Белорусский национальный технический университет

Кафедра ЮНЕСКО “Энергосбережение и возобновляемые источники энергии”

ТЕПЛОМАССООБМЕН

Лекция 3. Условия однозначности. Теплопроводность плоской стенки при стационарном тепловом режиме

УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ

Дифференциальное уравнение теплопроводности (ДУТ) выведено из общих законов физики и, следовательно, описывает процессы теплопроводности в любых условиях, т.е. описывает бесчисленное множество явлений.

Для выделения из этого множества какого-то конкретного процесса к ДУТ необходимо присоединить математическое описание всех особенностей именно данного рассматриваемого процесса.

Эти частные особенности называются ***условиями однозначности***, которые включают в себя:

- **геометрические условия** (форма и размеры тела, в котором протекает процесс);
- **физические условия** (свойства тела и окружающей среды: c, λ, ρ, … ; закон распределения внутренних источников теплоты);
- ***краевые условия***
  - **начальные (временн*Ы*е) условия** (распределение температур в теле в начальный момент времени);
  - **граничные условия**, характеризующие взаимодействие тела с окружающей средой (условия на границах тело-среда)

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в описании закона распределения температуры (т.е. температурного поля) внутри тела в начальный момент времени ($\tau=0$).

В общем случае

$$t_{\tau=0}=f(x,y,z).$$

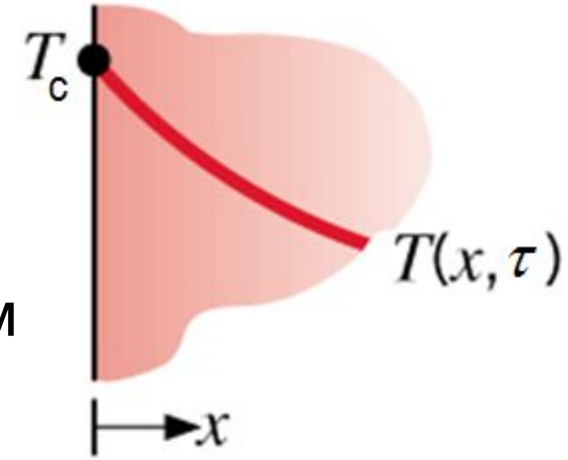
При равномерном начальном распределении температуры в теле ***НУ*** упрощаются

$$t=t_0=const.$$

Пример:

слиток металла, разогретый в кузнечном горне до определенной температуры $\boldsymbol{t_o}$ (на глаз – по цвету), мгновенно погружается в холодную воду, и с этого момента начинается процесс охлаждения (закалка).

ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ **первого рода**
(***ГУ I рода***)



Задаётся распределение температуры на поверхности тела для каждого момента врем

$$t_c = f(x, y, z, \tau).$$

В частном случае, когда температура на поверхности тела является постоянной на протяжении всего процесса, условие упрощается

$$t_c = const.$$

Пример:

тело *нагревается* конденсирующимся паром или *охлаждается* кипящей жидкостью. Температура поверхности тела в любой момент времени может быть принята равной температуре насыщения пара/жидкости ($\boldsymbol{t_s}$ = *const* при $\boldsymbol{p}$ = *const*).

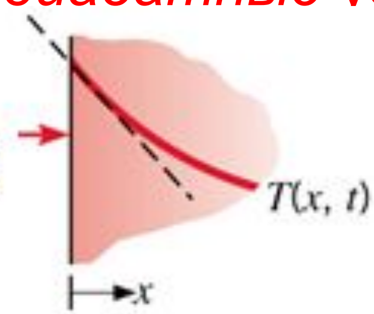
Граничное условие второго рода
(*ГУ II рода*)

Задаётся величина плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела в любой момент времени:

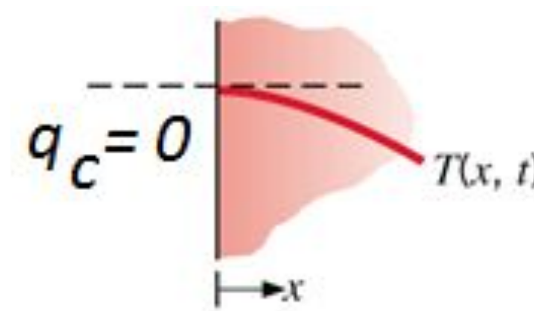
$$q_c = f(x, y, z, \tau) = -\lambda_c \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c .$$

