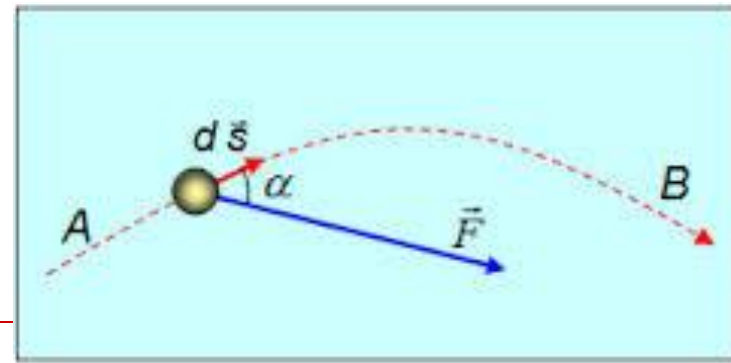


ТЕМА III. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

§1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ



1. РАБОТА СИЛЫ



Физическая величина, равная скалярному произведению действующей на тело силы \vec{F} , на совершённое под действием этой силы элементарное перемещение $d\vec{S}$, называется **работой силы**:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad dA = F dS \cos \alpha, \quad [A] = \text{м} \cdot \text{Дж} = 1 \text{ Дж} \text{ (джоуль)}.$$



Для постоянной по модулю и направлению силы F

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha = F_s \cdot s$$

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow A > 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow A = 0 \quad \alpha > \frac{\pi}{2} \rightarrow A < 0$$

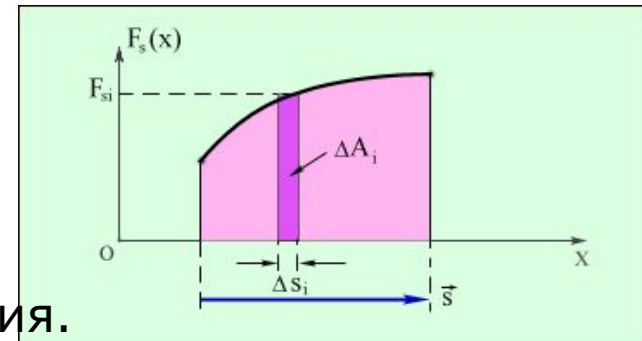
Если на конечном перемещении \vec{S} величина и направление силы, действующей на тело, не меняется, то выражение для работы принимает более простой вид:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \alpha = F_s S.$$

В случае переменной силы работа вычисляется как интеграл вдоль траектории:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S}.$$

Поскольку работа – это интеграл, то её величина численно равна площади под графиком проекции силы в зависимости от перемещения.

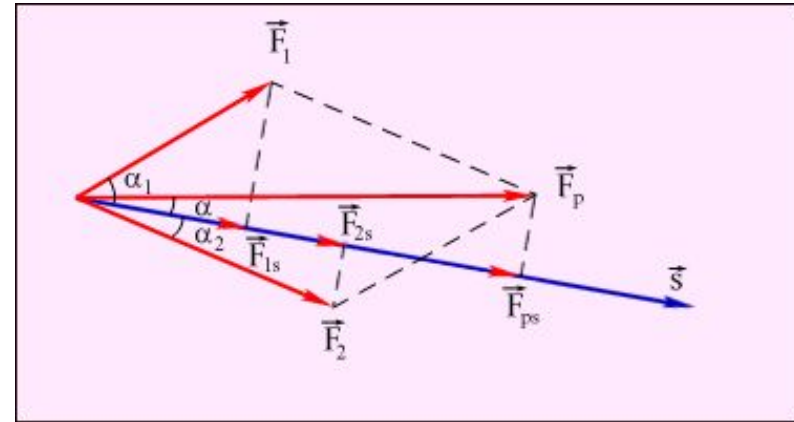


2. РАБОТА СУММЫ СИЛ

В случае, если тело движется под действием нескольких сил, работу суммы сил можно вычислить двумя способами:

1. Определить равнодействующую силу, а затем вычислить её работу:

$$\vec{F}_p = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad A_{12} = \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) d\vec{S}.$$



2. Определить работу каждой силы, а затем просуммировать результаты:

$$A_i = \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{S}, \quad A_{12} = \sum_{i=1}^N A_i. \quad A_{12} = \sum_{i=1}^N \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{S} = \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) d\vec{S}.$$

Работа равнодействующей силы равна сумме работ всех сил.

3. МОЩНОСТЬ

Работа, совершаемая
в единицу времени
называется **МОЩНОСТЬЮ**.



Средняя мощность:

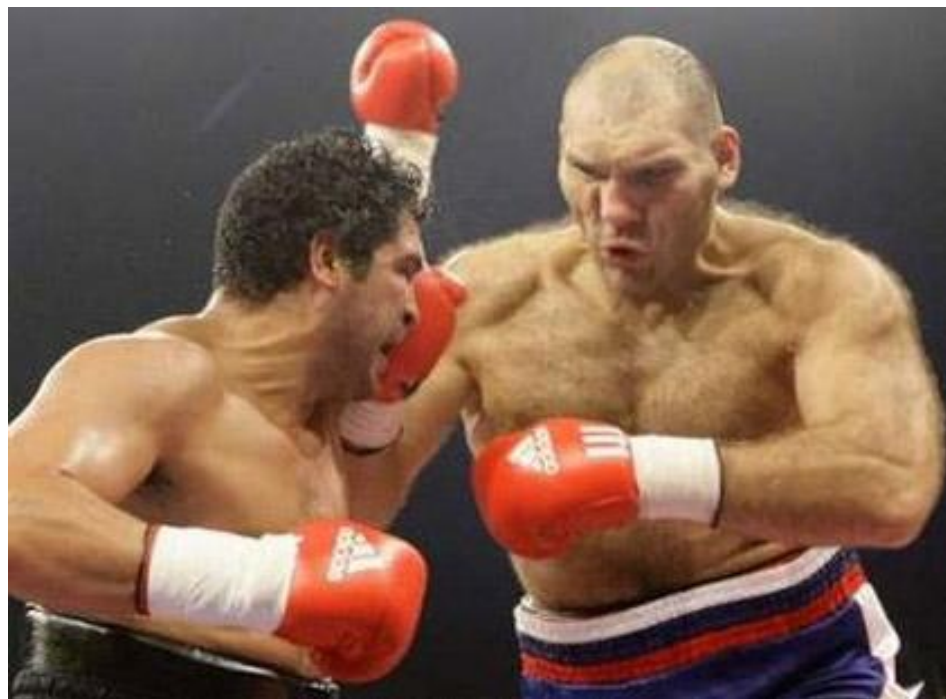
$$P_c = N_c = \frac{A}{t}$$

Мгновенная мощность:

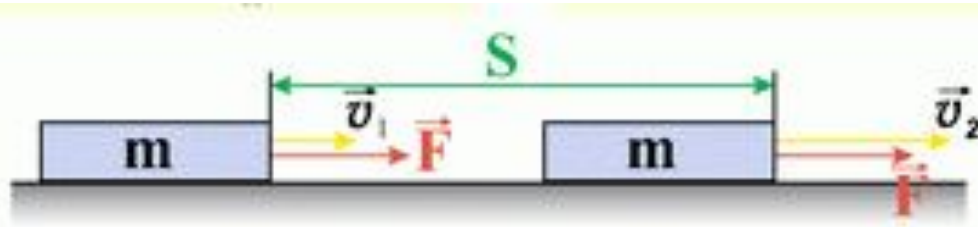
$$P \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{S}}{dt} = \vec{F}\vec{V} = FV \cos \alpha.$$

$$dA = \vec{F}\vec{V}dt \Rightarrow A = \int_{t_1}^{t_2} FV dt.$$

$$[Вт] = 1 \frac{Дж}{с} = 1 \quad .$$



4. ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ



Напишем уравнение движения для одной частицы (тела):

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}.$$

\vec{F} – равнодействующая сил, действующих на частицу.

Умножим уравнение движения на перемещение частицы $d\vec{S} = \vec{V}dt$:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} V dt = F dS \Rightarrow m \vec{V} d\vec{V} = F dS, \quad V dV = d\left(\frac{V^2}{2}\right) \Rightarrow d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = F dS.$$

Проинтегрируем полученное соотношение вдоль траектории от t_1 до t_2 :

$$\int_1^2 d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_1^2 F dS. \quad \text{Величина } K = \frac{mV^2}{2} \text{ называется кинетической энергией частицы (тела).}$$

Приращение кинетической энергии частицы равно работе равнодействующей сил, действующих на эту частицу: $K_2 - K_1 = A_{12}$.

