Логика предикатов первого порядка
Основы логики предикатов

- Класс задач, решаемых с использованием логики высказываний, очень ограничен. Например, из посылок следующего классического примера – «Все люди смертны» и «Сократ – человек» – интуитивно следует заключение «Сократ смертен».
- Однако в рамках логики высказываний решить эту задачу не удается. Объясняется это тем, что утверждение в логике высказываний это неделимый объект (атом), а приведенный пример требует анализа внутренней структуры предложения. Логика предикатов первого порядка позволяет выразить большее разнообразие утверждений благодаря тому, что в нее добавлены термы, предикаты и кванторы.

- Если проанализировать приведенные выше три утверждения, то можно обнаружить, что рассуждения здесь ведутся на некоторой предметной области (множестве людей). «Сократ» является объектом этой предметной области. Кроме того, в первом утверждении есть неявное указание на принадлежность к этой предметной области («если некто принадлежит к множеству людей, значит, он смертен»). Такое неконкретизированное указание объекта предметной области соответствует понятию «переменная», а явное указание «Сократ» – понятию «константа». Принадлежность объекта к предметной области можно задать в виде «логической функции» или предиката. Например, предикат ЧЕЛОВЕК(x) указывает на то, что если x является человеком, то высказывание ЧЕЛОВЕК(x) является истинным, и, соответственно, предикат СМЕРТЕН(x) указывает на то, что x смертен. Здесь формы записи ЧЕЛОВЕК и СМЕРТЕН называются предикатными символами. Выражение «все люди» служит примером квантификации, такая запись символически может быть представлена как $\forall$ и называется квантором всеобщности (общности). Запись ($\forall$x) читается как «для всех x», «для всякого x», «для каждого x».

Тогда приведенные три высказывания можно формально записать следующим образом:

$(\forall x)(\text{ЧЕЛОВЕК}(x) \rightarrow \text{СМЕРТЕН}(x))$

ЧЕЛОВЕК(Сократ)

СМЕРТЕН(Сократ)

Кроме квантора всеобщности, в логике предикатов используется квантор существования, символически записываемый в виде $(\exists x)$, что означает «существует x», «для некоторых x», «по крайней мере, для одного x».

- Константы и переменные образуют более общее понятие – терм, который определяется следующим образом:
- константа – это терм;
- переменная – это терм;
- если f – n-местный функциональный символ и t1, t2, ..., tn – термы, то f(t1, t2, ..., tn) – терм; других термов нет.
- Синонимом для сложного терма вида f(t1, t2, ..., tn) будет «функция». Функция есть отображение списка констант в константу. Предикат – это тоже отображение списка констант, но не в константу, а в элемент множества {И, Л}.
- Основными символьными конструкциями логики предикатов являются константы, переменные, термы, предикатные символы, логические связки, кванторы. После определения терма можно дать понятие атома и формулы в логике предикатов. Если P – n-местный предикатный символ и t 1 , t 2 , ..., tn – термы, то P(t1, t2, ..., tn) – атом. Понятие формулы рекурсивно определяется следующим образом:
- атом – это формула;
- если G и H – формулы, то (~G), ($G \wedge H$), ($G \vee H$), ($G \rightarrow H$) и ($G \leftrightarrow H$) – формулы.
- если G – формула и x – переменная, то ($\forall$x)G, ($\exists$x)G – формулы.
- других формул нет.

Символизация естественного языка средствами логики предикатов

- Пусть R(x) обозначает «x есть рациональное число», а Q(x) – «x есть действительное число», тогда предложение «каждое рациональное число есть число действительное» можно переформулировать в такое: «для любого x, если x есть рациональное число, то x есть действительное число» − и символически представить в следующем виде: $(\forall x)(R(x) \to Q(x))$.
- Смысл этого предложения сводится к тому, что множество рациональных чисел является подмножеством множества действительных чисел, что записывается как $R \subseteq Q$. Такая запись является типичной для высказываний «всякое нечто есть то-то».

- рассмотрим утверждение «некоторые действительные числа являются рациональными». Формула, правильно отражающая это предложение, будет иметь вид:

$(\exists x)(Q(x) \land R(x))$.

