

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение г. Костромы
«Средняя общеобразовательная школа №3
с углублённым изучением отдельных предметов»

**Электронное
обучающее пособие
по теме:
«Числовые функции.
Графики числовых функций»**

Кострома 2017

Числовая функция

- Определение:

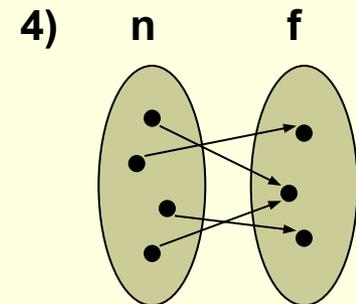
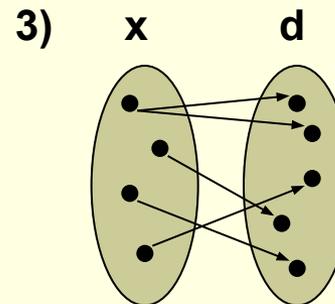
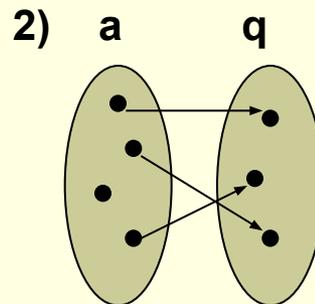
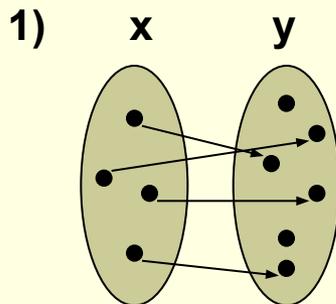
числовой функцией называется соответствие (зависимость), при котором каждому значению одной переменной сопоставляется по некоторому правилу единственное значение другой переменной.

- Обозначение:

латинскими (иногда греческими) буквами / f , q , h , y , p и т.д./

- Задание:

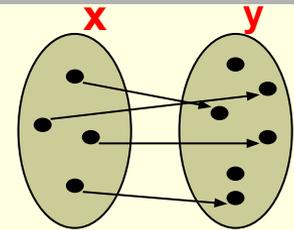
определите, какая из данных зависимостей является функциональной



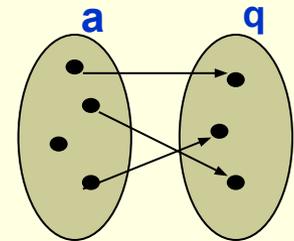
Для появления новой информации выполняйте щелчок левой кнопкой мыши

Правильные ответы

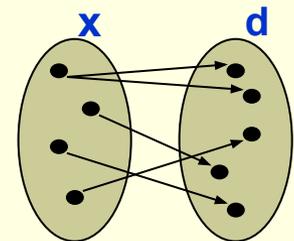
1. **Является** функциональной зависимостью, т.к. каждому значению переменной x ставится в соответствие единственное значение переменной y



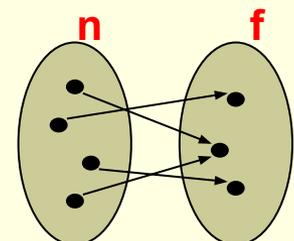
2. **Не является** функциональной зависимостью, т.к. не каждому значению переменной a ставится в соответствие единственное значение переменной q



3. **Не является** функциональной зависимостью, т.к. одному из значений переменной x ставится в соответствие 2 значения переменной d



4. **Является** функциональной зависимостью, т.к. каждому значению переменной n ставится в соответствие единственное значение переменной f



Рассмотрим произвольную функцию $y=f(x)$

	Переменная x	Переменная y
Название переменной	независимая аргумент	зависимая функция
Числовые значения переменной	значения аргумента (выбираются произвольно)	значения функции f в точке x : $f(x)$ (зависят от x)
Множество всех допустимых значений переменной образует	область определения функции $D(f)$ или $D(y)$	область значений функции для $x \in D(f)$ $E(f)$ или $E(y)$