Это утверждение называют **теоремой о кинетической энергии**.

5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ТЕЛА

Из теоремы о кинетической энергии $K_2 - K_1 = A_{12}$ ($\boxtimes K = A$) следует, что кинетическая энергия выражается в тех же единицах что и работа, то есть в Джоулях.

Кинетическая энергия частицы может быть выражена через его импульс:

$$W_k = K = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow K = \frac{m^2V^2}{2m}, \quad p = mV \Rightarrow K = \frac{p^2}{2m}.$$

Импульс частицы также можно выразить через её кинетическую энергию:

$$p^2 = 2mK \Rightarrow p = \sqrt{2mK};$$

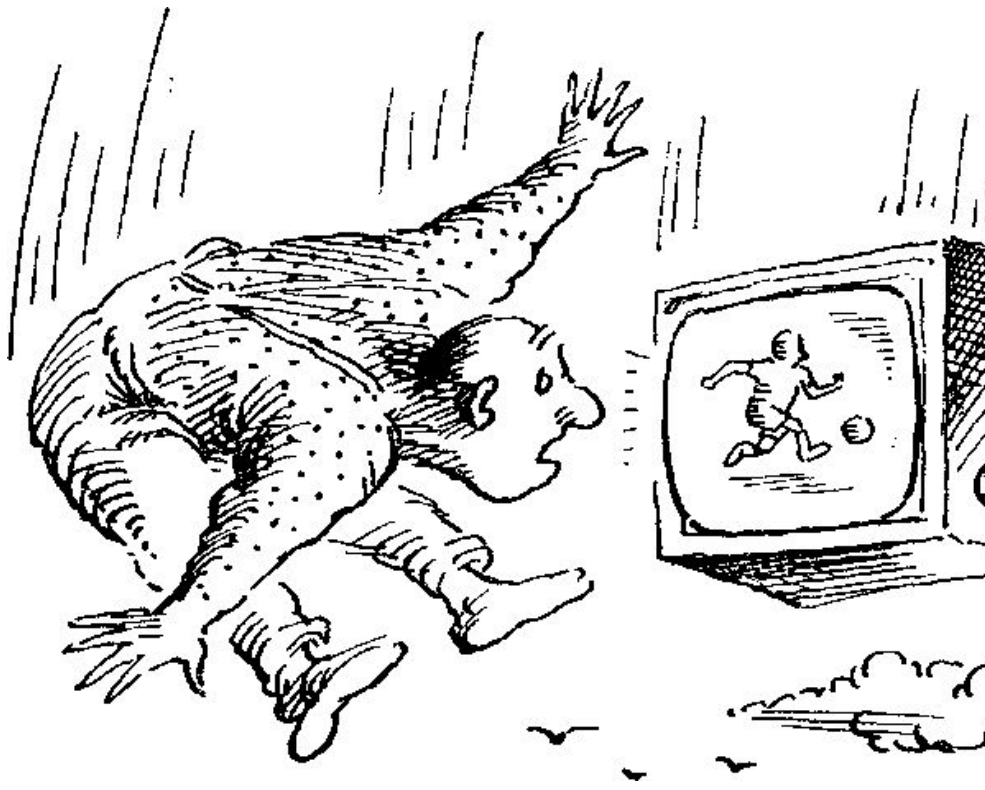


§2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ



1. СИЛОВОЕ ПОЛЕ

Силовое поле (физическое поле) – форма материи. Представляет собой некоторую область пространства, в которой физические объекты испытывают силовое воздействие.



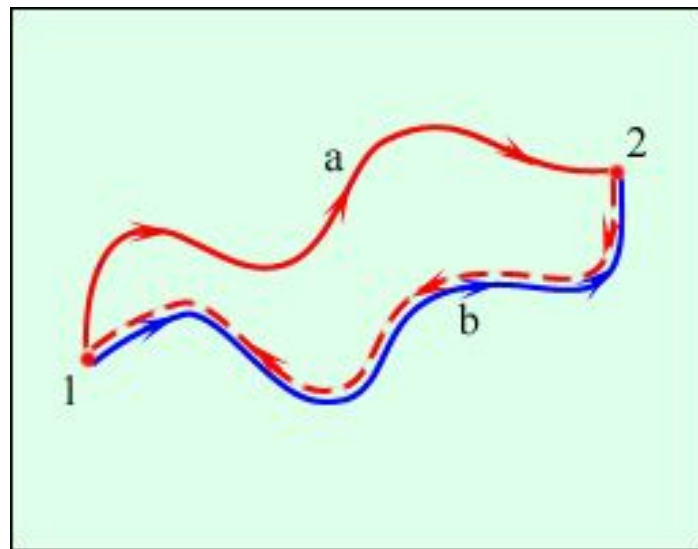
2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ

Если работа, совершаемая над частицей силами поля, зависит лишь от начального и конечного положения частицы (не зависит от траектории частицы), то такие силовые поля называются

консервативными полями $A_{12a} = A_{12b}$.

Из независимости работы консервативных сил от пути вытекает, что работа таких сил на замкнутом пути равна нулю:

$$A_{12a} = -A_{21b} \Rightarrow A_{12} + A_{21} = 0;$$



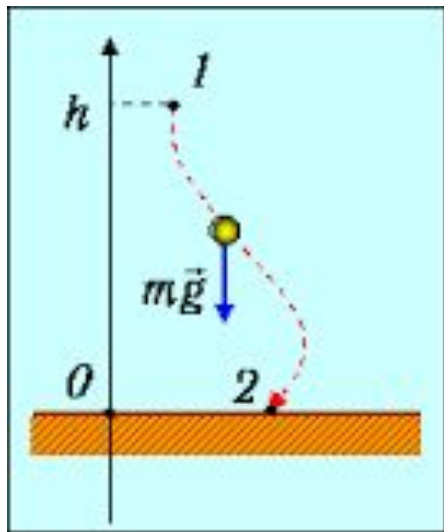
Консервативными являются **однородные и центральные** силовые поля.

Силовое поле называется **однородным**, если во всех точках поля силы, действующие на частицу одинаковы по модулю и направлению $\vec{F} = \text{const}$.

Силовое поле называется **центральным**, если сила, действующая на частицу в любой точке поля, направлена на одну точку (силовой центр), а модуль силы зависит от расстояния до этого центра $\vec{F} = F_r(r)\vec{e}_r$.

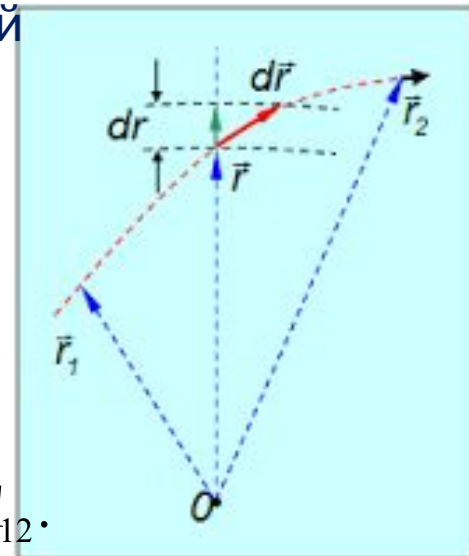
3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

В случае, когда работа сил поля не зависит от пути, а зависит лишь от начального и конечного положения частицы (консервативные силы), каждой точке поля можно сопоставить некоторую функцию $\Pi(x, y, z)$ такую, что разность значений этой функции в начальной и конечной точках траектории, будет определять работу сил поля при переходе частицы из начальной точки в конечную: $A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2$.



Функция $\Pi(x, y, z)$ измеряется в тех же единицах, что и работа силы, то есть Джоулях. Её называют потенциальной энергией частицы во внешнем поле сил.