- Это означает, что пересечение двух множеств действительных и рациональных чисел не является пустым $R \cap Q \neq \varnothing$. Типичная ошибка заключается в том, что, исходя из правильности формализации предложений типа «всякое нечто есть то-то» в виде

$(\forall x)(R(x) \to Q(x))$,

- делается ошибочное предположение в правильности формализации предложения типа «некоторое нечто есть то-то» формулой

$(\exists x)(Q(x) \to R(x))$.

- И еще одно предложение ошибочно – «не каждое действительное число есть число рациональное», что может быть прочтено как «не верно, что каждое действительное число является рациональным», формальная запись которого выглядит так:

$\sim((\forall x)(Q(x) \to R(x)))$.

- Переформулировав это предложение еще и как «существуют числа, которые являются действительными, но не являются рациональными», можно это же предложение представить и в виде такой формулы:

$(\exists x)(Q(x) \land \sim R(x))$.

- Формулы логики предикатов могут быть интерпретированы, т. е. им может быть приписано истинностное значение.
- Однако наличие термов требует присвоения и им значения из предметной области. Таким образом, интерпретация формулы F логики предикатов состоит из непустой предметной области D и задания значений из данной предметной области всем константам, переменным и функциям, встречающимся в формуле F;
- каждому предикату, определенному на D, приписывается либо И, либо Л. Правила интерпретации для неквантифицированных и квантифицированных формул будут следующие: если истинностные значения формул G и H заданы, то истинностные значения формул $(\sim G)$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ и $(G \leftrightarrow H)$ определяются по таблицам истинности

- формула $(\forall x)G$ получит значение И, если значение И получит формула G для каждого x из области D, в противном случае формула G получит значение Л;
- формула $(\exists x)G$ получит значение И, если формула G получит значение И хотя бы для одного x из области D, в противном случае формула G получит значение Л.

- Рассмотрим следующий пример: пусть дана формула $(\forall x)(\exists y)(P(x, a) \rightarrow Q(f(y)))$, в следующей интерпретации: область $D = \{1,2\}$, константа $a = 1$ − функция f принимает следующие значения:

f(1)	f(2)
2	1

оценка для предикатов следующая:

P(1, 1)	P(1, 2)	P(2, 1)	P(2, 2)	Q(1)	Q(2)
И	Л	И	Л	И	Л

- Пусть **x = 1, y = 1**, определим истинностное значение формулы **P(x, a)** → **Q(f(y))** при данных значениях x и y. **P(x, a)** → **Q(f(y)) = P(1, a)** → **Q(f(1)) = P(1, 1)** → **Q(2) = И** → **Л = Л.**
- Положим **y = 2. P(x, a)** → **Q(f(y)) = P(1, a)** → **Q(f(2)) = P(1, 1)** → **Q(1) = И** → **И = И**, т.е. для **x = 1** существует такой y (а именно **y = 2**), что формула **P(1, a)** → **Q(f(y))** принимает значение И.
- Пусть теперь **x = 2, y = 1**, определим истинностное значение формулы **P(x, a)** → **Q(f(y))** при данных значениях x и y.
- **P(x, a)** → **Q(f(y)) = P(2, a)** → **Q(f(1)) = P(2, 1)** → **Q(2) = И** → **Л = Л**. Положим y = 2.
- **P(x, a)** → **Q(f(y)) = P(2, a)** → **Q(f(2)) = P(2, 1)** → **Q(1) = И** → **И = И**. Таким образом, и для **x = 2** существует такой y (а именно **y = 2**), что формула **P(2, a)** → **Q(f(y))** принимает значение И. Так как для всех x из области D существует такое значение y, что формула **P(x, a)** → **Q(f(y))** истинна, то формула **(∀x) (∃y)(P(x, a)** → **Q(f(y)))** истинна в указанной интерпретации.

- Понятие логического следствия формул, определенное для формул логики высказываний, справедливо и в логике предикатов; справедливы здесь и отношения между общезначимостью, противоречивостью и логическим следствием, заданные в виде ТЕОРЕМ 1 и 2. В общем случае язык логики высказываний является подмножеством языка логики предикатов первого порядка. Формула логики высказываний может рассматриваться как формула логики предикатов без кванторов, функций и переменных.
- Формула логики предикатов имеет в общем случае бесконечное число областей интерпретации или предметных областей и, как следствие, бесконечное число интерпретаций, а значит, невозможно доказать противоречивость или общезначимость формулы перебором всех ее интерпретаций.

