

Системы непрерывных случайных величин

Плотность распределения

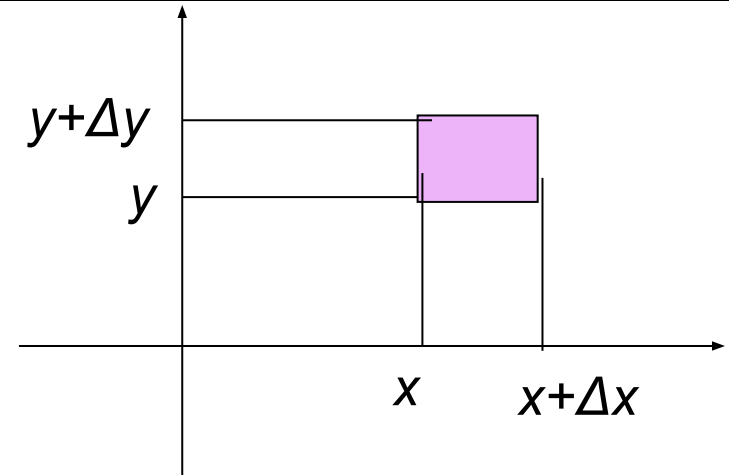
$$P(x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y) = \\ = f(x, y)\Delta x\Delta y + o(\Delta x\Delta y)$$

1. $f(x, y) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

3. $P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$

4. $(f(x, y) \text{ непрерывна}) \Rightarrow f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$



Системы непрерывных случайных величин

Функция распределения

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

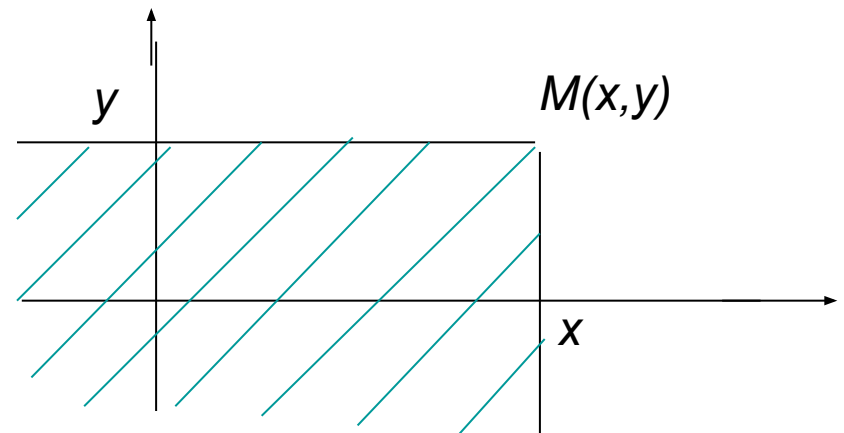
Свойства ф.р.

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

2. $(a < b, c < d) \Rightarrow (F(a, c) \leq F(b, d))$

3. непрерывна



Системы непрерывных случайных величин

Функция распределения

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Свойства ф.р.