Потенциальной энергией частицы в консервативном силовом поле называется такая функция координат частицы, убыль которой равна работе сил поля над этой частицей при её



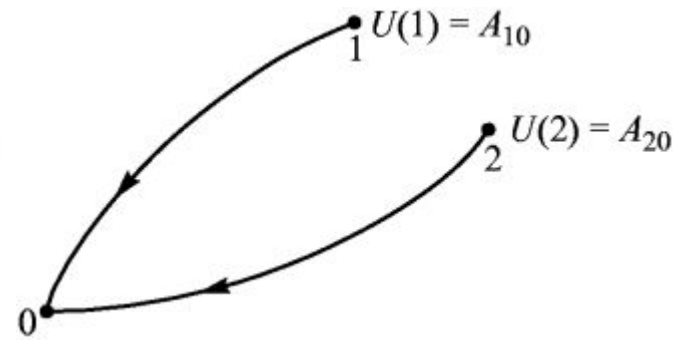
перемещении из начальной точки траектории в конечную: $\Pi_1 - \Pi_2 = A_{12} \Rightarrow -(\Pi_2 - \Pi_1) = A_{12} \Rightarrow -\Delta \Pi = A_{12}$.

4. НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Физический смысл имеет не сама потенциальная энергия, а её убыль, равная работе сил поля над частицей при перемещении

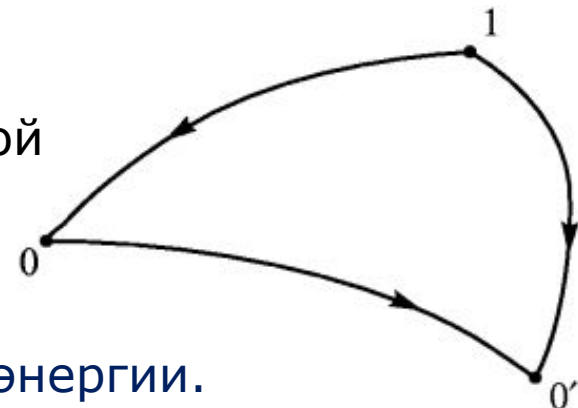
этой частицы из начальной точки траектории в конечную: $\Pi_1 - \Pi_2 = A_{12}$.

Для расчёта потенциальной энергии частицы в конкретной точке поля необходимо выбрать ту точку поля, в которой потенциальная энергия частицы принимается равной нулю. Пусть



$$\Pi_2 = 0 \Rightarrow \Pi_1 = U(1) = A_{10}, \quad \Pi(x, y, z) = A_0.$$

Потенциальная энергия частицы в данной точке поля равна работе, которую совершают силы поля над частицей при её перемещении из данной точки поля в ту точку, для которой потенциальная энергия принята равной нулю.

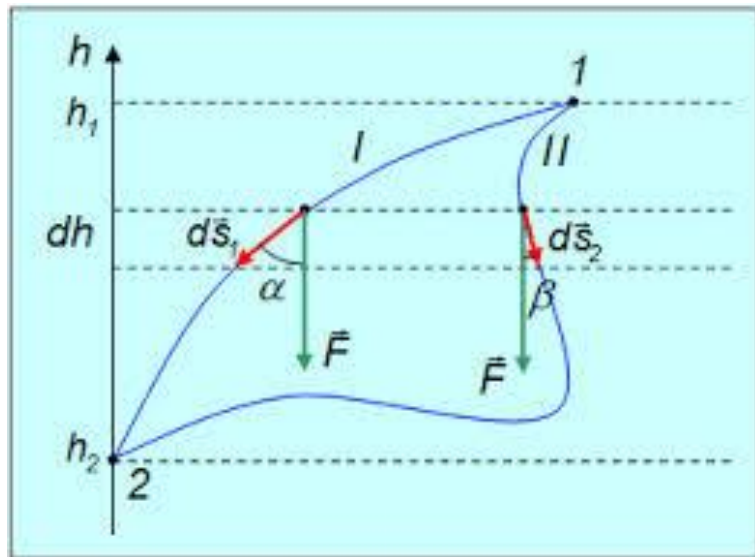


$$A_0 = \int_{x,y,z}^{x_0,y_0,z_0} \vec{F} d\vec{S}.$$

Ясно, что величина потенциальной энергии частицы в данной точке зависит от выбора точки с нулем потенциальной энергии.

В этом состоит **неоднозначность** потенциальной энергии.

5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ



Сила тяжести в каждой точке имеет одинаковый модуль и направление – вниз.

$$\vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow A_{12} = \int_1^2 m g dS = \int_1^2 m g \cos \alpha dS,$$

$$\cos \alpha dS = -dh \Rightarrow A_{12} = -mg \int_1^2 dh \Rightarrow$$

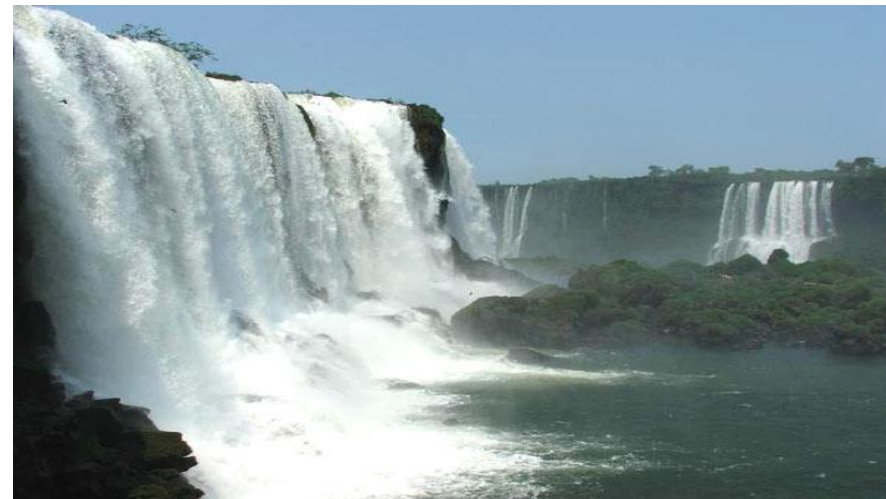
$$A_{12} = -mg(h_2 - h_1) = mg(h_1 - h_2).$$

Сравнивая полученное выражение с определением потенциальной энергии

$$\Pi_1 - \Pi_2 = A_{12}, \quad \text{получаем выражение}$$

для потенциальной энергии частицы в поле силы тяжести $\Pi = mgh,$

h отсчитывается от нулевым уровня.



6. ПОТЕНЦИАЛЬНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

$$A_{12} = \int_1^2 F dr;$$

$$F = const \Rightarrow A_{12} = F \int_1^2 dr;$$

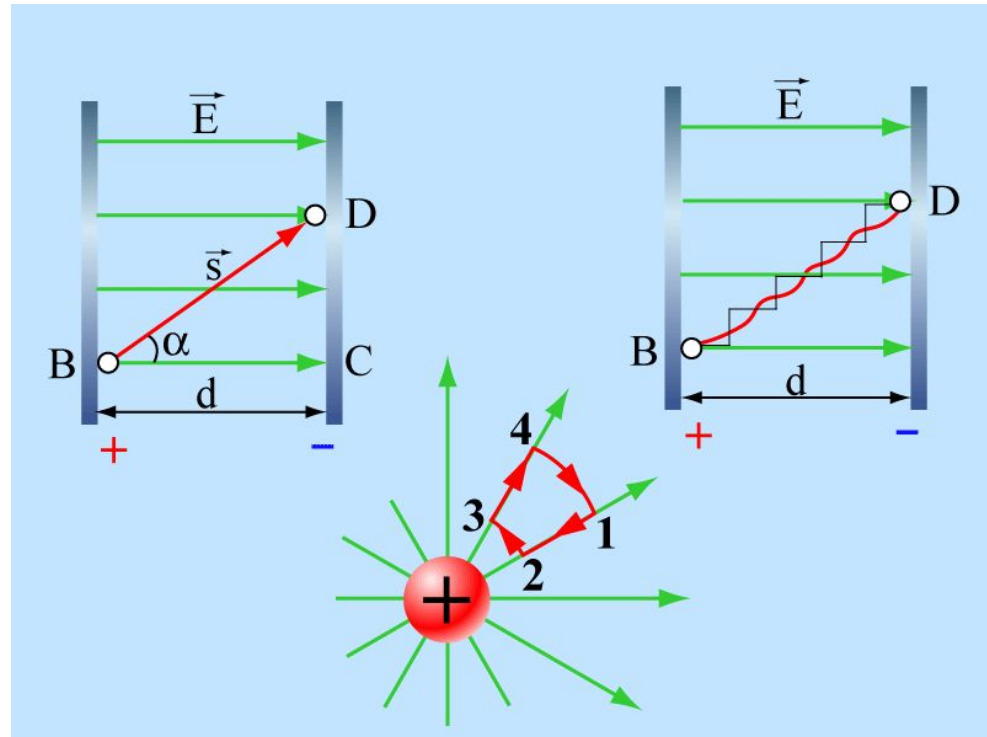
$$\int_1^2 dr = r_2 - r_1 \Rightarrow A_{12} = F(r_2 - r_1);$$