- Необходимо определить процедуру проверки противоречивости формул логики предикатов. Для решения этой задачи введены еще две нормальные формы: предваренная и сколемовская стандартная, помимо конъюнктивной и дизъюнктивной. Введение нормальных форм позволяет упростить алгоритмы поиска противоречивости формул логики предикатов.

- Предваренной (префиксной) нормальной формой называется формула, состоящая из префикса и матрицы, здесь префикс – это конечная последовательность кванторных комплексов, а матрица – это формула, не содержащая кванторных комплексов, т.е. формула имеет следующий вид:
- $(Q1x1)\ (Q2x2)\ \dots\ (Qnxn)\ M$,
- где $Q\ i$ есть $\forall$ или $\exists$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

- рассмотрим дополнительные пары эквивалентных формул, содержащих кванторы (пусть F и H – это формулы, содержащие переменную x, G есть формула, которая не содержит переменной x, а Q – это $\forall$ или $\exists$):
- 12) $(Qx)F(x) \wedge G = (Qx)(F(x) \wedge G)$;
- $(Qx)F(x) \vee G = (Qx)(F(x) \vee G)$;
- 13) $\sim((\forall x) F (x)) = (\exists x)(\sim F(x))$;
- $\sim((\exists x)F(x)) = (\forall x)(\sim F(x))$.
- 14) $(\forall x)F(x) \wedge (\forall x)H(x) = (\forall x)(F (x) \wedge H(x))$;
- $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)H(x) = (\exists x)(F(x) \vee H(x))$.
- Переменная в формулах логики предикатов может быть переименована. На использовании этого приема основаны обобщающие законы (п. 14) следующие правила преобразования:
- 15. $(Q1x)F(x) \vee (Q2x)H(x) = (Q1x)F(x) \vee (Q2\ z)H(z) = (Q1\ x)\ (Q2z)\ (F\ (x) \vee \vee H(z))$,
- $(Q3x)F(x) \wedge (Q4x)H(x) = (Q3x)F(x) \wedge (Q4\ z)H(z) = (Q3x)\ (Q4z)\ (F\ (x) \wedge \vee H(z))$.

- Любая формула логики предикатов допускает эквивалентную предваренную нормальную форму. Эскиз процедуры преобразования приведен ниже.
- Шаг 1. Исключить логические связки эквиваленции и импликации.
- Шаг 2. Используя законы двойного отрицания, де Моргана и законы под номером двенадцать, пронести знак отрицания внутрь формулы.
- Шаг 3. Если необходимо, то переименовать переменные.
- Шаг 4. Используя остальные законы, вынести кванторы в начало формулы.

- Сколемовской стандартной формой называется формула, находящаяся в предваренной форме, у которой матрица приведена к конъюнктивной нормальной форме. Получить сколемовскую стандартную форму из произвольной формулы логики предикатов можно, используя следующую процедуру.
- Шаг 1. Привести данную формулу к предваренной нормальной форме.
- Шаг 2. Привести матрицу к конъюнктивной нормальной форме.
- Шаг 3. Если квантора существования в префиксе нет, то полученная формула и есть сколемовская стандартная форма, в противном случае выбирается самый левый кванторный комплекс существования в префиксе ($\exists x$).
- Шаг 4. Если никакой квантор всеобщности не стоит в префиксе левее выбранного квантора существования, то, выбрав новую константу a, отличную от других констант, входящих в матрицу, заменим все x в матрице на константу a, вычеркнем кванторный комплекс существования ($\exists x$) из префикса. Перейти на шаг 3.
- Шаг 5. Если в префиксе левее выбранного кванторного комплекса существования ($\exists x$) стоят кванторные комплексы всеобщности ($\forall y1$) ...($\forall y\ m$), т.е. выбранный квантор существования находится в области действия кванторов всеобщности, что означает наличие зависимости x от y1, ...ym , тогда, выбрав новый m-местный функциональный символ f, отличный от других функциональных символов, входящих в матрицу, заменим все x в матрице на функцию f(y1, ...ym), вычеркнем кванторный комплекс существования ($\exists x$) из префикса. Перейти на шаг 3.