Примеры

1. Функция задана формулой $y = \frac{1}{x^2 - 9}$

Рассмотрим выражение, стоящее справа: $\frac{1}{x^2 - 9}$

□ так как выражение имеет смысл при всех значениях переменной, кроме $x = -3$, $x = 3$, поэтому $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$

□ так как числитель дроби не может быть равен 0, поэтому

$$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

2. Функция задана формулой $y = 3\sin\alpha - 5$

□ так как выражение $3\sin\alpha - 5$ имеет смысл при всех значениях α , поэтому $D(y) = \mathbb{R}$

□ так как $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$, то $-3 \leq 3\sin\alpha \leq 3$, следовательно $-8 \leq 3\sin\alpha - 5 \leq -2$, поэтому $E(y) = [-8; -2]$

3. Функция задана формулой $y = \sqrt{x - 1}$

□ так как выражение $\sqrt{x - 1}$ имеет смысл при $x - 1 \geq 0$, т.е. при $x \geq 1$, поэтому $D(y) = [1; +\infty)$

□ так как выражение $(x - 1)$ стоит под знаком арифметического квадратного корня, поэтому $E(y) = [0; +\infty)$

Числовые функции

целые

$$f(x) = p(x),$$

где $p(x)$ – некоторое выражение

примеры:

- $f(x) = 8x^5 - 7x^4 + 3x - 2$ $D(y) = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{x^3 + 8}{2}$ или $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 4$ $D(y) = \mathbb{R}$
- $f(x) = \sqrt{x + 4}$ $D(y) = [-4; +\infty)$

дробные

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

где $p(x), q(x)$ – некоторые выражения,
 $D(f): q(x) \neq 0$

примеры:

- $f(x) = \frac{2 - x}{x^3 + 8}$ $D(y) = \mathbb{R}, x \neq -2$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$ $D(y) = (-4; +\infty)$
- $f(x) = \frac{9x^5 - 8x^2 + 4}{x^3 - 6x^2 + 5x}$ $D(y) = \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq 1, x \neq 5$

График функции

- **Графиком функции** f называют множество всех точек $(x;y)$ координатной плоскости, где $y = f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции.
- Помножество координатной плоскости является графиком какой-либо функции, если оно имеет не более одной общей точки с любой прямой, параллельной оси Oy .
- Задание:
определите, какой из данных графиков является графиком функции

Рис.1

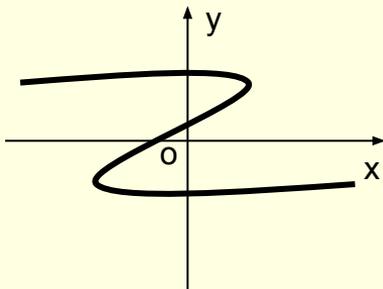


Рис.2

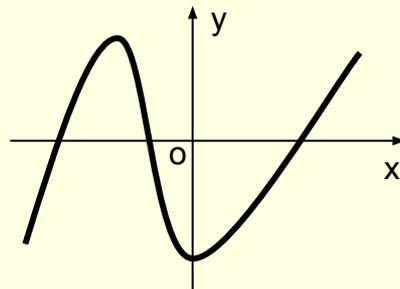


Рис.3

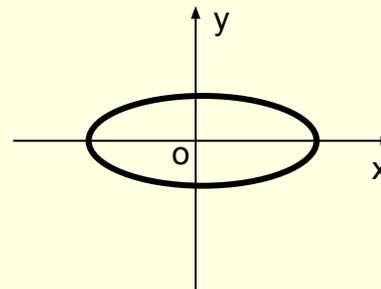
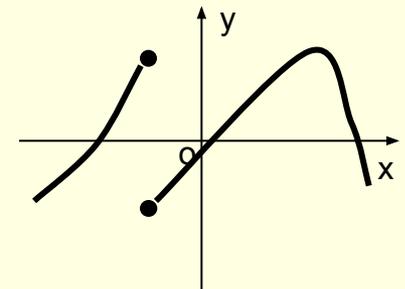


