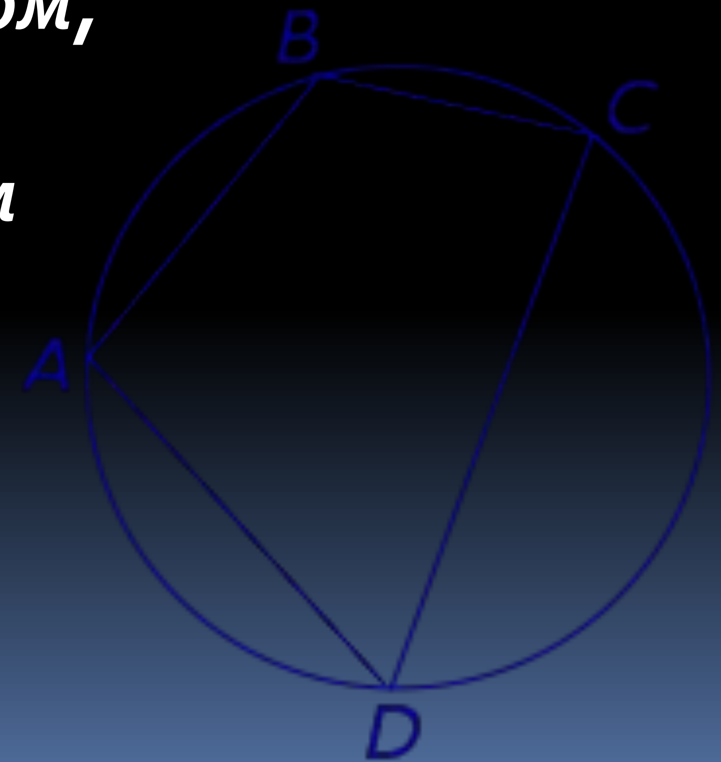
НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ПЛАНИМЕТРИИ

ВПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Окружностью, **описанной** около четырёхугольника, называют окружность, проходящую через все вершины четырёхугольника. В этом случае четырёхугольник называют ***четырёхугольником, вписанным в окружность,*** или ***вписанным четырёхугольником***.



Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы величин его противоположных углов равны 180°.

Доказательство. Угол *ABC* является вписанным углом, опирающимся на дугу *ADC* (рис.1). Поэтому величина угла *ABC* равна половине угловой величины дуги *ADC*. Угол *ADC* является вписанным углом, опирающимся на дугу *ABC*. Поэтому величина угла *ADC* равна половине угловой величины дуги *ABC*. Отсюда вытекает, что сумма величин углов *ABC* и *ADC* равна половине угловой величины дуги, совпадающей со всей окружностью, т.е. равна 180°.

Если рассмотреть углы *BCD* и *BAD*, то рассуждение будет аналогичным.

Если у четырёхугольника суммы величин его противоположных углов равны 180°, то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

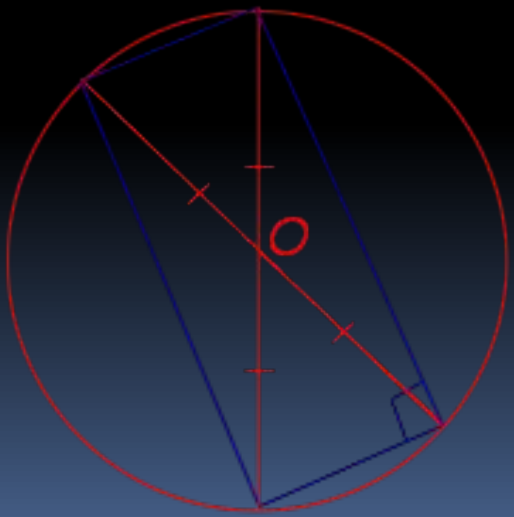
Докажем теорему 2 методом «от противного». С этой целью рассмотрим окружность, проходящую через вершины *A, B и C* четырёхугольника, и предположим, что эта окружность не проходит через вершину *D*. Приведём это предположение к противоречию. Рассмотрим сначала случай, когда точка *D* лежит внутри круга .

Продолжим отрезок *CD* за точку *D* до пересечения с окружностью в точке *E*, и соединим отрезком точку *E* с точкой *A* (рис.2). Поскольку четырёхугольник *ABCE* вписан в окружность, то в силу теоремы 1сумма величин углов *ABC* и *AEC* равна 180°. При этом сумма величин углов *ABC* и *ADC* так же равна 180° по условию теоремы 2. Отсюда вытекает, что угол *ADC* равен углу *AEC*. Возникает противоречие, поскольку угол *ADC* является внешним углом треугольника *ADE* и, конечно же, его величина больше, чем величина угла *AEC*, не смежного с ним.

Случай, когда точка *D* оказывается лежащей вне круга, рассматривается аналогично.