- Рассмотрим пример, пусть необходимо получить сколемовскую стандартную форму формулы
- $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall z)(\exists v)((\forall w)Q(z, w) \rightarrow (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $=\sim((\forall x)(\exists y)P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)((\forall w)Q(z, w) \rightarrow (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $=\sim((\forall x)(\exists y)P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)(\sim((\forall w)Q(z, w)) \vee (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $=((\exists x)(\forall y)\sim P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)(\sim((\forall w)Q(z, w)) \vee (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $=(\exists x)(\forall y)(\sim P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)((\exists w)(\sim Q(z, w)) \vee (\exists w)R(z, v, w)) =$
- $=(\exists x)(\forall y)(\sim P(x, y)) \vee (\forall z)(\exists v)(\exists w)(\sim Q(z, w) \vee R(z, v, w)) =$
- $=(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists v)(\exists w)(\sim P(x, y) \vee \sim Q(z, w) \vee R(z, v, w)) =$
- $\{x = a, v = f(y, z), w = g(y, z)\} =$
- $=(\forall y)(\forall z)(\sim P(a, y) \vee \sim Q(z, g(y, z)) \vee R(z, f(y, z), g(y, z)))$.

- Сколемовская стандартная форма – это предваренная форма, префикс которой содержит только кванторы всеобщности. Поэтому удобно префикс опустить, считая, что каждая переменная в матрице управляется квантором всеобщности, а так как конъюнктивная форма – это конъюнкция дизъюнктов, то сколемовскую стандартную форму можно представить в виде множества дизъюнктов.
- Сколемовская стандартная форма – это множество дизъюнктов.
- Например, стандартная форма

$(\forall y)(\forall z)(\sim P(a, y) \vee \sim Q(z, g(y, z)) \vee R(z, f(y, z), g(y, z)))$

может быть представлена множеством

$S = \{\sim P(a, y) \vee \sim Q(z, g(y, z)) \vee R(z, f(y, z), g(y, z))\}$.

Выводы в логических моделях первого порядка

- Формула логики предикатов противоречива в том случае, когда противоречиво множество дизъюнктов, представляющих стандартную форму этой формулы, а противоречиво множество дизъюнктов тогда, когда оно ложно при всех интерпретациях во всех предметных областях.
- Черч и Тьюринг: Не существует общего универсального метода, позволяющего определить общезначимость или противоречивость формулы логики предикатов первого порядка.
- Однако существуют алгоритмы, подтверждающие общезначимость или противоречивость формулы, если формула действительно общезначима или противоречива. Для необщезначимых или непротиворечивых формул алгоритмы в общем случае свою работу не заканчивают.

- Так как рассмотрение всех возможных интерпретаций формулы логики предикатов в общем случае невозможно, Эрбраном была найдена специальная универсальная область интерпретации. Стандартная форма формулы противоречива тогда и только тогда, когда форма ложна при всех интерпретациях в этой области. Называют эту область эрбрановским универсумом, и определяется она для множества дизъюнктов S следующим образом:
- множество констант нулевого уровня H0 состоит из констант, встречающихся в S;
- если S не содержит констант, тогда H0 содержит одну произвольно выбранную константу, допустим, H0 = {c};
- множество констант i-го уровня (i = 1, 2, ..., ∞) определяется как объединение констант уровня i –1 и множества всех термов f(t1 , t2, ..., tn), где f – все функциональные символы, встречающиеся в S, а t 1 , t2, ..., t n − константы уровня i -1; множество H∞ есть эрбрановский универсум множества дизъюнктов S.