Рис.4



Правильные ответы

Рис.1 **не является графиком функции**, т.к. существуют прямые, параллельные оси Oy , имеющие более одной общей точки с линией графика

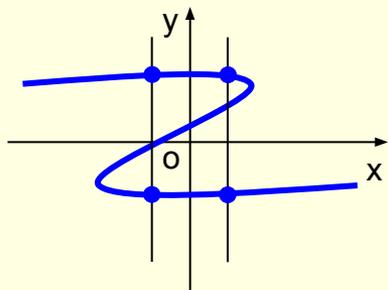


Рис.2 **является графиком функции**, т.к. любая прямая, параллельная оси Oy , имеет не более одной общей точки с линией графика

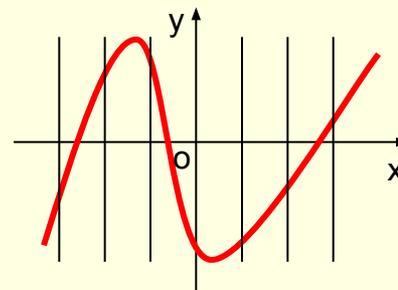


Рис.3 **не является графиком функции**, т.к. существуют прямые, параллельные оси Oy , имеющие более одной общей точки с линией графика

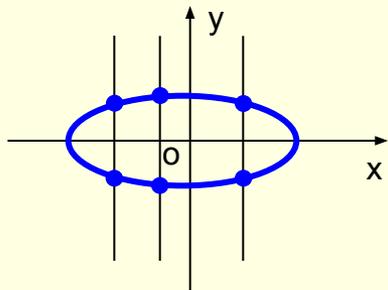
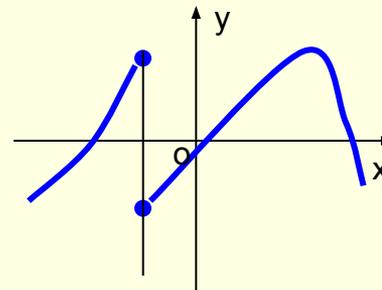


Рис.4 **не является графиком функции**, т.к. существует прямая, параллельная оси Oy , имеющая более одной общей точки с линией графика