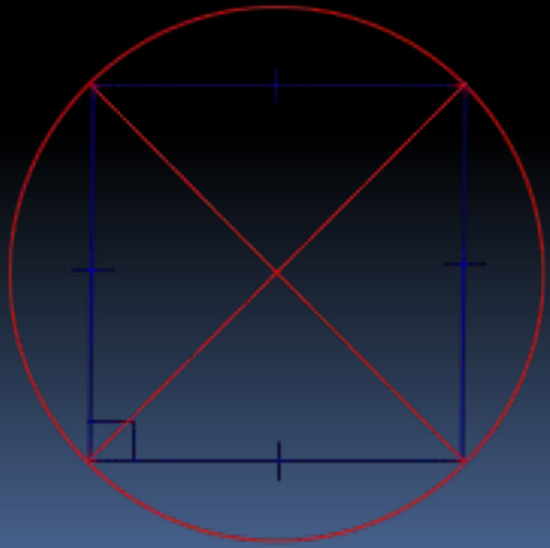
Окружность, описанная около параллелограмма

Окружность можно описать около параллелограмма тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.



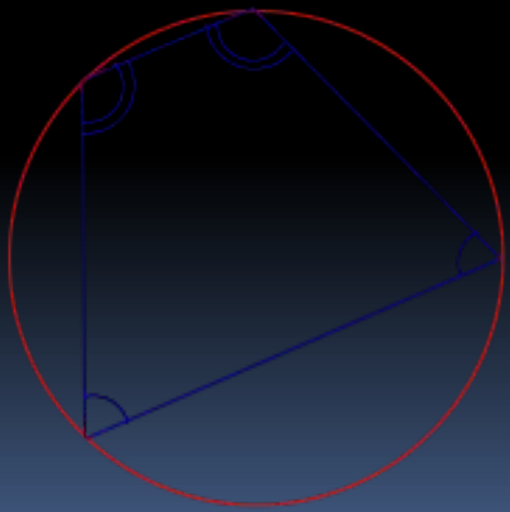
Окружность, описанная около ромба

Окружность можно описать около ромба тогда и только тогда, когда ромб является квадратом.



Окружность, описанная около трапеции

Окружность можно описать около трапеции тогда и только тогда, когда трапеция является равнобедренной трапецией.

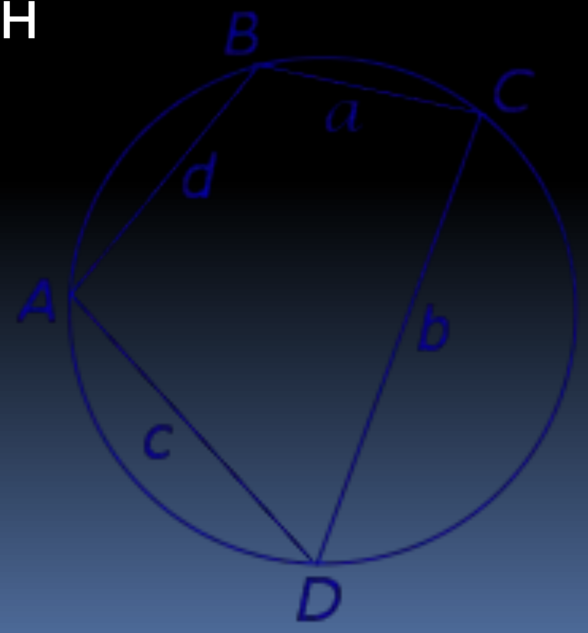


Произвольный вписанный четырёхугольник

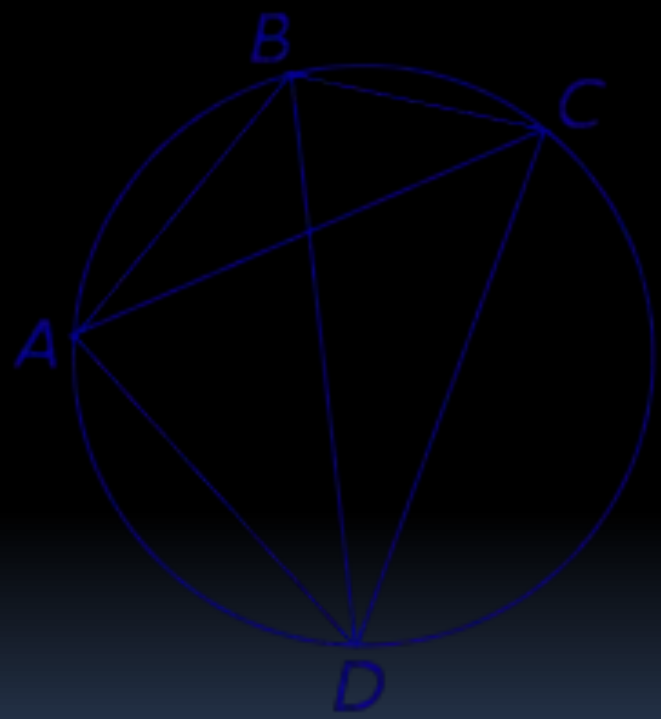
Площадь произвольного вписанного четырёхугольника можно найти по формуле Брахмагупты: S=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) и корень из этого всего

где a, b, c, d – длины сторон четырёхугольника,

а p – полупериметр, т.е.



Теорема Птолемея. Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$