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

2. $(a < b, c < d) \Rightarrow (F(a, c) \leq F(b, d))$

3. непрерывна

5. $F(+\infty, +\infty) = 1$

4. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

$$F(+\infty, y) = F_Y(y)$$

$$F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(x, +\infty) = F_X(x)$$

Системы непрерывных случайных величин

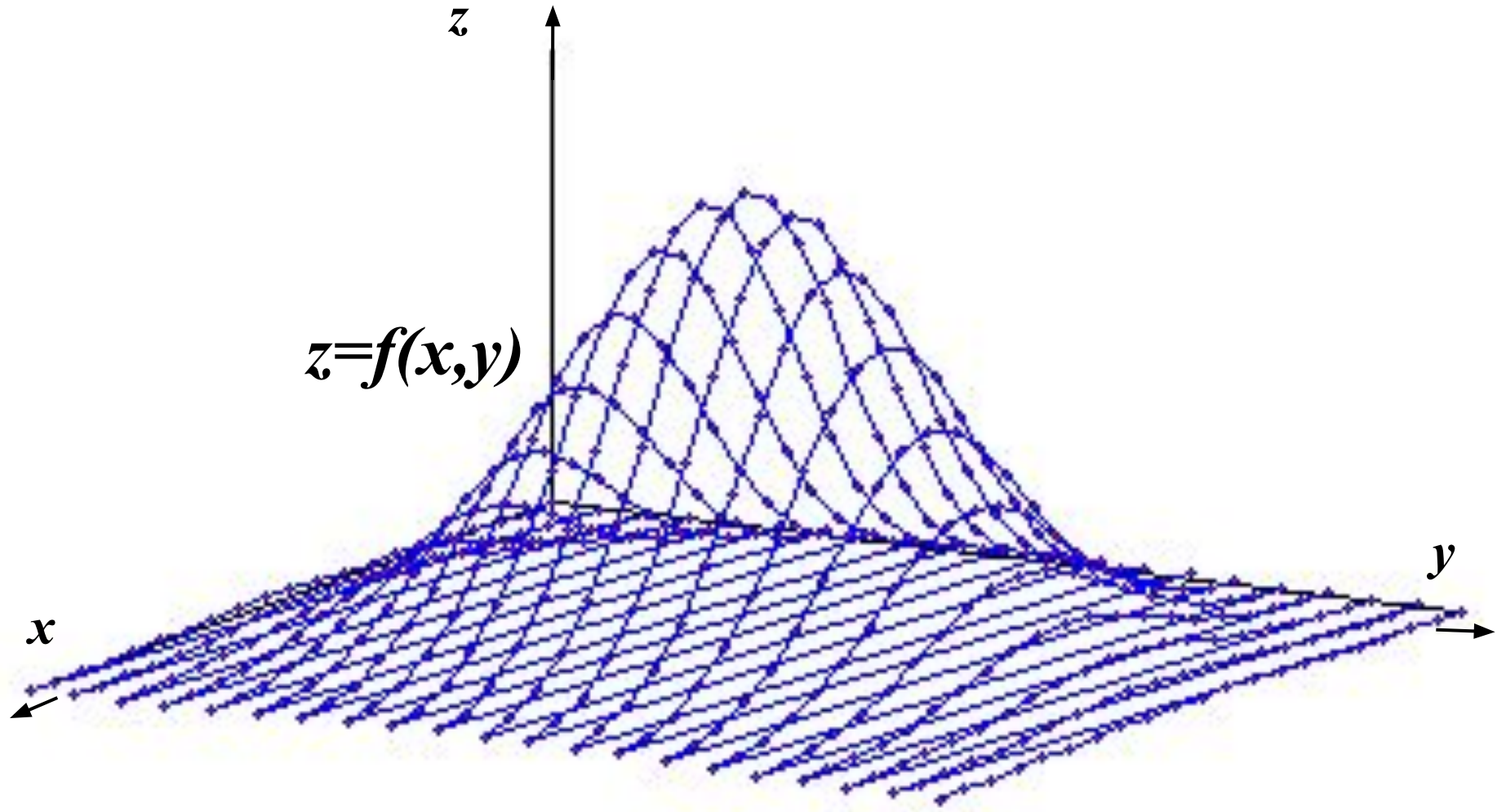
Условный закон распределения

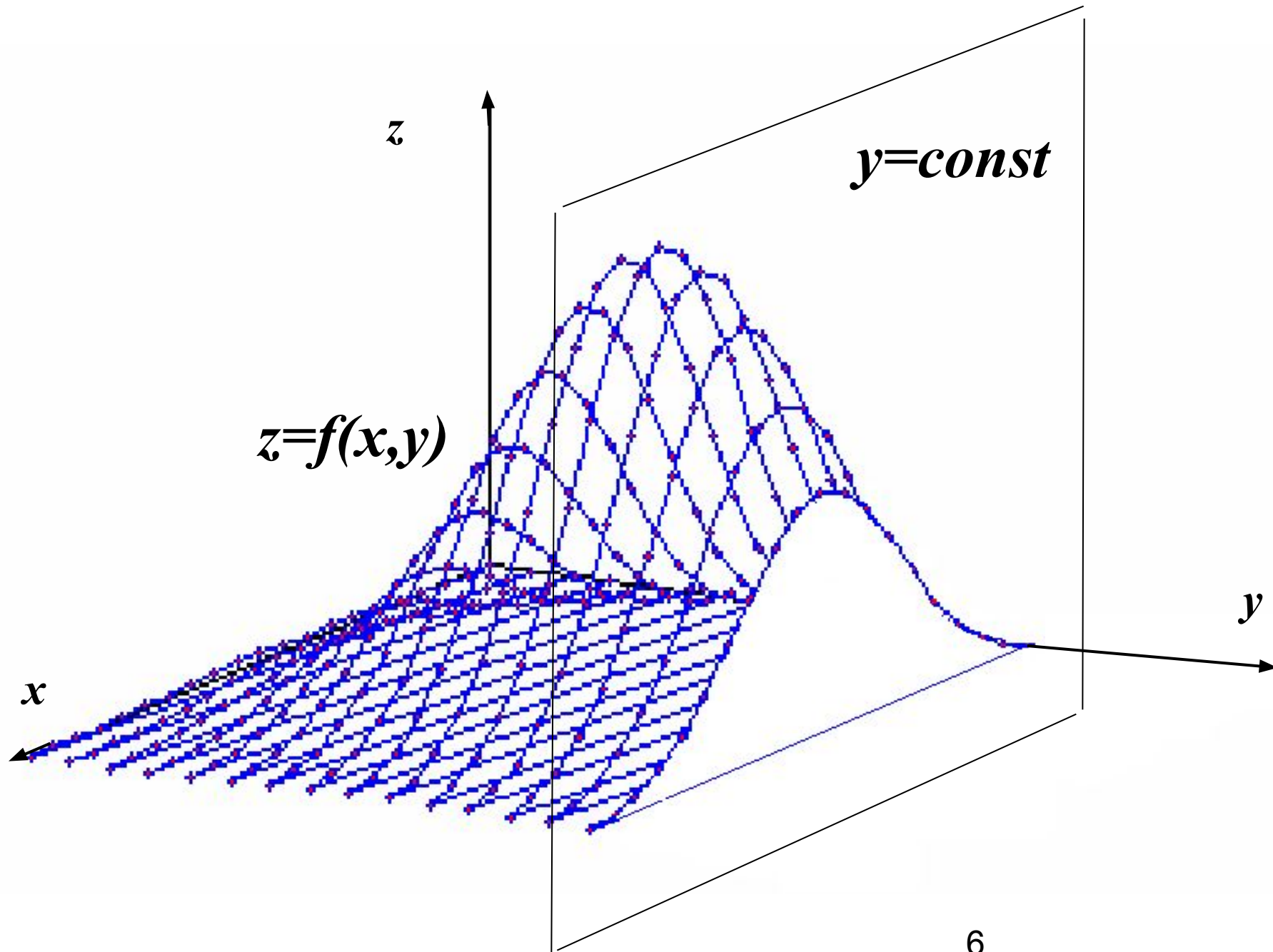
$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

