внешней нагрузки и динамического коэффициента

$$\theta = \frac{\pi N}{30} = \frac{3,14 \cdot 2000}{30} = 209,4$$ (с$^{-1}$).

$$\left|\frac{\theta - \omega}{\omega}\right| = \left|\frac{209,4 - 204,5}{204,5}\right| = 0,024 < 0,3$$

$$\mu = \frac{1}{1^2 - (\theta/\omega)} = \frac{1}{1^2 - 1,024} = 20,58$$

$$M_{\text{дин}} = (G + \mu P) M_0$$

$$\sigma_{\text{дин}}^{\max} = \frac{(G + \mu P) M_0^{\max}}{W} = \frac{(1960 + 20,58 \cdot 98) \cdot 3}{2,56 \cdot 10^{-3}} = 4,66 \cdot 10^6 \qquad \sigma_{\text{дин}}^{\max} < \left[\sigma_{\text{дин}}\right]$$

# Пример 2

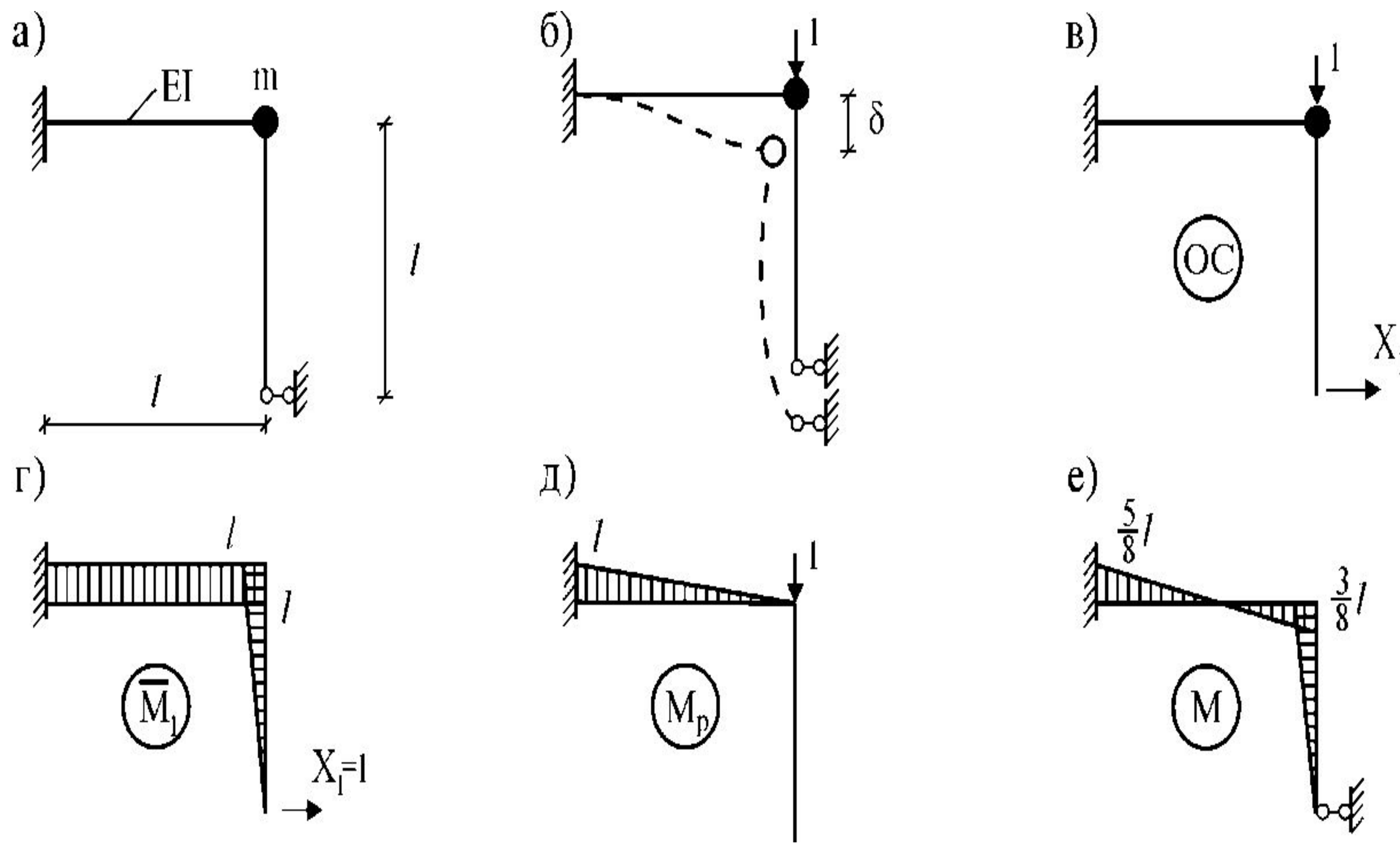
На раме с сосредоточенной массой $m=500$ *кг* и размерами $l=5$ *м* работает двигатель, создающий при $N=1200$ *об/мин* вибрационную нагрузку с амплитудой $P_0=15$ *кг* (рис. 2 а). Остальные данные такие же, как в примере 1. Пренебрегая собственным весом двигателя и стержней рамы, решить четыре задачи динамики.

