

# Лекция 3

## Математические модели объектов проектирования

**Математический аппарат  
в моделях  
разных  
иерархических уровней**

# К математическому обеспечению

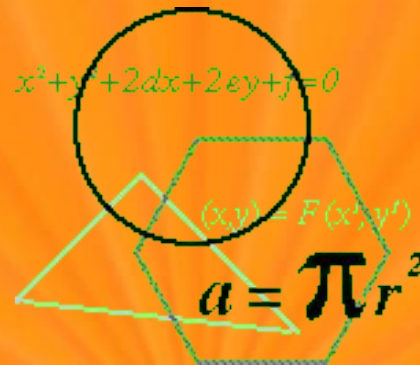
(МО) анализа проектных решений

относят:

- *математические модели,*
- *численные методы,*
- *алгоритмы* выполнения проектных процедур.

5<sup>10784.36</sup>  
2.719372  
9 ÷ 1

Компоненты МО определяются  
**базовым**  
**математическим аппаратом,**  
специфичным для каждого  
иерархического уровня  
проектирования.



На *микроуровне* типичные математические модели (ММ)

представлены

*дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП)*

*вместе с краевыми условиями.*

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\omega}{c\gamma};$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x = \lambda [T - T_c]; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y = \lambda [T - T_c];$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z = \lambda [T - T_c];$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_0 = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_0 = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_0 = 0;$$

$$T(x, y, z, 0) = T_c(x, y, z, 0).$$

Модели микроуровня – *распределенные.*

## Объекты исследования

распределенных ММ :

- ✓ поля физических величин (анализ прочности строительных сооружений или машиностроительных деталей),
- ✓ исследование процессов в жидких средах,
- ✓ моделирование концентраций и потоков частиц
- ✓ и т.п.



Ввиду сложности вычислений при совместном исследовании многокомпонентных сред в практически используемых моделях применяют подход, основанный на принятии определенных допущений.





Допущение,  
выражаемое дискретизацией  
пространства,  
позволяет перейти к моделям  
***макроуровня.***





Модели макроуровня  
(*сосредоточенные*) –  
системы алгебраических и  
обыкновенных дифференциальных  
уравнений  
(независимая переменная - время  $t$ ).



Если число компонентов в исследуемой системе превышает некоторый порог и сложность модели становится чрезмерной, то с соответствующими допущениями переходят на **функционально-логический** уровень.



На функционально-логическом уровне  
используют:

аппарат передаточных функций для  
исследования аналоговых  
(непрерывных) процессов

или

аппарат математической логики  
и конечных автоматов  
для дискретного процесса.

Для исследования наиболее сложных  
объектов

(производственные предприятия и их  
объединения, вычислительные системы и  
сети, социальные системы)

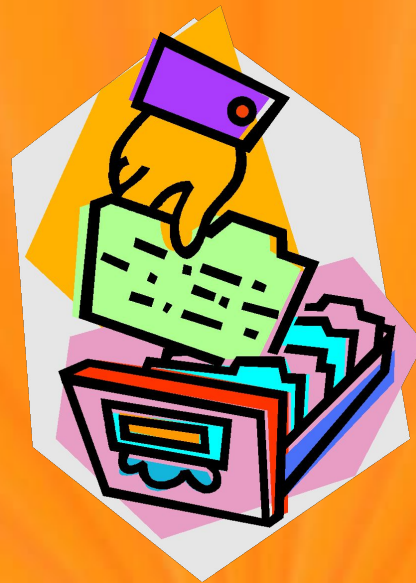
применяют

аппарат теории массового обслуживания.

Возможно использование  
и некоторых других подходов,  
например, сетей Петри.



Такие модели относятся  
к ***системному*** уровню  
моделирования.



**Требования  
к математическим  
моделям и численным  
методам в САПР**

# Основные требования к ММ

## Адекватность

Имеет место, если модель отражает заданные свойства объекта с приемлемой точностью. Оценивается отражаемыми свойствами и областями адекватности. *Область адекватности* — область в пространстве параметров, в пределах которой погрешности модели остаются в допустимых пределах  $\max \varepsilon_{ij} \leq \varepsilon_{\text{доп}}$ .

## Точность

Степень соответствия оценок одноименных свойств объекта и модели.

## Экономичность (вычислительная эффективность)

Определяется затратами ресурсов, требуемых для реализации модели. В ММ экономичность характеризуется затратами машинных времени и памяти.



# **Классификация математических моделей**

# Математическая модель (ММ)

технического объекта

есть совокупность математических объектов и отношений между ними, которая адекватно отображает свойства технического объекта, интересующие инженера, разрабатывающего этот объект.