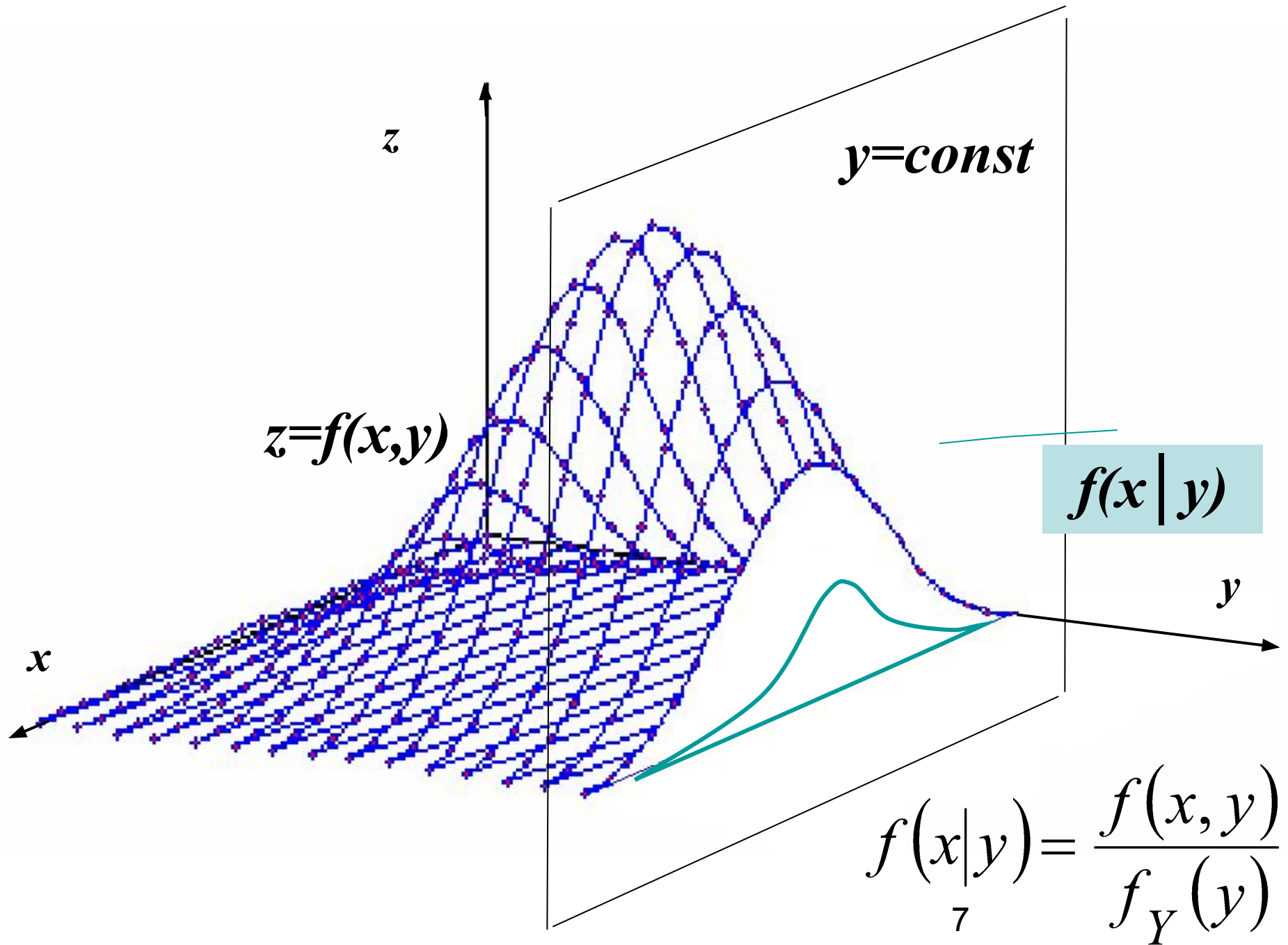
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

Теорема (об умножении плотностей)

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f(y|x) = f_Y(y) \cdot f(x|y)$$







Системы непрерывных случайных величин

Теорема (о независимости компонент системы НСВ) Следующие условия независимости системы двух НСВ эквивалентны:

$$A. F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$Б. f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

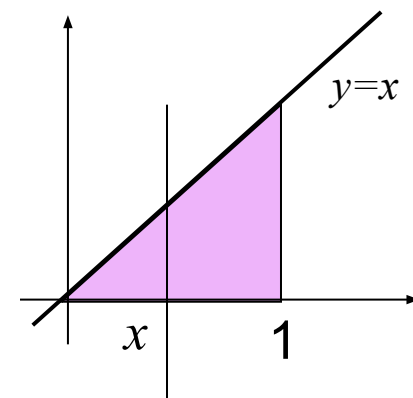
$$B. f(y|x) = f_Y(y)$$

$$Г. f(x|y) = f_X(x)$$

Системы непрерывных случайных величин

Пример. Найти условную плотность распределения $f(y | x)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & \text{и} \ddot{\text{д}} \ddot{\text{е}} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{и} \ddot{\text{д}} \ddot{\text{е}} \quad \text{и} \ddot{\text{н}} \ddot{\text{ò}} \ddot{\text{à}} \ddot{\text{e}} \ddot{\text{ü}} \text{í} \ddot{\text{ü}} \ddot{\text{o}} \quad x < y \end{cases}$$



Решение.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 2 \int_0^x (x + y) dy =$$

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$= 2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^x = 3x^2$$
$$f(y|x) = \frac{2(x + y)}{3x^2} \quad \text{при } 0 \leq y \leq 1$$

(x – произвольное фиксированное из $[0; 1]$)