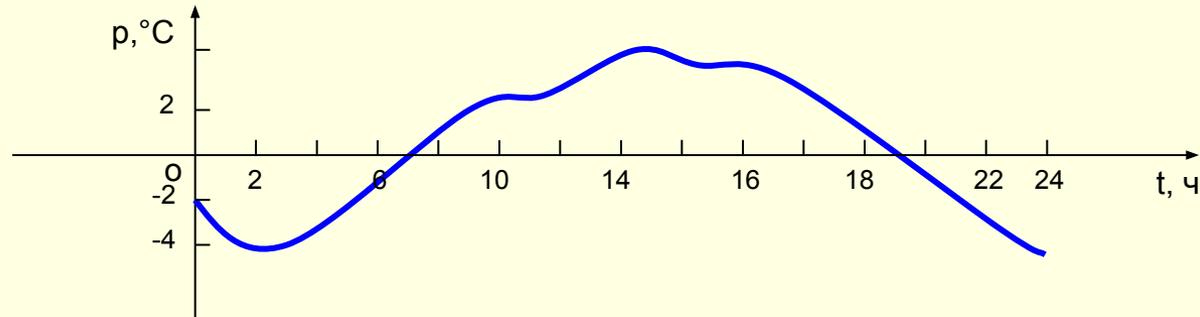


Способы задания функций

■ Формула

$$f(x) = 14x^2 - \sqrt{2x+1} + \sin \alpha$$

■ График



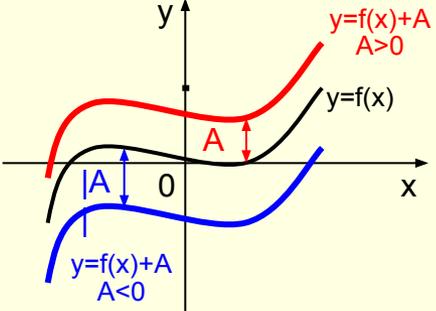
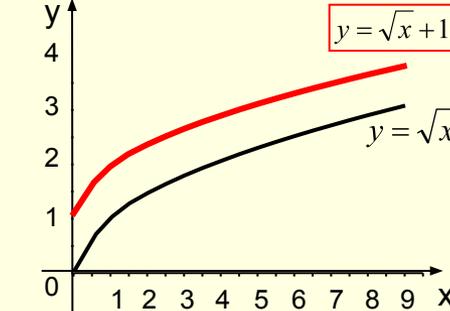
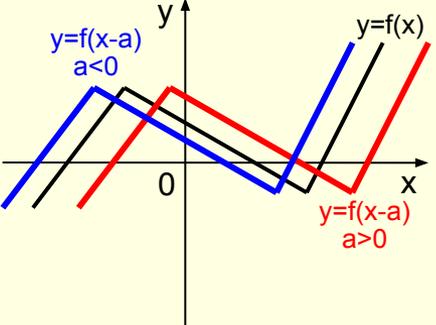
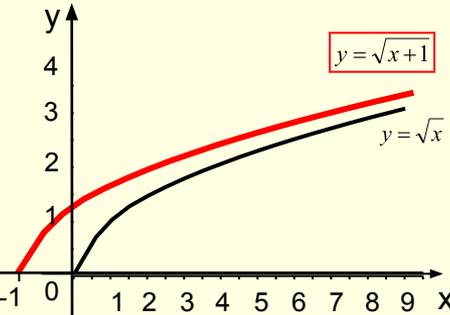
■ Таблица

x	-39	-7,8	-2	0	5,4	9,1	13	$15\frac{2}{5}$
y	2,3	0	-7	4,28	$\frac{7}{8}$	14	-8	5,5

■ Словесное описание

Масса тела m прямо пропорционально зависит от его объёма V при постоянной плотности ρ .

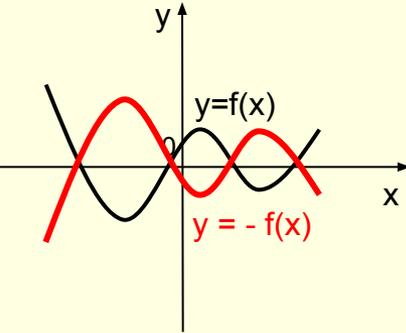
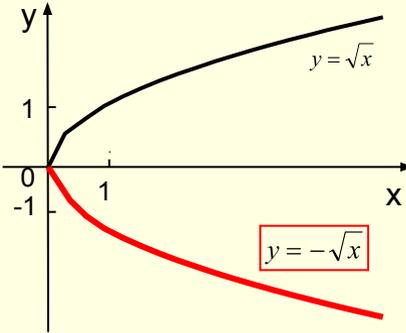
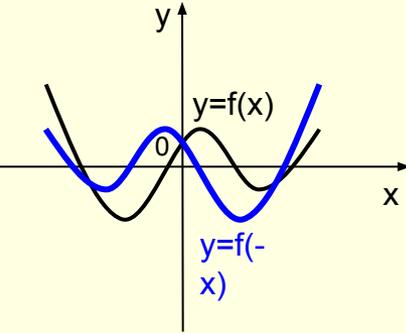
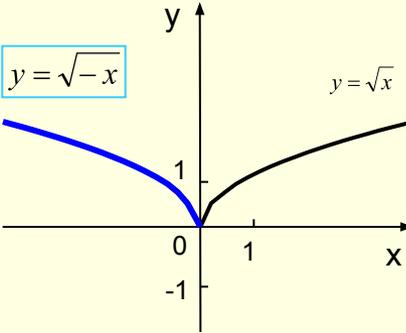
Преобразование графиков функций