В частном случае, когда плотность теплового потока на *всей поверхности* тела постоянна на протяжении *всего процесса*

$$q_c = -\lambda_c \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = const$$



Адиабатные условия (идеальная изоляция)



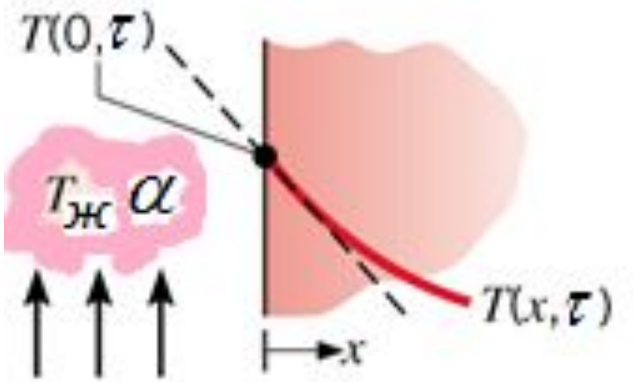
Пример: электрообогрев тела поверхностным нагревателем;

Граничное условие третьего рода
(*ГУ III рода*)

Задаются: температура окружающей среды и закон конвективного теплообмена между телом и средой (коэффициент теплоотдачи α)

$$q_{жс} = \alpha_c \left(t \quad - t \quad \right) = -\lambda_т \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_c$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda_т} \left(t_{ж} - t_c \right)$$



Индексы: "с" – поверхность тела (x=0), "т" – тело, "ж" – жидкость.

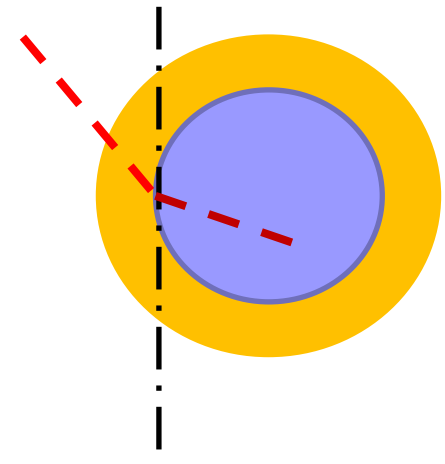
Данное условие является частным выражением ***закона сохранения энергии*** для поверхности тела: количество теплоты, которое подводится к поверхности тела от жидкости в процессе теплоотдачи, равняется количеству теплоты, отводимому теплопроводностью от поверхности внутрь тела.

Обычно принимают $\alpha \approx const$ на всей поверхности.

Граничное условие четвёртого рода
(*ГУ IV рода; сопряжённая задача*)

Применяется для расчёта теплового взаимодействия между телами или телом и средой в случаях, когда ГУ 1-3 рода сформулировать не удаётся.

При идеальном тепловом контакте должны соблюдаться условия равенства температур и плотностей тепловых потоков на границе раздела



$$t_{1,\text{г}} = t_{2,\text{г}}$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_{\text{г}} = \lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_{\text{г}} + q_v$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_{\text{г}} = \lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_{\text{г}} \qquad (q_v = 0)$$

Индексы: "г" – граница раздела тел (n=0), "1" и "2" – номера тел.

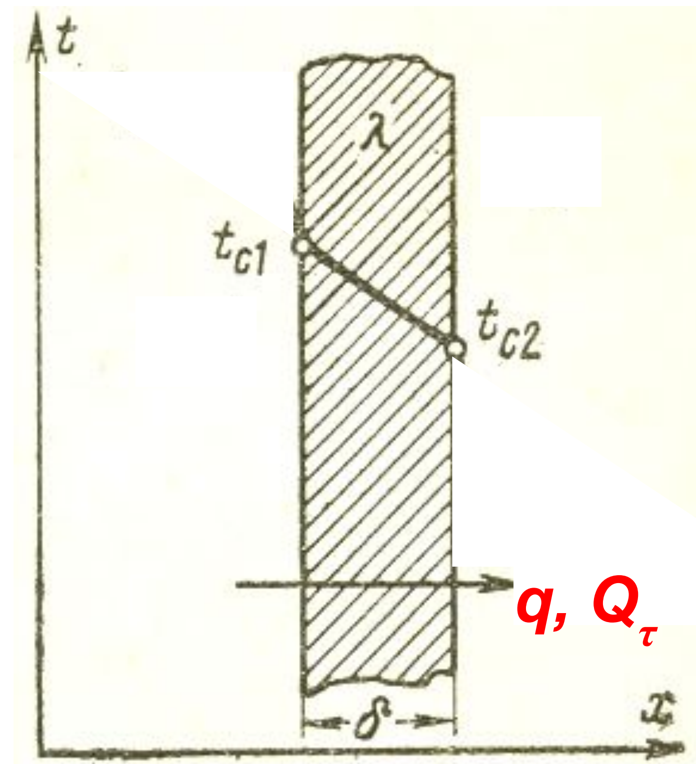
Сопряжённая задача сводится к нахождению температурных полей по обе стороны от границы раздела.