- Элементы эрбрановского универсума – это абстрактные объекты, не имеющие конкретной интерпретации. Если во множестве S отсутствуют функции, то эрбрановский универсум всегда конечен и состоит из множества констант. Если же множество S содержит хотя бы одну функцию, то универсум всегда бесконечен.
- Рассмотрим несколько примеров. Пусть множество дизъюнктов $S = \{P(x, y) \lor \sim Q(x, z, u), \sim P(u, y) \lor R(y) \lor Q(x, y, u), S(x)\}$, тогда $H\infty = \{c\}$.
- Для множество дизъюнктов
- $S = \{Q(a, g(y)), P(x, y)\}$, универсум $H\infty = \{a, g(a), g(g(a)), g(g(g(a))), ...\}$.
- Если множество дизъюнктов
- $S = \{\sim P(a, y) \lor \sim Q(z, g(y, z)) \lor R(z, f(y, z), g(y, z))\}$, то
- $H\infty = \{a, g(a, a), f(a, a), g(a, g(a, a)), g(g(a, a), a), g(g(a, a), g(a, a)), g(a, f(a, a)), g(f(a, a), a), g(f(a, a), f(a, a)), f(a, g(a, a)), f(g(a, a), a), f(g(a, a), g(a, a)), ...\}$.

- Эрбрановской интерпретацией, или Н-интерпретацией для множества дизъюнктов S, называется интерпретация, удовлетворяющая следующим условиям: предметной областью является эрбрановский универсум;
- интерпретация отображает все константы из S в соответствующую эрбрановскую константу;
- если f – n-местный функциональный символ и h1, h2, ..., hn – константы эрбрановского универсума, то в эрбрановской интерпретации через f обозначается функция, отображающая (h 1, h2, ..., hn) в f(h1, h2, ..., hn).
- В общем случае эрбрановских интерпретаций на множестве S может быть бесконечно много, так как интерпретации предикатов и функций могут быть выбраны произвольно.

- Пусть множество дизъюнктов
- S = {P(x, y) ∨ ~Q(x, z, u), ~P(u, y) ∨ R(y) ∨ Q(x, y, u), S(x)},
- эрбрановский универсум для этого множества дизъюнктов − H_∞ ={c}.
- Некоторые интерпретации приведены ниже:
- I1 = {P(c, c), Q(c, c, c), R(c), S(c)},
- I3 = {P(c, c), ~Q(c, c, c), R(c), S(c)},
- I2 = {~P(c, c), Q(c, c, c), R(c), S(c)},
- I4 = {P(c, c), Q(c, c, c), ~R(c), S(c)}.
- Так как здесь имеются четыре атома P(c, c), Q(c, c, c), R(c), S(c), то всего существуют $2^4 = 16$ эрбрановских интерпретаций.

- Для множества дизъюнктов S = {Q(a, g(y)), P(x, y)} эрбрановский универсум бесконечен H∞ ={a, g(a), g(g(a)), g(g(g(a))), ...}, и, соответственно, эрбрановских интерпретаций будет бесконечное множество, четыре из них приведены ниже:
- I1 = {P(a, a), Q(a, a), P(a, g(a)), Q(a, g(a)), P(g(a), a), Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), Q(g(a), g(a)), ...},
- I2 = {~P(a, a), Q(a, a), ~P(a, g(a)), Q(a, g(a)), ~P(g(a), a), Q(g(a), a), ~P(g(a), g(a)), ...},
- I3 = {P(a, a), ~Q(a, a), P(a, g(a)), ~Q(a, g(a)), P(g(a), a), ~Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), ...},
- I4 = {~P(a, a), ~Q(a, a), ~P(a, g(a)), ~Q(a, g(a)), ~P(g(a), a), ~Q(g(a), a), ~P(g(a), g(a)), ...}.
- Доказано, что множество дизъюнктов S невыполнимо тогда и только тогда, когда оно ложно при всех своих эрбрановских интерпретациях.

- Для проверки выполнимости множества дизъюнктов необходимо рассматривать только эрбрановские интерпретации.
- Выражение – это терм, множество термов, множество атомов, множество дизъюнктов. Если выражение не содержит переменных, то оно называется основным.
- Основной пример дизъюнкта C множества дизъюнктов S есть дизъюнкт, полученный заменой переменных в C на константы эрбрановского универсума S. Пусть множество дизъюнктов

S = {Q(a, g(y)), P(x, y)}, дизъюнкт C = P(x, y), эрбрановский универсум H_∞ ={a, g(a), g(g(a)), g(g(g(a))), ...}, тогда основной пример C' = P(g(a), a).

