

Лекция 3

Математические модели объектов проектирования

**Математический аппарат
в моделях
разных
иерархических уровней**

К математическому обеспечению

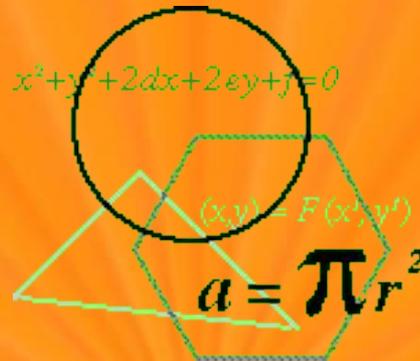
(МО) анализа проектных решений

относят:

- *математические модели,*
- *численные методы,*
- *алгоритмы* выполнения проектных процедур.

5^{10784.36}
2.719372
9 ÷ 1

Компоненты МО определяются
базовым
математическим аппаратом,
специфичным для каждого
иерархического уровня
проектирования.



На *микроуровне* типичные математические модели (ММ)

представлены

дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП)

вместе с краевыми условиями.

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\omega}{c\gamma};$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x = \lambda [T - T_c]; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y = \lambda [T - T_c];$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z = \lambda [T - T_c];$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_0 = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_0 = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_0 = 0;$$

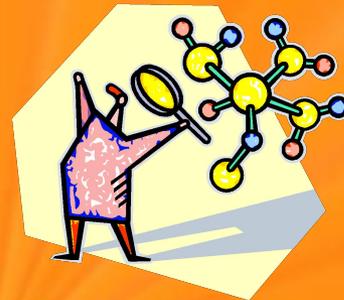
$$T(x, y, z, 0) = T_c(x, y, z, 0).$$

Модели микроуровня – *распределенные.*

Объекты исследования

распределенных ММ :

- ✓ поля физических величин (анализ прочности строительных сооружений или машиностроительных деталей),
- ✓ исследование процессов в жидких средах,
- ✓ моделирование концентраций и потоков частиц
- ✓ и т.п.



Ввиду сложности вычислений при совместном исследовании многокомпонентных сред в практически используемых моделях применяют подход, основанный на принятии определенных допущений.



Допущение,
выражаемое дискретизацией
пространства,
позволяет перейти к моделям
макроуровня.



Модели макроуровня
(*сосредоточенные*) –
системы алгебраических и
обыкновенных дифференциальных
уравнений
(независимая переменная - время t).



Если число компонентов в исследуемой системе превышает некоторый порог и сложность модели становится чрезмерной, то с соответствующими допущениями переходят на **функционально-логический** уровень.



На функционально-логическом уровне
используют:

аппарат передаточных функций для
исследования аналоговых
(непрерывных) процессов

или

аппарат математической логики
и конечных автоматов
для дискретного процесса.

Для исследования наиболее сложных
объектов

(производственные предприятия и их
объединения, вычислительные системы и
сети, социальные системы)

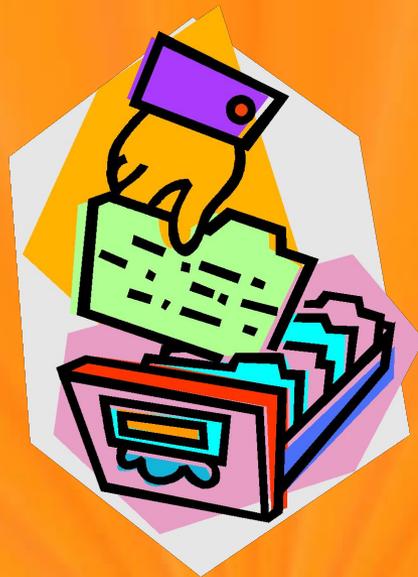
применяют

аппарат теории массового обслуживания.

Возможно использование
и некоторых других подходов,
например, сетей Петри.



Такие модели относятся
к ***системному*** уровню
моделирования.



**Требования
к математическим
моделям и численным
методам в САПР**

Основные требования к ММ

Адекватность

Имеет место, если модель отражает заданные свойства объекта с приемлемой точностью. Оценивается отражаемыми свойствами и областями адекватности. *Область адекватности* — область в пространстве параметров, в пределах которой погрешности модели остаются в допустимых пределах $\max \varepsilon_{ij} \leq \varepsilon_{\text{доп}}$.

Точность

Степень соответствия оценок одноименных свойств объекта и модели.

Экономичность (вычислительная эффективность)

Определяется затратами ресурсов, требуемых для реализации модели. В ММ экономичность характеризуется затратами машинных времени и памяти.

Классификация математических моделей

Математическая модель (ММ)

технического объекта

есть совокупность математических объектов и отношений между ними, которая адекватно отображает свойства технического объекта, интересующие инженера, разрабатывающего этот объект.



Выполнение проектных операций и процедур в САПР основано на **оперировании ММ.**

С помощью ММ:

- *прогнозируются* характеристики,
- *оцениваются* возможности предложенных вариантов схем и конструкций,
- *проверяется* их соответствие предъявляемым требованиям,
- *проводится* оптимизация параметров,
- *разрабатывается* техническая документация
- *и т. п.*

В САПР для каждого иерархического уровня

- сформулированы основные положения математического моделирования,
- выбран и развит соответствующий математический аппарат,
- получены типовые ММ элементов проектируемых объектов,
- формализованы методы получения и анализа математических моделей систем.



Сложность задач проектирования и противоречивость требований высокой точности, полноты и малой трудоемкости анализа обуславливают целесообразность компромиссного удовлетворения этих требований с помощью соответствующего выбора моделей.