$$A_{12} = Fr_2 - Fr_1;$$

$$A_{12} = F(r_2 - r_1);$$

$$\Pi_1 = -Fr_1; \quad \Pi_2 = -Fr_2;$$

$$\Pi(r) = -Fr;$$



7. ПОТЕНЦИАЛЬНОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

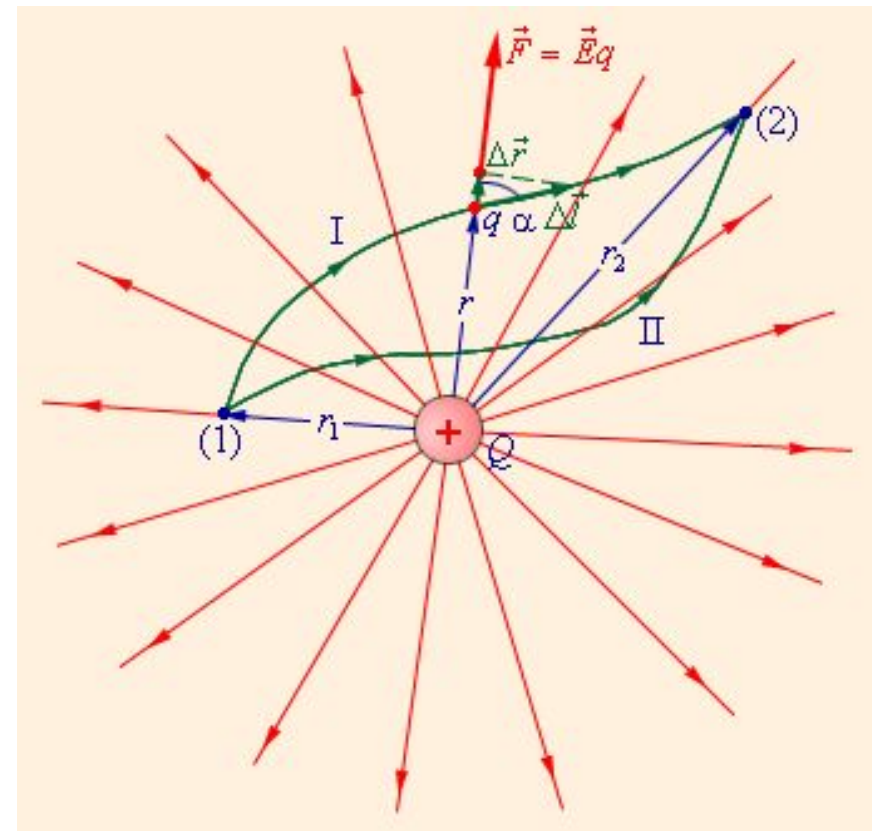
Силовое поле называется **центральным**,
если сила, действующая в этом поле
на пробную частицу

имеет вид:

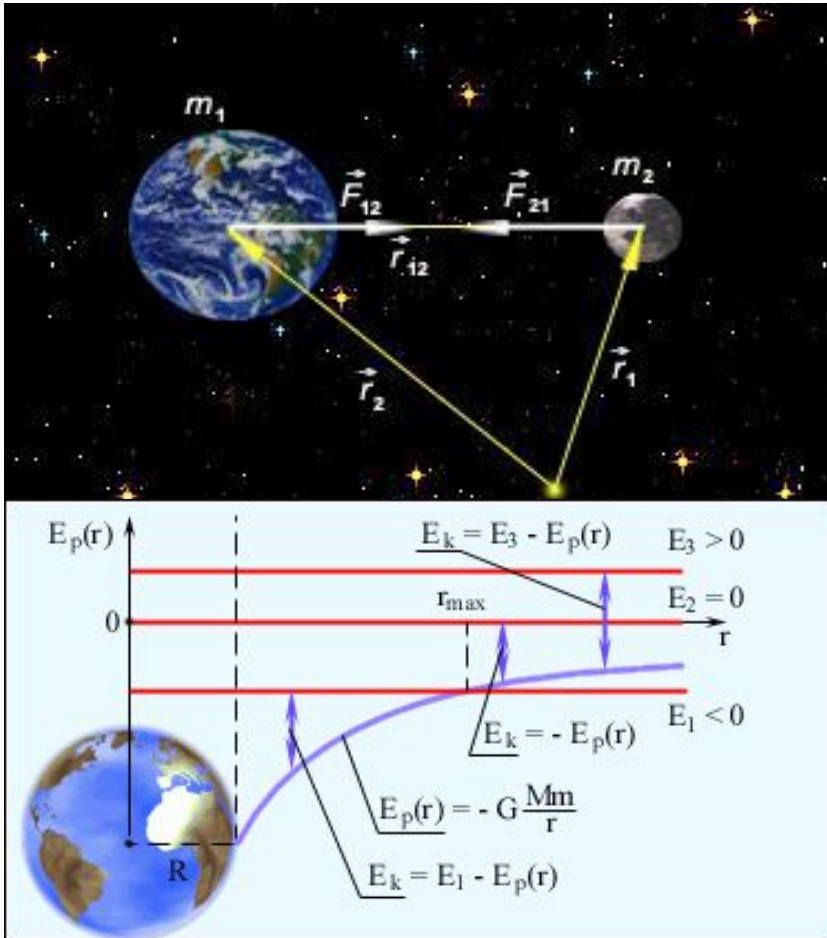
$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r) \vec{e}_r = F(r) \frac{\vec{r}}{r};$$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_r \frac{\vec{r}}{r} dr \Rightarrow$$

$$r dr = r dr \Rightarrow A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) dr.$$



8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ



$$m_1 = M; \quad m_2 = m; \quad \vec{r}_{12} = \vec{r};$$

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r};$$

$$F_r(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{r}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2};$$

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) dr = -\gamma mM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

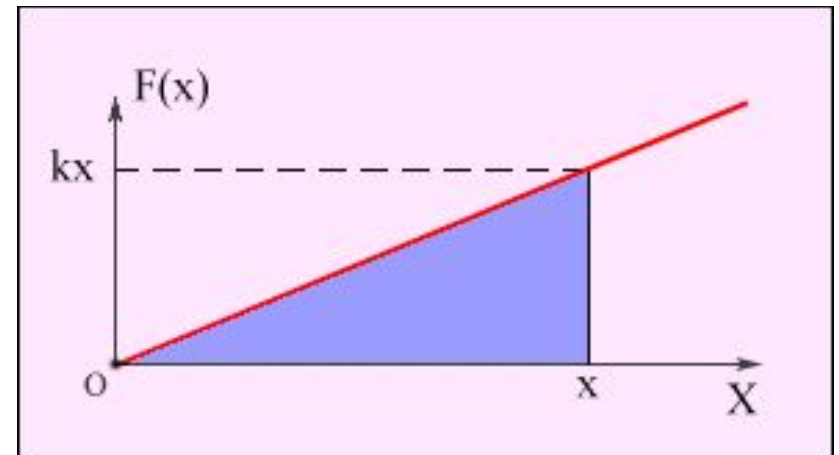
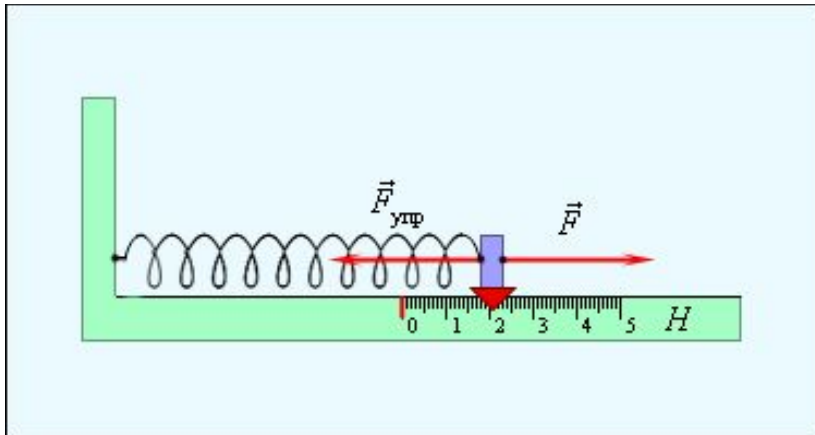
$$\Pi_1 - \Pi_2 = -\gamma mM \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{r_2} = -\gamma mM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow \Pi(r) = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

9. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПРУЖИНЫ

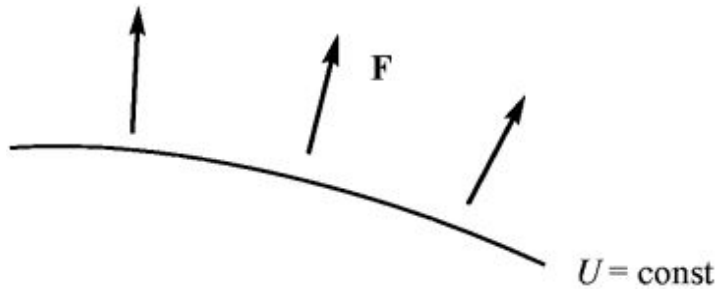
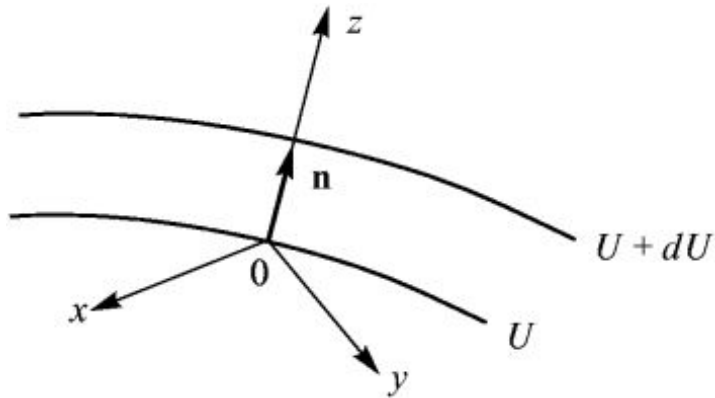
$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx; \quad F_x = -kx \Rightarrow$$

$$\Pi_1 - \Pi_2 = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k \left(\frac{x^2}{2} \right)_{x_1}^{x_2} \Rightarrow$$

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \Rightarrow \Pi(x) = \frac{kx^2}{2}.$$



11. СВЯЗЬ МЕЖДУ СИЛОЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ



$$A_{12} = \Pi_1 - A_2 \Rightarrow \int_{12} F - (\Pi_2 - \Pi_1) \Rightarrow$$

$$A_{12} = dA \Rightarrow d\Pi = -$$

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz;$$

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz .$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy - \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \Rightarrow$$

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} .$$

12. СИЛА – ГРАДИЕНТ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

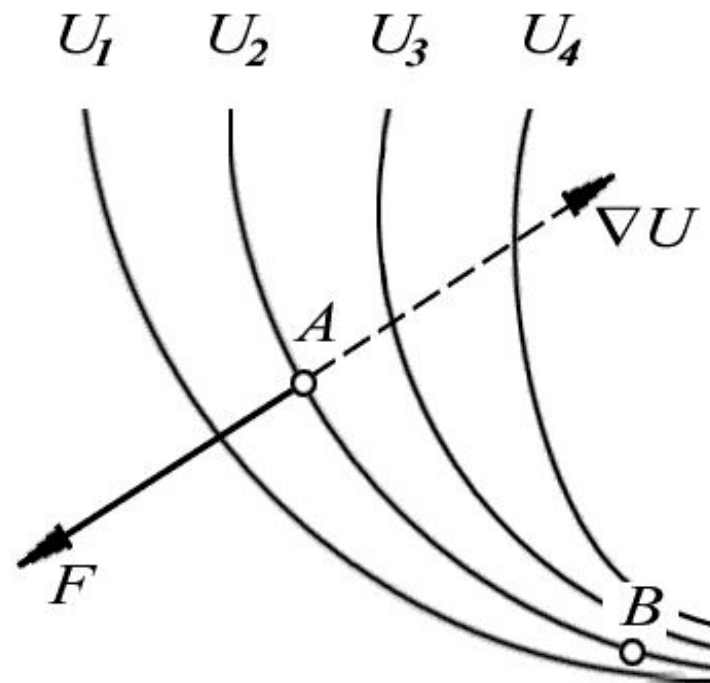
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}; \quad F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \vec{k} \right) = -grad \quad .$$

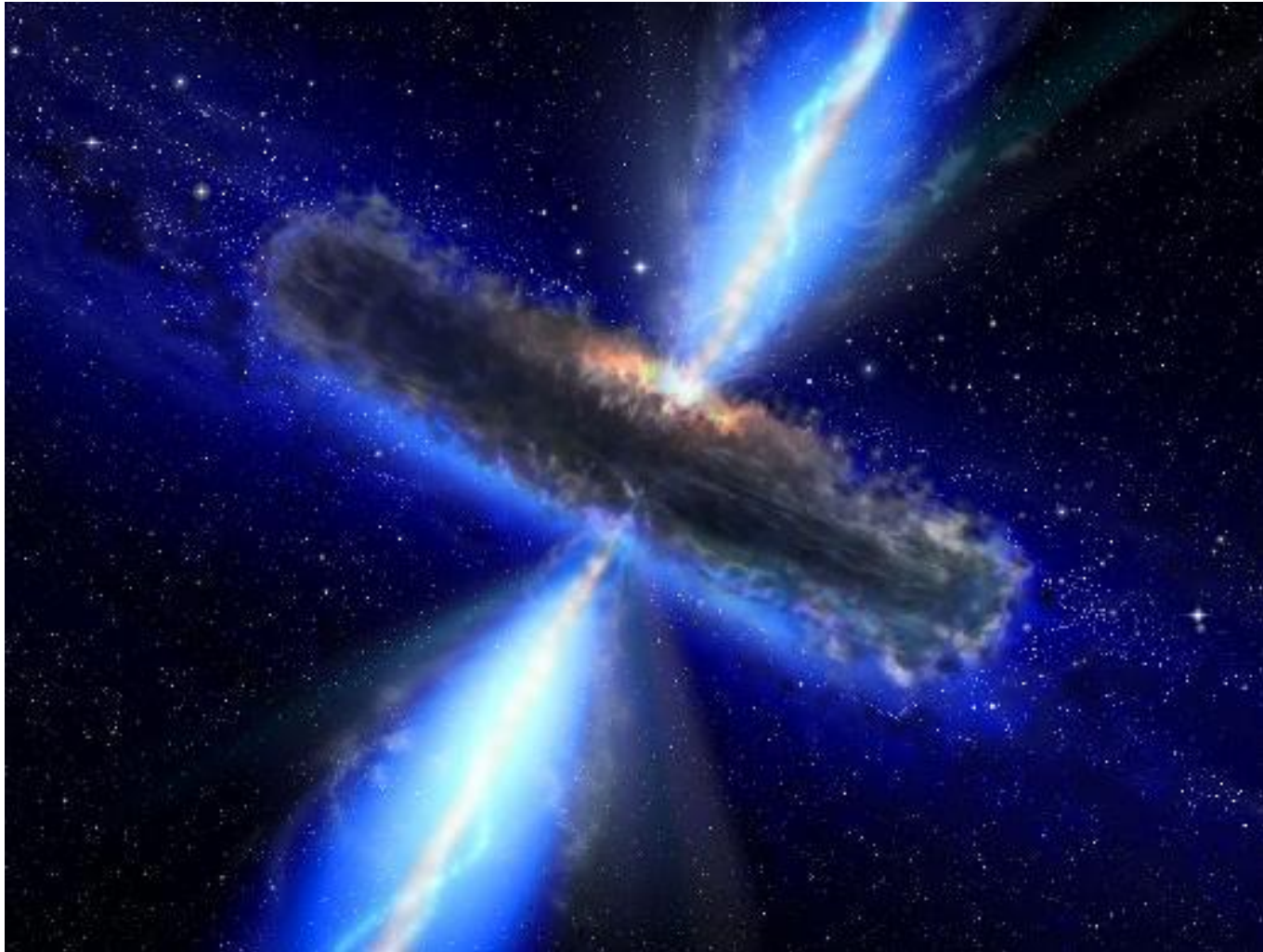
$$grad \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \nabla \varphi.$$

∇ - оператор набла.