- Основной пример выполняется в данной интерпретации тогда и только тогда, когда в этом основном примере существует основная литера, которая есть и в данной интерпретации.

- Пусть множество дизъюнктов S = {Q(a, g(y)), P(x, y)}, дизъюнкт C = P(x, y), основной пример C' = P(g(a), a), шесть интерпретаций:
- I1 = {P(a, a), Q(a, a), P(a, g(a)), Q(a, g(a)), P(g(a), a), Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), Q(g(a), g(a)), ...},
- I2 = {~P(a, a), Q(a, a), ~P(a, g(a)), Q(a, g(a)), ~P(g(a), a), Q(g(a), a), ~P(g(a), g(a)), ...},
- I3 = {P(a, a), ~Q(a, a), P(a, g(a)), ~Q(a, g(a)), P(g(a), a), ~Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), ...},
- I4 = {~P(a, a), ~Q(a, a), ~P(a, g(a)), ~Q(a, g(a)), ~P(g(a), a), ~Q(g(a), a), ~P(g(a), g(a)), ...},
- I5 = {~P(a, a), Q(a, a), P(a, g(a)), Q(a, g(a)), P(g(a), a), Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), ...},
- I6 = {~P(a, a), ~Q(a, a), P(a, g(a)), Q(a, g(a)), P(g(a), a), Q(g(a), a), P(g(a), g(a)), ...},
- тогда основной пример C' выполняется в интерпретации I1, I3, I5, I6 и опровергается в I2, I4.

- Дизъюнкт выполняется в данной интерпретации тогда и только тогда, когда каждый основной пример выполняется в данной интерпретации.
- Дизъюнкт опровергается в данной интерпретации тогда и только тогда, когда существует хотя бы один основной пример данного дизъюнкта, который не выполняется в данной интерпретации.
- Вернемся к предыдущему примеру, дизъюнкт C = P(x, y) выполняется в интерпретации I1, I3 и опровергается в I2, I4, I5, I6.
- Множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда для каждой интерпретации существует хотя бы один основной пример дизъюнкта, невыполнимый в данной интерпретации.

- Пусть S = {P(x) ∨ ~Q(x), ~P(x), Q(x)}, на данном множестве дизъюнктов существуют четыре интерпретации:
- I1 = {P(c), Q(c)},
- I2 = {~P(c), Q(c)},
- I3 = {P(c), ~Q(c)},
- I4 = {~P(c), ~Q(c)}.
- В интерпретации I 1 опровергается дизъюнкт ~P(x); дизъюнкт P(x) ∨ ~Q(x) опровергается в интерпретации I2; интерпретация I3 опровергает дизъюнкт Q(x); этот же дизъюнкт Q(x) опровергается в интерпретации I4. Рассматриваемое множество дизъюнктов невыполнимо, потому что оно опровергается во всех интерпретациях.
- Теорема Эрбрана. Множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует конечное невыполнимое множество основных примеров дизъюнктов указанного множества.

- Рассмотрим предыдущий пример, $S = \{P(x) \vee \sim Q(x), \sim P(x), Q(x)\}$, приведенное множество дизъюнктов невыполнимо потому, что существует следующее невыполнимое множество основных примеров:
- $S' = \{P(c) \vee \sim Q(c), \sim P(c), Q(c)\}$.
- На основе теоремы Эрбрана может быть создана компьютерная процедура, генерирующая множества основных примеров и проверяющая их невыполнимость. Одним из первых, кто осуществил это, был П. Гилмор. Он в 1960 году написал компьютерную программу, которая порождала множества основных примеров, полученных заменой переменных во множестве дизъюнктов на константы эрбрановского универсума. Так как множество основных примеров – это конъюнкция дизъюнктов, не содержащих переменных (по сути, это высказывания), то можно воспользоваться любым из восьми способов проверки противоречивости данного множества при условии, что множество основных примеров конечно.