Это обстоятельство приводит к расширению множества используемых моделей и развитию алгоритмов адаптивного моделирования.

В проектных процедурах, связанных с функциональным аспектом проектирования, используются ММ, отражающие закономерности процессов функционирования объектов.



Такие модели называют ***функциональными.***

Типичная функциональная модель
представляет собой
систему уравнений,
описывающих
либо электрические, тепловые,
механические процессы,

либо процессы преобразования
информации.

В проектных процедурах,
относящихся к конструкторскому аспекту
проектирования,
преобладает использование
математических моделей, отражающих
только структурные свойства объекта
(геометрическую форму, размеры,
взаимное расположение элементов в
пространстве).



Такие модели называют ***структурными***.

Структурные модели
представляются в виде
графов,
матриц инцидентий и смежности,
СПИСКОВ И Т. П.



Исходные уравнения моделей

В САПР используются
алгоритмические модели.

Это связано с невозможностью получить аналитические решения систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений при типичных значениях их порядков.



Исходными для формирования ММ объектов на макроуровне являются:

Компонентные уравнения -

уравнения, описывающие свойства элементов (компонентов).

Уравнения
*математических
моделей элементов
(ММЭ).*

Топологические уравнения

описывают взаимосвязи в составе моделируемой системы

В совокупности
компонентные и топологические уравнения
конкретной физической системы
представляют собой исходную
математическую модель системы
(ММС).

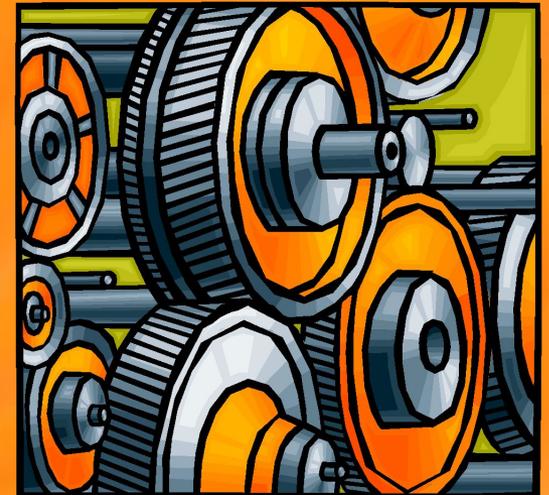


Компонентные и топологические уравнения в системах различной физической природы отражают разные физические свойства, но могут иметь одинаковый формальный вид.



Одинаковая форма записи математических соотношений позволяет говорить о **формальных аналогиях** компонентных и топологических уравнений.

Такие аналогии существуют для механических поступательных, механических вращательных, электрических, гидравлических (пневматических), тепловых объектов.



Наличие аналогий приводит к практически важному выводу:
значительная часть алгоритмов формирования и исследования моделей в САПР оказывается инвариантной и может быть применена к анализу проектируемых объектов в разных предметных областях.

Единство математического аппарата формирования ММС особенно удобно при анализе систем, состоящих из физически разнородных подсистем.



Компонентные уравнения имеют вид:

$$F_k \left(dV/dt, V, t \right) = 0,$$

топологические уравнения –

$$F_T (V) = 0,$$

где $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ - вектор фазовых переменных, t – время.

Различают фазовые переменные двух типов, их обобщенные наименования —
фазовые переменные
типа потенциала
(например, электрическое напряжение)
и типа потока
(например, электрический ток).



Каждое *компонентное уравнение* характеризует *связи между разнотипными фазовыми переменными*, относящимися к *одному компоненту*, а *топологическое уравнение* — *связи между однотипными фазовыми переменными в разных компонентах*.

Модели можно *представлять* в виде систем уравнений или в графической форме, если между этими формами установлено взаимно однозначное соответствие.

В качестве графической формы часто используют эквивалентные схемы.



**Пример
КОМПОНЕНТНЫХ И
ТОПОЛОГИЧЕСКИХ
уравнений**

Электрические системы

Фазовыми переменными являются электрические напряжения и токи.

Компонентами систем могут быть простые двухполюсные элементы и более сложные двух- и многополюсные компоненты.

К простым двухполюсникам относятся следующие элементы:

сопротивление, емкость и индуктивность,

характеризуемые одноименными параметрами R , C , L .

В эквивалентных схемах эти элементы обозначают в аналогично.



Компонентные уравнения простых двухполюсников:

для R : $u = i \cdot R$ (закон Ома);

для C : $i = C \cdot du/dt$;

для L : $u = L \cdot di/dt$,

где u – напряжение (точнее падение напряжения на двухполюснике),

i – ток.

Уравнения нелинейные (зависимость R , C , L от фазовых переменных), параметры R , C , L зависят от температуры, возможно наличие более двух полюсов.

Все эти факторы обуславливают сложность моделей, построенных на этих уравнениях.

Топологические уравнения выражают законы Кирхгофа

для напряжений (ЗНК) и токов (ЗТК).

Согласно ЗНК сумма напряжений на компонентах вдоль
любого замкнутого контура в эквивалентной схеме
равна нулю,

$$\sum_{k \in K_p} u_k = 0,$$

а в соответствии с ЗТК сумма токов в любом замкнутом
сечении эквивалентной схемы равна нулю.

$$\sum_{j \in J_p} i_j = 0,$$

где K_p – множество номеров элементов p -ого контура,

J_q – множество номеров элементов, входящих в q -сечение.

Спасибо за внимание!