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$



§3. ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ



1. ЭНЕРГИЯ



Энергия

Скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения материи и мерой перехода движения материи из одной формы в другие

+ механическая



+

внутренняя



+

электрическая



+

тепловая



+

ядерная



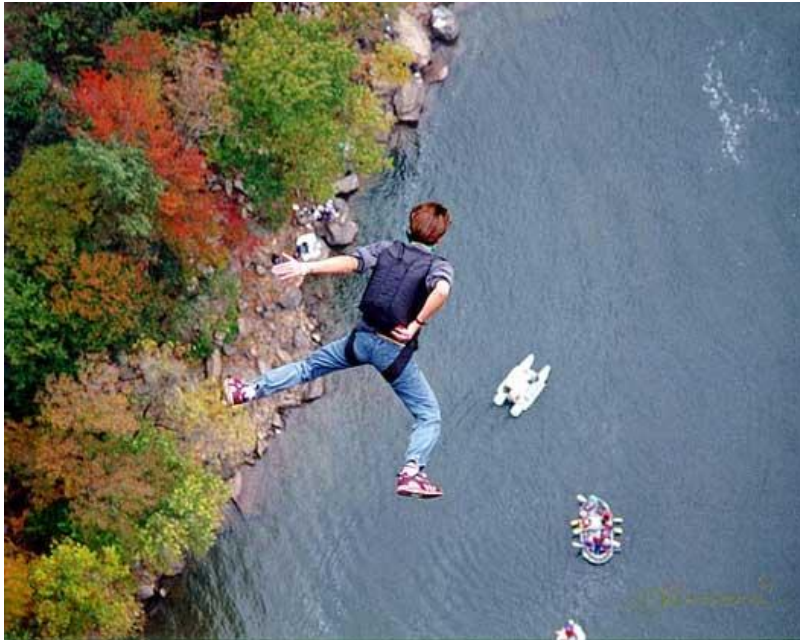
+

и другие

= ПОЛНАЯ ЭНЕРГИЯ = const

$$\Delta W = A_{\text{над сист}} = - A_{\text{сист}}$$

2. ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ЧАСТИЦЫ



$$E = \Pi + \quad .$$

$$W = T + U.$$



3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ (I)

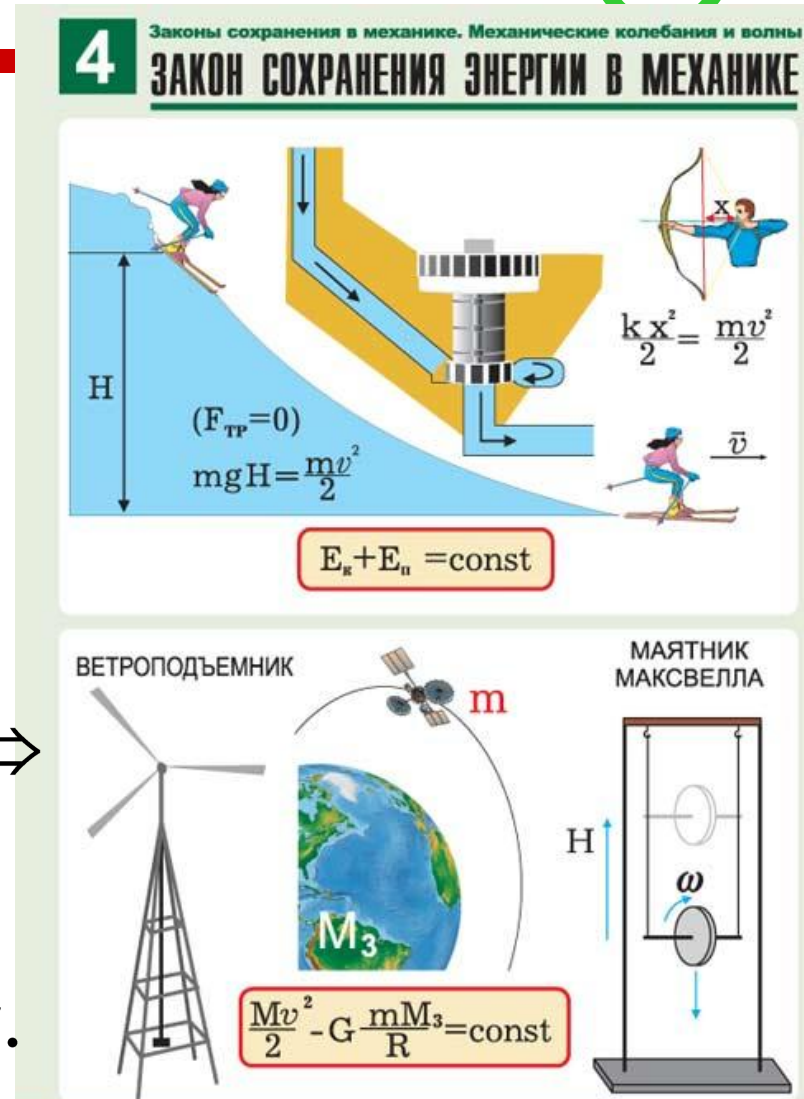
Если на частицу действуют только консервативные силы, то ее механическая энергия остается постоянной (является интегралом движения).

$$K_2 - K_1 = A; \quad \Pi_1 - \Pi_2 = A_k.$$

$$A = A_k \Rightarrow K_2 - K_1 = \Pi_1 - \Pi_2 \Rightarrow$$

$$K_2 + \Pi_2 = \Pi_1 + K_1 \Rightarrow$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E = K + \Pi = \text{const.}$$

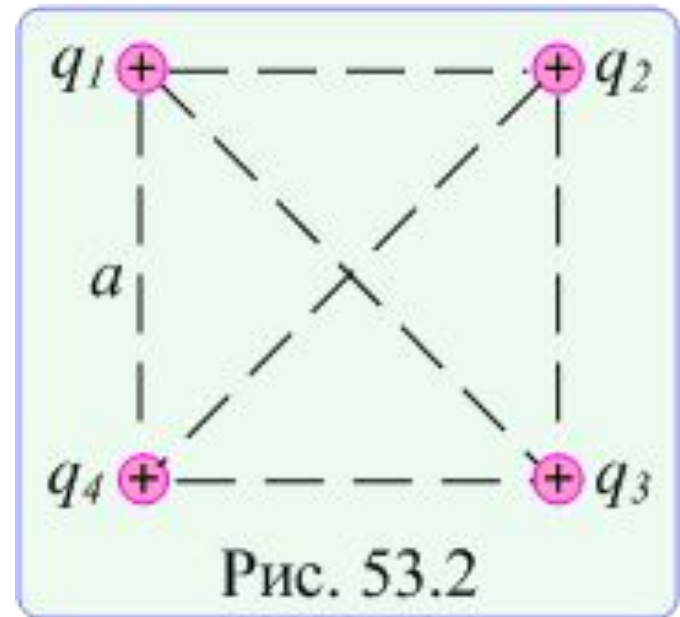
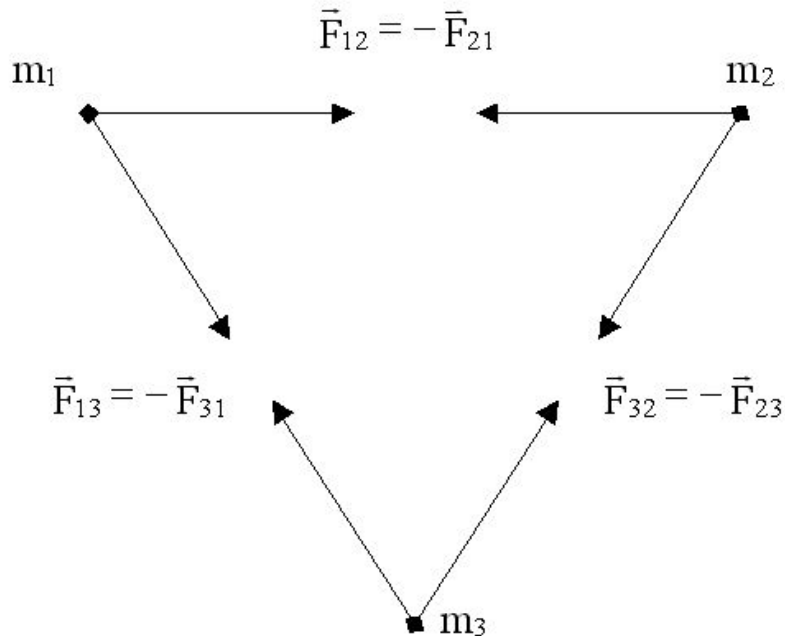