Функция	Преобразование графика функции $y=f(x)$	Рисунок	Пример
$y = f(x)+A$	<p>Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy:</p> <ul style="list-style-type: none"> на A единиц вверх, если A > 0; на A единиц вниз, если A < 0 		
$y = f(x-a)$	<p>Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox:</p> <ul style="list-style-type: none"> на a единиц вправо, если a > 0; на a единиц влево, если a < 0 		

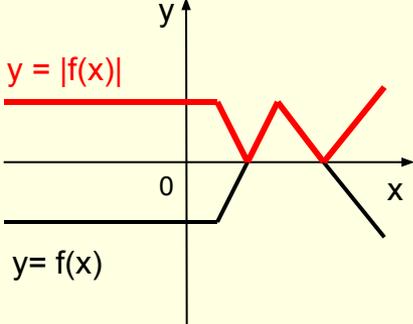
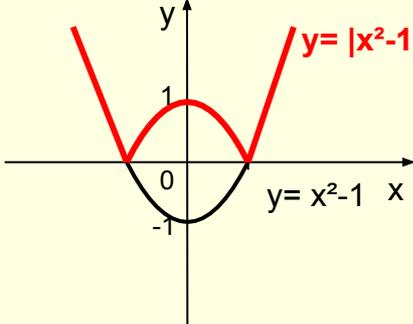
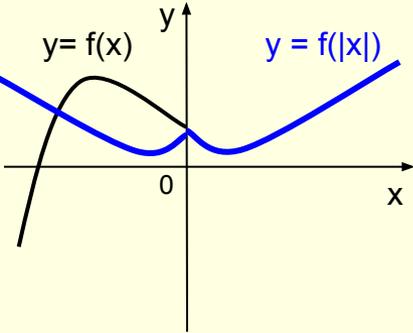
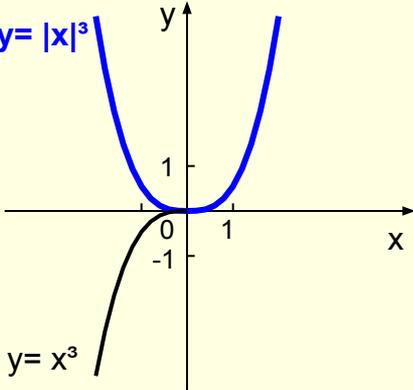
Преобразование графиков функций /продолжение/

Функция	Преобразование графика функции $y=f(x)$	Рисунок	Пример
$y = kf(x),$ $k > 0$	<ul style="list-style-type: none"> Растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy относительно оси Ox в k раз, если $k > 1$; Сжатие графика вдоль оси Oy относительно оси Ox в раз, если $0 < k < 1$ 	<p>На графике показаны две функции: $y = f(x)$ (черная) и $y = kf(x)$ (красная). Красная кривая имеет большую амплитуду, чем черная, что указывает на растяжение по оси Oy при $k > 1$. Также показана кривая с меньшей амплитудой, соответствующая $0 < k < 1$.</p>	<p>На графике показаны функции $y = \cos x$ (черная) и $y = 2\cos x$ (красная). Красная кривая имеет вдвое большую амплитуду по сравнению с черной, что является примером растяжения по оси Oy.</p>
$y = f(kx),$ $k > 0$	<ul style="list-style-type: none"> Сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox относительно оси Oy в k раз, если $k > 1$; Растяжение графика вдоль оси Ox относительно оси Oy в раз, если $0 < k < 1$ 	<p>На графике показаны две функции: $y = f(x)$ (черная) и $y = f(kx)$ (красная). Красная кривая имеет меньшую длину периода по оси Ox, что указывает на сжатие при $k > 1$. Также показана кривая с большей длиной периода, соответствующая $0 < k < 1$.</p>	<p>На графике показаны функции $y = \sin x$ (черная) и $y = \sin 2x$ (красная). Красная кривая имеет вдвое меньшую длину периода по сравнению с черной, что является примером сжатия по оси Ox.</p>