Стационарная теплопроводность плоской стенки (пластины) при ГУ I рода и $q_v = 0$

Рассматривается безграничная однородная плоская стенка с известными свойствами ($\lambda = const$), площадью поверхности F и толщиной δ << высоты и ширины пластины.

На наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянные температуры t_{c1} и t_{c2}. В этих условиях температура изменяется только по толщине пластины – одномерная задача (1D-problem)

Определить температурное поле в стенке, плотность теплового потока и количество теплоты, переносимой через стенку теплопроводностью.



Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}$$

Уравнение Фурье ($q_v = 0$)

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t$$

Уравнение Пуассона (стационарная задача)

$$a\nabla^2 t + \frac{q_\mathrm{v}}{c\rho} = 0$$

Уравнение Лапласа (стационарная задача, $q_v = 0$, $a = const$)

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a\nabla^2 t = 0$$

$$\nabla^2 t = 0$$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

Математическая формулировка задачи

Стационарная теплопроводность плоской пластины в отсутствие внутренних источников тепла описывается одномерным [$t = f(x)$] *уравнением Лапласа*

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 0. \qquad (1)$$

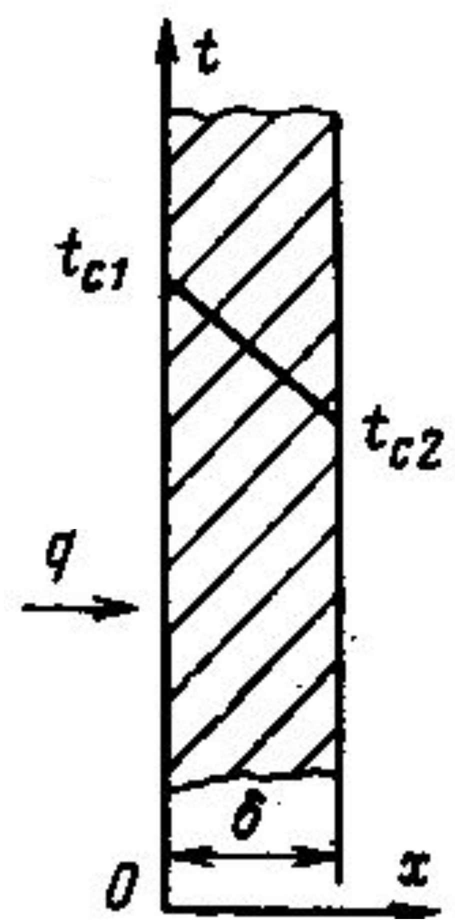
Граничные условия I рода (для обеих поверхностей пластины):

– при x = 0

$$t\big|_{x=0} = t(0) = t_{c1} \qquad (2)$$

– при x = δ

$$t\big|_{x=\delta} = t(\delta) = t_{c2} \qquad (3)$$



Решение задачи

Уравнение (1) и условия (2) и (3) дают полную математическую формулировку рассматриваемой задачи, решение которой – распределение (поле) температур в стенке – находится путём двойного интегрирования ур-я (1).

Первое интегрирование даёт

$$\frac{dt}{dx} = C_{1,} \qquad (4)$$

где C_1 – *постоянная интегрирования*.

Второе интегрирование даёт общее решение

$$t = C_1 x + C_2, \qquad (5)$$

что соответствует ***линейному закону*** изменения температуры по толщине стенки (вдоль оси *0x*).