4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

$$\Pi = \Pi_{ext} + \Pi_{int}. \quad \Pi_{int} = \frac{1}{2} (\Pi_{12} + \Pi_{13} + \Pi_{21} + \Pi_{23} + \Pi_{31} + \Pi_{32}).$$

$$\Pi_{ext} = \sum_{i=1}^N \Pi_i;$$

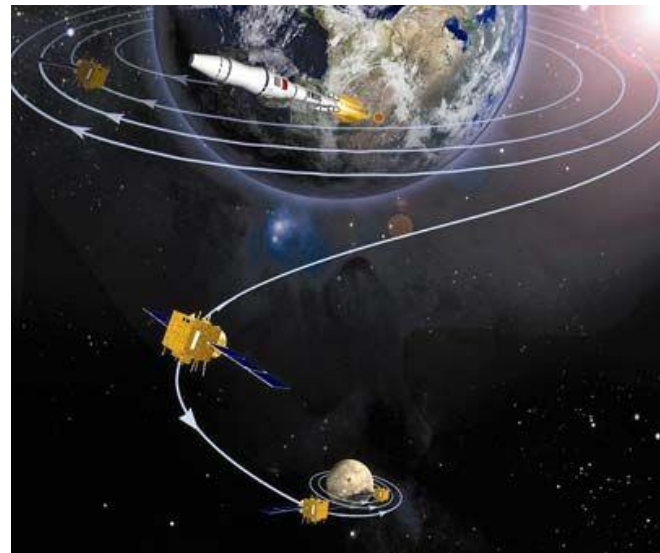
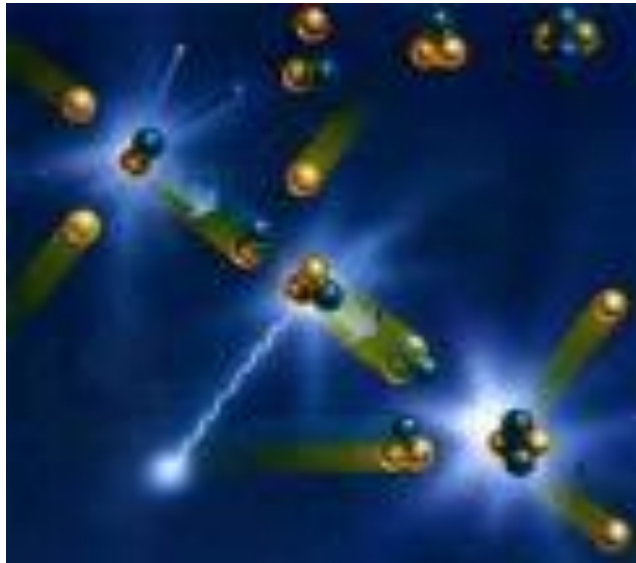
$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \Pi_{ij} = \sum_{i < j}^N \Pi_{ij}.$$



5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ (II)

Полная механическая энергия системы тел, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной.

$$E = \sum_{i=1}^N K_i + \sum_{i=1}^N \varphi_i + \sum_{i < j}^N U_{ij} = \text{const}$$



6. НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

$$A_{HK} = \Delta W = \Delta E;$$

$$A_{HK} = E_2 - E_1.$$



МЕХАНИКА

ФИЗИКА

61

Закон сохранения энергии

Если на тело или систему тел действуют силы, часть которых является консервативными, а часть - неконсервативными, то работа равнодействующей силы равна

$$A = A_{\text{конс}} + A_{\text{нк}} = \Delta W_K$$

$$A_{\text{конс}} = -\Delta W_{\text{П}}$$

$$A_{\text{нк}} = \Delta W_K + \Delta W_{\text{П}}$$

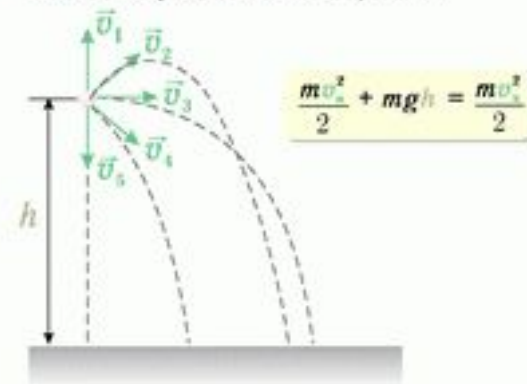
Если в замкнутой системе $F_{\text{вн}} = 0$, то $A_{\text{вн}} = 0$, тогда для такой системы

$$\Delta W_K + \Delta W_{\text{П}} = 0$$

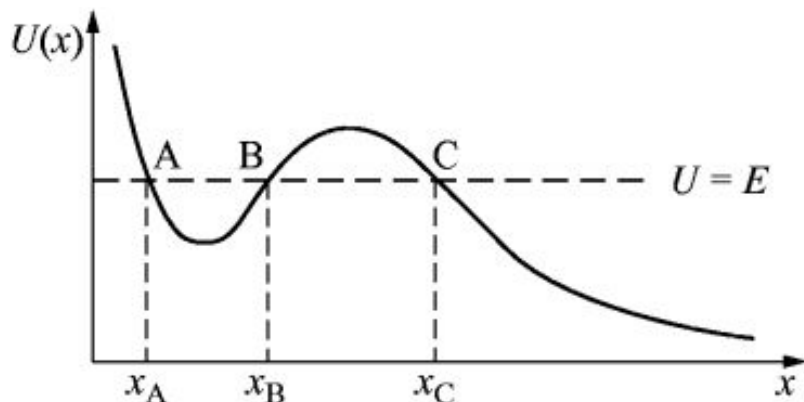
$$W_K + W_{\text{П}} = \text{const}$$

УПРАЖНЕНИЕ

5 тел массой m брошены с высоты h со скоростями $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5$.
Какие из них упадет с большей скоростью?



7. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА И ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

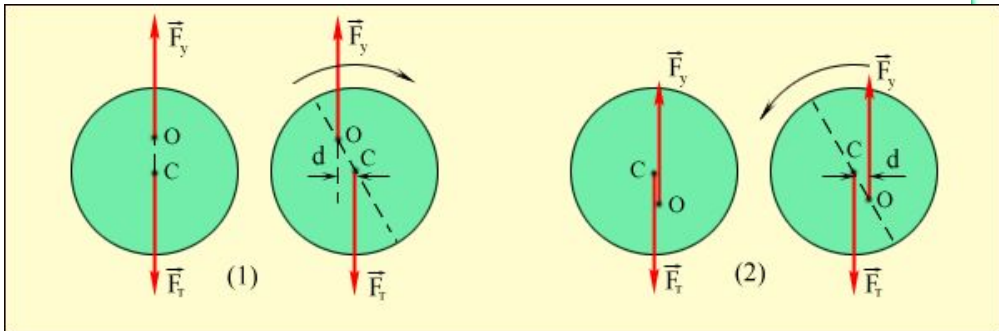
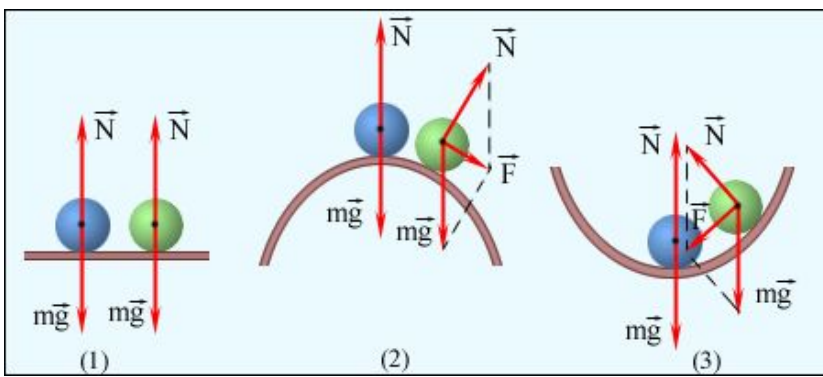


Частица с энергией W_0 может находиться в точках с координатами от x_1 до x_5

$$W_0 = W_{II} + W_K$$

$$F_x = -\frac{dW_{II}}{dx}$$

Точки, где $F_x = 0$, представляют собой положения равновесия



$F_x = 0$		$F_x > 0$	$F_x < 0$
	равновесие		
$x = x_1$	устойчивое	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_2 \leq x \leq x_3$
$x = x_2$	неустойчивое		
$x = x_3$	устойчивое	$x_3 \leq x \leq x_4$	$x_4 \leq x \leq x_5$
$x \geq x_5$	безразличное		

8. АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР

Абсолютно неупругим называется такой удар, при котором возникают только пластические деформации.