Решение.

*1. Расчет на собственные колебания*

Если не учитывать продольные колебания стержней и их массы, то раму можно рассматривать как динамическую систему с одной массой, колеблющейся под воздействием вертикальной составляющей вибрационной нагрузки. Поэтому при определении частоты собственных колебаний можно воспользоваться формулой .

# Метод сил. Единичная эпюра изгибающих моментов



# Определение частоты собственных колебаний

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_P$$

$$\delta = \sum \int \frac{M\ M_P}{EI} = \frac{l}{6EI}\left(\frac{5}{8}\cdot l \cdot l + 4\cdot\frac{l}{8}\cdot\frac{l}{2}\right) = \frac{7}{48}\frac{l^3}{EI} = \frac{7\cdot 5^3}{48\cdot 19{,}6\cdot 10^{10}\cdot 7{,}68\cdot 10^{-4}} =$$

$$= 1{,}211\cdot 10^{-7}.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta m}} = \sqrt{\frac{1}{500\cdot 1{,}211\cdot 10^{-7}}} = 128{,}5$$

# Проверка на резонанс

Вычислим круговую частоту вращения двигателя:

$$\theta = \frac{\pi N}{30} = \frac{3,14 \cdot 1200}{30} = 125,6$$

(с$^{-1}$).

Тогда .

$$\left| \frac{\theta - \omega}{\omega} \right| = \left| \frac{125,6 - 128,5}{128,5} \right| = 0,022 < 0,3$$

Значит, колебания системы происходят в резонансно-опасной зоне.

# Проверка динамической прочности

$$\mu = \frac{1}{1^2 - (\theta/\omega)^2} = \frac{1}{1^2 - 0{,}977} = 22{,}4$$

$$M^{max}_{дин} = \mu M^{max} = \mu P_0 \frac{5}{8} l = 22{,}4 \cdot 15 \cdot 9{,}81 \cdot l \cdot \frac{5}{8} = 10300$$

$$\sigma^{max}_{дин} = \frac{M^{max}_{дин}}{W} = \frac{10300}{2{,}56 \cdot 10^{-3}} = 4{,}023 \cdot 10^{6} \quad \left[\sigma_{дин}\right] = 5{,}23 \cdot 10^{7}$$

$$y^{max}_{вибр} = \mu P_{ст}\,\delta_0 = 22{,}4 \cdot 15 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}211 \cdot 10^{-7} = 3{,}992 \cdot 10^{-4}\ (м) \approx 0{,}4\ (мм).$$