Последовательно применяя к (5) граничные условия (2) и (3), находим постоянные интегрирования

$$t_{c1} = C_1 0 + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = t_{c1},$$

$$t_{c2} = C_1 \delta + t_{c1} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}.$$

Подстановка значений постоянных интегрирования в *общее* решение (5) приводит к *частному* решению уравнения (1), удовлетворяющему граничным условиям (2) и (3)

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x = t_{c1} - \Delta t \frac{x}{\delta}. \qquad (6)$$

Выражение (6) является уравнением стационарного температурного поля в плоской стенке при ГУ I рода.

Величину $\boldsymbol{\Delta t = (t_{c1} - t_{c2})}$ называют ***температурным напором*** (движущей силой теплопроводности; разностью потенциалов переноса тепла).

Плотность теплового потока в стенке находится по закону Фурье с учётом общего решения (4), связывающего производную температуры с константой C_1

$$\frac{dt}{dx} = C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta},$$

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \frac{\lambda}{\delta}\left(t_{c1} - t_{c2}\right) = \frac{\lambda}{\delta} \Delta t. \qquad (7)$$

Из уравнения для плотности теплового потока (7) следует, что

$$\frac{\left(t_{c1}-t_{c2}\right)}{\delta}=\frac{\Delta t}{\delta}=\frac{q}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = q\frac{\delta}{\lambda}=qR_{\text{тпр}}$$

Подставляя это выражение в ур–е температурного поля (6) получаем

$$t=t_{c1}-\frac{q}{\lambda}x,$$

что при прочих равных условиях температура падает по толщине стенки *тем круче*, *чем выше плотность теплового потока* **q** и/или *ниже коэффициент теплопроводности* $\boldsymbol{\lambda}$ **.**

Полное количество теплоты, переданное через стенку с площадью поперечного сечения ***F*** за время $\boldsymbol{\tau}$, составит

$$Q_\tau = qF\tau=\frac{\lambda}{\delta}\left(t_{c1}-t_{c2}\right)F\tau=\frac{\lambda}{\delta}\Delta t\,F\,\tau.$$

Уравнение температурного поля пластины в безразмерном виде

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x = t_{c1} - \Delta t \frac{x}{\delta}. \qquad (6)$$

В уравнении (6) $\Delta t = (t_{c1} - t_{c2})$ – ***полный*** **температурный напор** или *максимальная избыточная температура* относительно наименьшей температуры пластины t_{c2}.

Аналогичным образом можно определить ***локальный*** **температурный напор** $(t - t_{c2})$ при текущей координате x, отношение которого к Δt даёт ***безразмерную температуру***

$$\Theta \equiv \frac{t - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}}.$$

Входящее в (6) отношение текущей координаты x к толщине пластины представляет собой ***безразмерную координату*** $X \equiv x/\delta$.

С учётом этого уравнение температурного поля легко привести к виду

$$\Theta = 1 - X.$$

Вывод безразмерного уравнения. Уравнение (6) стационарного температурного поля в плоской стенке:

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x = t_{c1} - \Delta t \frac{x}{\delta} = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right)$$