Выполнение проектных операций и процедур в САПР основано на оперировании ММ.

С помощью ММ:

- прогнозируются характеристики,
- оцениваются возможности предложенных вариантов схем и конструкций,
- проверяется их соответствие предъявляемым требованиям,
- проводится оптимизация параметров,
- разрабатывается техническая документация
- и т. п.

В САПР для каждого иерархического уровня

- сформулированы основные положения математического моделирования,
- выбран и развит соответствующий математический аппарат,
- получены типовые ММ элементов проектируемых объектов,
- формализованы методы получения и анализа математических моделей систем.



Сложность задач проектирования и противоречивость требований высокой точности, полноты и малой трудоемкости анализа обуславливают целесообразность компромиссного удовлетворения этих требований с помощью соответствующего выбора моделей.



Это обстоятельство приводит к расширению множества используемых моделей и развитию алгоритмов адаптивного моделирования.

В проектных процедурах, связанных с функциональным аспектом проектирования, используются ММ, отражающие закономерности процессов функционирования объектов.



Такие модели называют ***функциональными.***



*Типичная функциональная модель*  
представляет собой  
систему уравнений,  
описывающих  
либо электрические, тепловые,  
механические процессы,  
  
либо процессы преобразования  
информации.



В проектных процедурах,  
относящихся к конструкторскому аспекту  
проектирования,  
преобладает использование  
математических моделей, отражающих  
только структурные свойства объекта  
(геометрическую форму, размеры,  
взаимное расположение элементов в  
пространстве).



Такие модели называют ***структурными***.

*Структурные модели*  
представляются в виде  
графов,  
матриц инцидентий и смежности,  
СПИСКОВ И Т. П.



# **Исходные уравнения моделей**

В САПР используются  
**алгоритмические модели.**

Это связано с невозможностью получить аналитические решения систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений при типичных значениях их порядков.



Исходными для формирования ММ объектов на макроуровне являются:

**Компонентные уравнения -**

уравнения, описывающие свойства элементов (компонентов).

Уравнения  
*математических  
моделей элементов  
(ММЭ).*

**Топологические уравнения**

описывают взаимосвязи в составе моделируемой системы

В совокупности  
компонентные и топологические уравнения  
конкретной физической системы  
представляют собой исходную  
***математическую модель системы***  
**(ММС).**



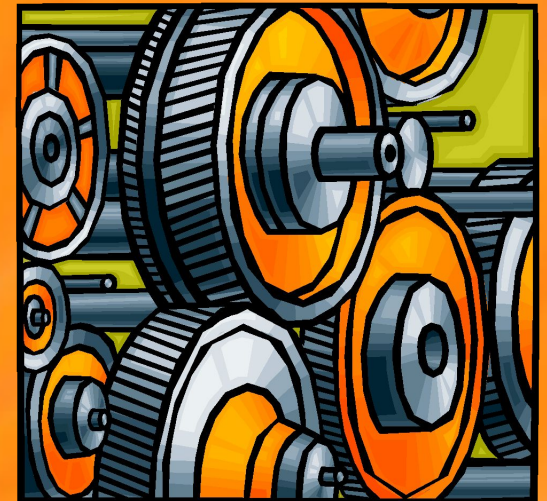
Компонентные и топологические уравнения в системах различной физической природы отражают разные физические свойства, но могут иметь одинаковый формальный вид.



Одинаковая форма записи математических соотношений позволяет говорить о **формальных аналогиях** компонентных и топологических уравнений.

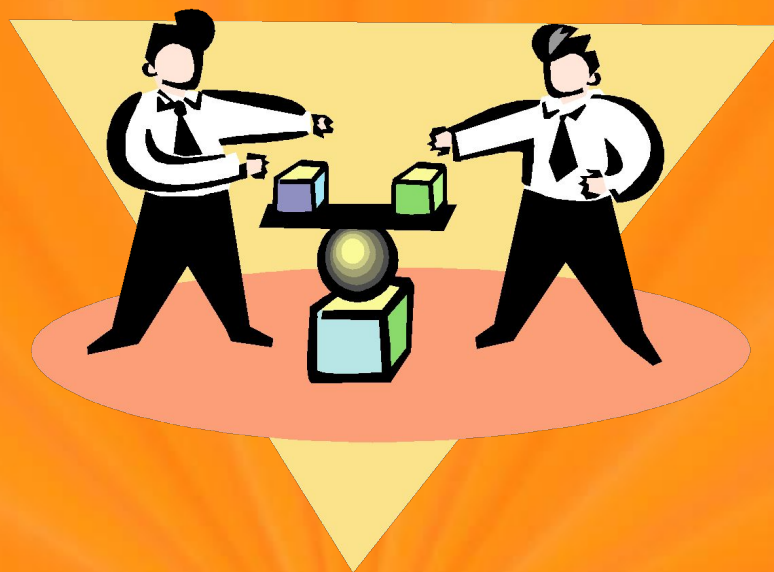


Такие аналогии существуют для механических поступательных, механических вращательных, электрических, гидравлических (пневматических), тепловых объектов.