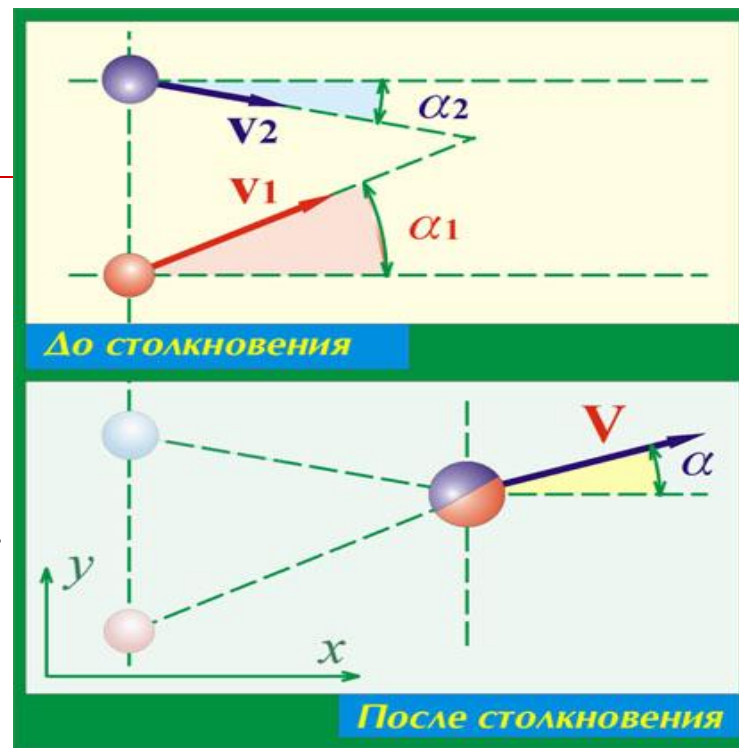
$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \beta.$$

$$(m_1 + m_2)^2 V^2 = (m_1 V_1 + m_2 V_2)^2 \Rightarrow$$

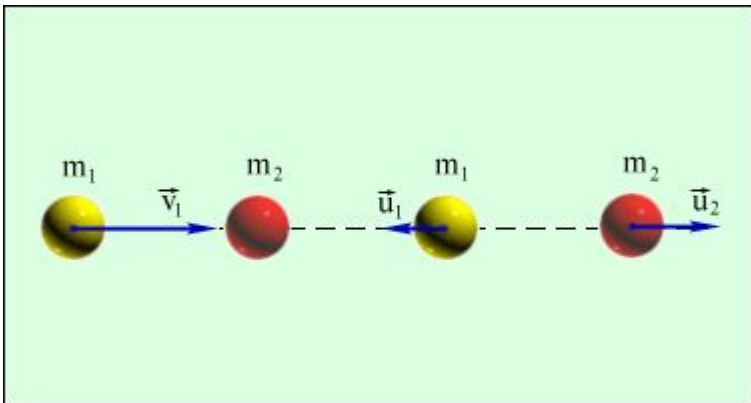
$$(m_1 + m_2)^2 V^2 = m_1^2 V_1^2 + 2m_1 m_2 V_1 V_2 \cos \beta + m_2^2 V_2^2;$$

$$\sqrt{m_1^2 V_1^2 + 2m_1 m_2 V_1 V_2 \cos \beta + m_2^2 V_2^2} \cos \alpha = m_1 V_1 \cos \alpha_1 + m_2 V_2 \cos \alpha_2.$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} + Q.$$



9. АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР



$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 U_{1x} + m_2 U_{2x};$$

$$\frac{m_1 V_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2x}^2}{2} = \frac{m_1 U_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 U_{2x}^2}{2}.$$

$$m_1 (V_{1x} - U_{1x})(V_{1x} + U_{1x}) = m_2 (U_{2x} - V_{2x})(U_{2x} + V_{2x});$$

$$m_1 (V_{1x} - U_{1x}) = m_2 (U_{2x} - V_{2x}).$$

$$V_{1x} + U_{1x} = V_{2x} + U_{2x} \Rightarrow U_{2x} = U_{1x} + V_{1x} - V_{2x} \Rightarrow$$

$$m_1 V_{1x} - m_1 U_{1x} = m_2 U_{1x} + m_2 (V_{1x} - V_{2x}) \Rightarrow$$

$$U_{1x} = \frac{2m_2 V_{2x} + (m_1 - m_2) V_{1x}}{m_1 + m_2}; \quad U_{2x} = \frac{2m_1 V_{1x} + (m_2 - m_1) V_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

10. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР (ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ)

$$U_{1x} = \frac{2m_2V_{2x} + (m_1 - m_2)V_{1x}}{m_1 + m_2}; \quad U_{2x} = \frac{2m_1V_{1x} + (m_2 - m_1)V_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

$$U_{1x} \neq U_{2x}; \quad U_{1x} = U_{2x} \Rightarrow V_{1x} = V_{2x}.$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow U_{1x} = V_{2x}; \quad U_{2x} = V_{1x}.$$

$$V_{2x} = 0 \Rightarrow U_{1x} = 0; \quad U_{2x} = V_{1x}.$$

$$m_2 \gg m_1 \Rightarrow U_{2x} = V_{2x};$$

$$U_{1x} = 2V_{2x} - V_{1x}.$$



$$V_{2x} = 0 \Rightarrow U_{1x} = -V_{1x}.$$

11. НЕЦЕНТРАЛЬНЫЙ УПРУГИЙ УДАР

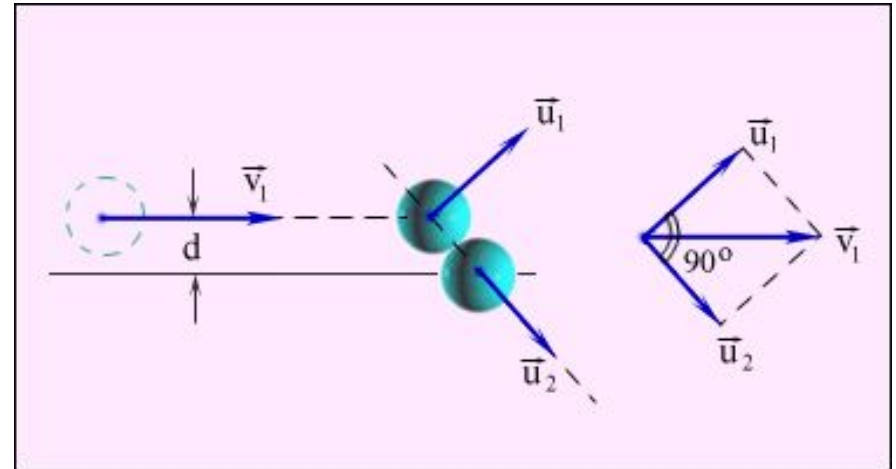
$$m_1 = m_2 = m; \quad V_2 = 0.$$

$$m\vec{V}_1 = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \Rightarrow V_1^2 = (\vec{U}_1 + \vec{U}_2)^2 \Rightarrow$$

$$V_1^2 = U_1^2 + 2U_1U_2 \cos \alpha + U_2^2.$$

$$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mU_1^2}{2} + \frac{mU_2^2}{2} \Rightarrow$$

$$V_1^2 = U_1^2 + U_2^2 \Rightarrow$$



$$2U_1U_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$