$$t - t_{c1} = -\left(t_{c1} - t_{c2}\right)$$

$$t_{c1} - t = \left(t_{c1} - t_{c2}\right)$$

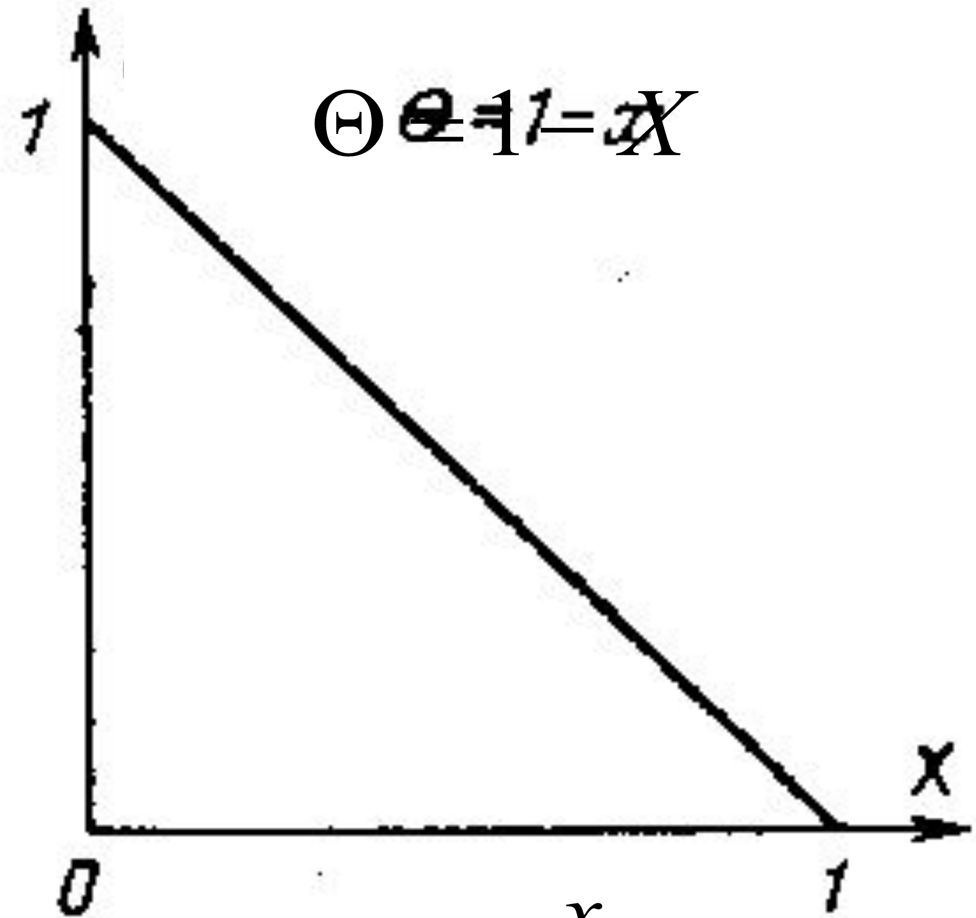
$$\frac{t_{c1} - t}{t_{c1} - t_{c2}} = X \qquad\qquad \Theta \equiv \frac{t - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}}.$$

$$\frac{t_{c1} - t}{t_{c1} - t_{c2}} + \frac{t - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}} = 1 \qquad \Rightarrow \frac{t_{c1} - t}{t_{c1} - t_{c2}} = 1 - \Theta$$

$$1 - \Theta = X \quad \Rightarrow \quad \Theta = 1 - X$$

Графическое представление распределения температуры *в безразмерном виде*

$$\Theta = 1 - X$$



$$\Theta \equiv \frac{t - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}}$$

$$X \equiv \frac{x}{\delta}$$

Учет зависимости λ от температуры

Предполагаем, что зависимость к-та теплопроводности от температуры линейна

$$\lambda(t)=\lambda_0(1+bt)$$

Тогда закон Фурье принимает вид (стационарная 1D задача)

$$q=-\lambda_0(1+bt)\frac{dt}{dx}, \qquad (a)$$

Разделим переменные и проинтегрируем (a) по x в пределах от **0** до **δ** и по температуре от t_{c1} до t_{c2}

$$\int_0^{\delta} q\,dx=-\int_{t_{c1}}^{t_{c2}}\lambda_0(1+bt)\,dt$$

$$q\delta=\lambda_0(t_{c1}-t_{c2})+\lambda_0 b\frac{\left(t_{c1}{}^2-t_{c2}{}^2\right)}{2}=\lambda_0\left[1+b\frac{(t_{c1}+t_{c2})}{2}\right](t_{c1}-t_{c2})$$

Среднеинтегральное значение λ в рассматриваемом интервале температур (теорема о среднем)

$$\lambda_{cp}=\frac{1}{t_{c1}-t_{c2}}\int_{t_{c1}}^{t_{c2}}\lambda(t)\,dt$$

Т. обр.,

$$q = \frac{\lambda_{cp}}{\delta}\left(t_{c1} - t_{c2}\right) = \frac{\lambda_{cp}}{\delta}\Delta t,$$

т.е. плотность теплового потока можно вычислять в предположении $\lambda = const$, принимая его равным ***среднеинтегральному*** значению в рассматриваемом интервале температур