Наличие аналогий приводит к практически важному выводу:  
**значительная часть алгоритмов формирования и исследования моделей в САПР оказывается инвариантной и может быть применена к анализу проектируемых объектов в разных предметных областях.**

Единство математического аппарата  
формирования ММС особенно удобно  
при анализе систем, состоящих из  
физически разнородных подсистем.



Компонентные уравнения имеют вид:

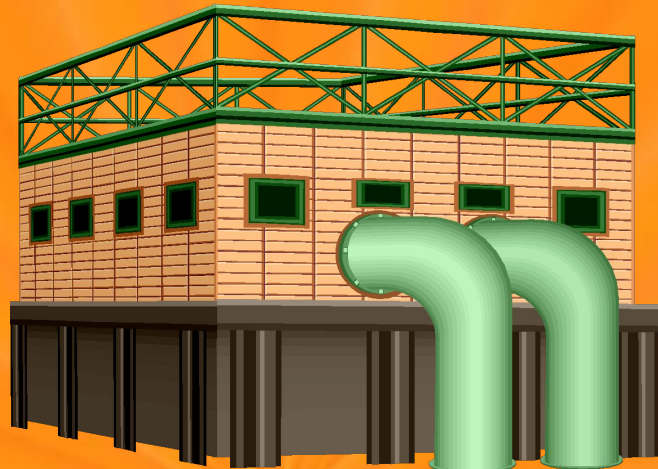
$$F_k \left( dV/dt, V, t \right) = 0,$$

топологические уравнения –

$$F_T (V) = 0,$$

где  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  - вектор фазовых переменных,  $t$  – время.

Различают фазовые переменные двух типов, их обобщенные наименования —  
***фазовые переменные***  
***типа потенциала***  
(например, электрическое напряжение)  
***и типа потока***  
(например, электрический ток).



Каждое *компонентное уравнение* характеризует *связи между разнотипными фазовыми переменными*, относящимися к *одному компоненту*, а *топологическое уравнение* — *связи между однотипными фазовыми переменными в разных компонентах*.



Модели можно *представлять* в виде систем уравнений или в графической форме, если между этими формами установлено взаимно однозначное соответствие.

В качестве графической формы часто используют эквивалентные схемы.





**Пример  
КОМПОНЕНТНЫХ И  
ТОПОЛОГИЧЕСКИХ  
уравнений**

# *Электрические системы*

*Фазовыми переменными* являются электрические напряжения и токи.

*Компонентами систем* могут быть простые двухполюсные элементы и более сложные двух- и многополюсные компоненты.

К простым двухполюсникам относятся следующие элементы:

**сопротивление, емкость и индуктивность,**

характеризуемые одноименными параметрами  $R$ ,  $C$ ,  $L$ .

В эквивалентных схемах эти элементы обозначают в аналогично.



# Компонентные уравнения простых двухполюсников:

для  $R$ :  $u = i \cdot R$  (закон Ома);

для  $C$ :  $i = C \cdot du/dt$ ;

для  $L$ :  $u = L \cdot di/dt$ ,

где  $u$  – напряжение (точнее падение напряжения на двухполюснике),

$i$  – ток.

Уравнения нелинейные (зависимость  $R$ ,  $C$ ,  $L$  от фазовых переменных), параметры  $R$ ,  $C$ ,  $L$  зависят от температуры, возможно наличие более двух полюсов.

Все эти факторы обуславливают сложность моделей, построенных на этих уравнениях.

# **Топологические уравнения** выражают законы Кирхгофа

для напряжений (ЗНК) и токов (ЗТК).

Согласно ЗНК сумма напряжений на компонентах вдоль  
любого замкнутого контура в эквивалентной схеме  
равна нулю,

$$\sum_{k \in K_p} u_k = 0,$$

а в соответствии с ЗТК сумма токов в любом замкнутом  
сечении эквивалентной схемы равна нулю.

$$\sum_{j \in J_p} i_j = 0,$$

где  $K_p$  – множество номеров элементов  $p$ -ого контура,

$J_q$  – множество номеров элементов, входящих в  $q$ -сечение.

Спасибо за внимание!