- Процедуры поиска опровержения, основанные на теореме Эрбрана, имеют один существенный недостаток – они требуют генерации множеств S'1, S'2, ..., S'n, ... основных примеров рассматриваемого множества дизъюнктов S. Очень часто размерность множеств основных примеров растет экспоненциально, по этой причине такие процедуры не имеют практического применения на современных компьютерах. И только с появлением метода резолюций, разработанного Дж. Робинсоном, были найдены эффективные компьютерные процедуры доказательства невыполнимости множества дизъюнктов. Идея метода Робинсона состоит в том, чтобы работать напрямую с дизъюнктами, входящими в рассматриваемое множество, не порождая основных примеров

- Реализация метода резолюций требует применения операции унификации. Но прежде чем объяснить эту операцию, дадим определение понятия подстановки.
- Подстановка – это конечное множество вида $\{v1 = t1, v2 = t2, ..., vn = tn\}$, где vj – это переменная, а tj – это терм, отличный от vj, причем все vj отличны друг от друга.
- Унифицировать два или более выражений − значит найти такую подстановку, которая делает выражения одинаковыми (тождественными). Такая подстановка называется унификатором.

- Рассмотрим два выражения P(x, a, f(a, g(y))) и P(h(v), z, f(z, u)).
- Они не тождественны, однако, если применить к ним операцию унификации с подстановкой {x = h(v), z = a, u = g(y)}, то получим два тождественных выражения P(h(v), a, f(a, g(y))).
- В логическом исчислении удобно работать с дизъюнктами, не содержащими повторяющихся литер. Устранение повторения в результирующем дизъюнкте выполняют с помощью операции склейки. Если две или более литер с одинаковым знаком в дизъюнкте C имеют общий унификатор {v1 = t1, v2 = t2, ..., vn = tn}, то дизъюнкт, полученный из C заменой одновременно всех вхождений переменных vi на термы ti, называется склейкой дизъюнкта C.
- Применение операции унификации и склейки позволяет использовать метод резолюций в логике предикатов первого порядка.

- Унификация производится при следующих условиях :
- 1. Если термы константы, то они унифицируемы тогда и только тогда , когда они совпадают.
- 2. Если в первом дизъюнкте терм переменная, а во втором константа, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется константа
- 3. Если терм в первом дизъюнкте переменная и во втором дизъюнкте терм тоже переменная, то они унифицируемы. При этом переменные заменяется на какую-либо переменную и все их вхождения тоже заменяются на эту переменную.
- 4. Если в первом дизъюнкте терм переменная, а во втором - употребление функции, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется употребление функции.
- 5. Унифицируются между собой термы, стоящие на одинаковых местах в одинаковых предикатах.

- Пусть C1 и C2 – дизъюнкты, не имеющие общих переменных. Если в дизъюнкте C1 существует литера L 1, а в дизъюнкте C2 существует литера ~L2, и литеры L1 и ~L2 унифицируемы, то, вычеркнув литеры L1 и ~L2 из C1 и C2 соответственно, построим дизъюнкцию оставшихся дизъюнктов, которая называется бинарной резольвентой дизъюнктов
- C1 и C2.
- Рассмотрим пример: пусть C1 = P(x, g(b)) ∨ ~Q(x) и C2 = ~P(a, g(x)) ∨ R(z). Сначала переименуем переменную x в первом дизъюнкте:
- C1 = P(y, g(b)) ∨ ~Q(y). Выберем в дизъюнкте C1 литеру L1=P(y, g(b)) и литеру L2= ~P(a, g(x)) в C2. Литеры L1 и ~L2 имеют общий унификатор {y = a, x = b}, тогда бинарная резольвента имеет следующий вид: ~Q(a))) ∨ R(z).

- Резольвентой дизъюнктов C1 и C2 является одна из следующих резольвент:
- бинарная резольвента C1 и C2;
- бинарная резольвента C1 и склейки C2;
- бинарная резольвента C2 и склейки C1;
- бинарная резольвента склейки C1 и склейки C2.
- Пусть C1 = $\sim P(x, y) \vee \sim P(f(z), z) \vee \sim Q(x, y)$ и C2 = $P(f(g(a)), g(a)) \vee R(a)$. Склейка C1 имеет следующий вид: $\sim P(f(z), z) \vee \sim Q(f(z), z)$.
- Бинарная резольвента склейки C1 и C2 равна $\sim Q(f(g(a)), g(a)) \vee R(a)$.