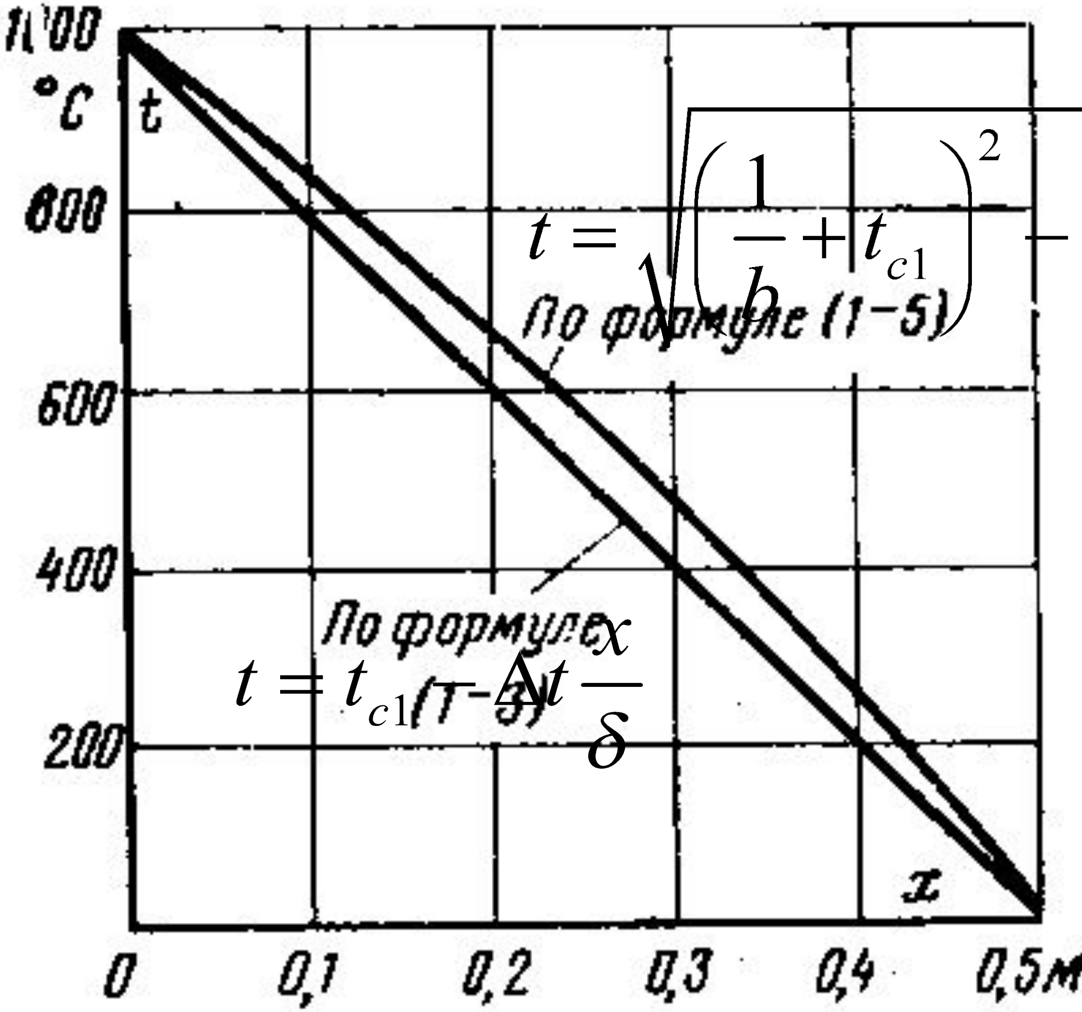
$$\lambda = \lambda_{cp} = \lambda_0\left[1 + b\frac{\left(t_{c1} + t_{c2}\right)}{2}\right] = \lambda_0\left(1 + bt_{cp.арифм}\right)$$

Интегрируя выражение **(а)** в пределах от **0** до текущей координаты x и от t_{c1} до текущей температуры t, можно получить выражение для температурного поля при $\lambda(t)$

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2qx}{\lambda_0 b}} - \frac{1}{b} = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2\lambda_{cp}}{b\lambda_0}\frac{x}{\delta}\Delta t} - \frac{1}{b},$$

которое показывает, что температура в стенке изменяется **не линейно, а по степенной зависимости** $t(x) \sim (A - Bx)^{1/2} - C$.

Распределение температуры в пластине при постоянном и переменном λ



$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2\lambda_{cp}}{b\lambda_0}\frac{x}{\delta}\Delta t} - \frac{1}{b},$$

$$t = t_{c1} - \Delta t\frac{x}{\delta}$$