Преобразование графиков функций /продолжение/

Функция	Преобразование графика функции $y=f(x)$	Рисунок	Пример
$y = -f(x)$	Симметричное отражение графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox	 <p>The diagram shows a Cartesian coordinate system with x and y axes. A black curve, labeled $y=f(x)$, is plotted. A second curve, labeled $y=-f(x)$ and drawn in red, is a mirror image of the first curve across the x-axis. The origin is marked with 0.</p>	 <p>The diagram shows a Cartesian coordinate system with x and y axes. A black curve representing $y=\sqrt{x}$ starts at the origin (0,0) and curves upwards and to the right. A red curve representing $y=-\sqrt{x}$ starts at the origin and curves downwards and to the right. The x-axis has tick marks at 0 and 1, and the y-axis has tick marks at 0 and -1. The labels $y=\sqrt{x}$ and $y=-\sqrt{x}$ are placed near their respective curves.</p>
$y = f(-x)$	Симметричное отражение графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy	 <p>The diagram shows a Cartesian coordinate system with x and y axes. A black curve, labeled $y=f(x)$, is plotted. A second curve, labeled $y=f(-x)$ and drawn in blue, is a mirror image of the first curve across the y-axis. The origin is marked with 0.</p>	 <p>The diagram shows a Cartesian coordinate system with x and y axes. A blue curve representing $y=\sqrt{-x}$ starts at the origin (0,0) and curves upwards and to the left. A black curve representing $y=\sqrt{x}$ starts at the origin and curves upwards and to the right. The x-axis has tick marks at 0 and 1, and the y-axis has tick marks at 0 and -1. The labels $y=\sqrt{-x}$ and $y=\sqrt{x}$ are placed near their respective curves.</p>

Преобразование графиков функций /продолжение/

Функция	Преобразование графика функции $y=f(x)$	Рисунок	Пример
$y = f(x) $	Часть графика функции $y=f(x)$, расположенная ниже оси Ox , симметрично отражается относительно оси Ox , остальная часть графика остаётся без изменения		
$y = f(x)$	Часть графика функции $y=f(x)$, расположенная в области $x \geq 0$, остаётся без изменения, а часть графика, расположенная в области $x \leq 0$, заменяется симметричным отображением части графика для $x \geq 0$ относительно оси Oy		

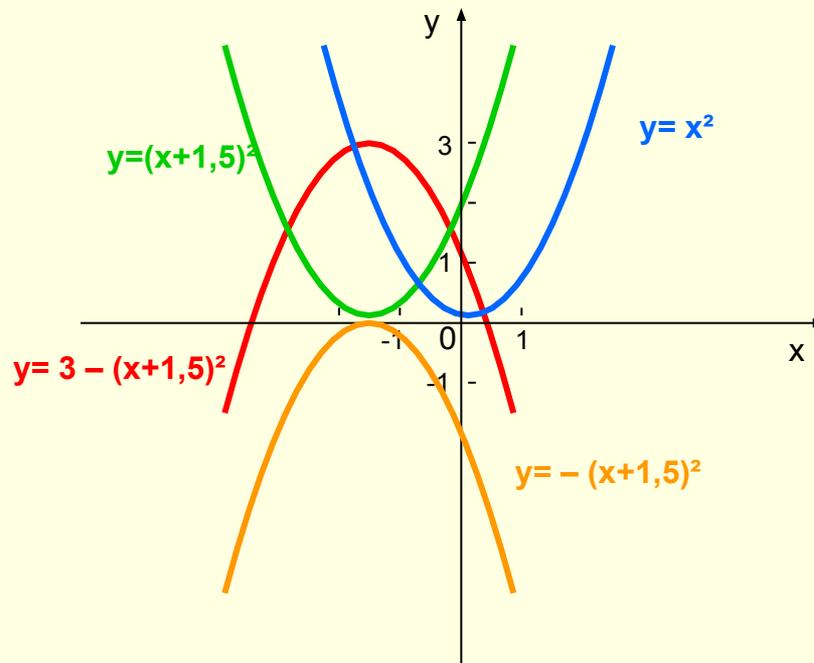
Задание 1

Построить график функции

1. $y = 3 - (x+1,5)^2$

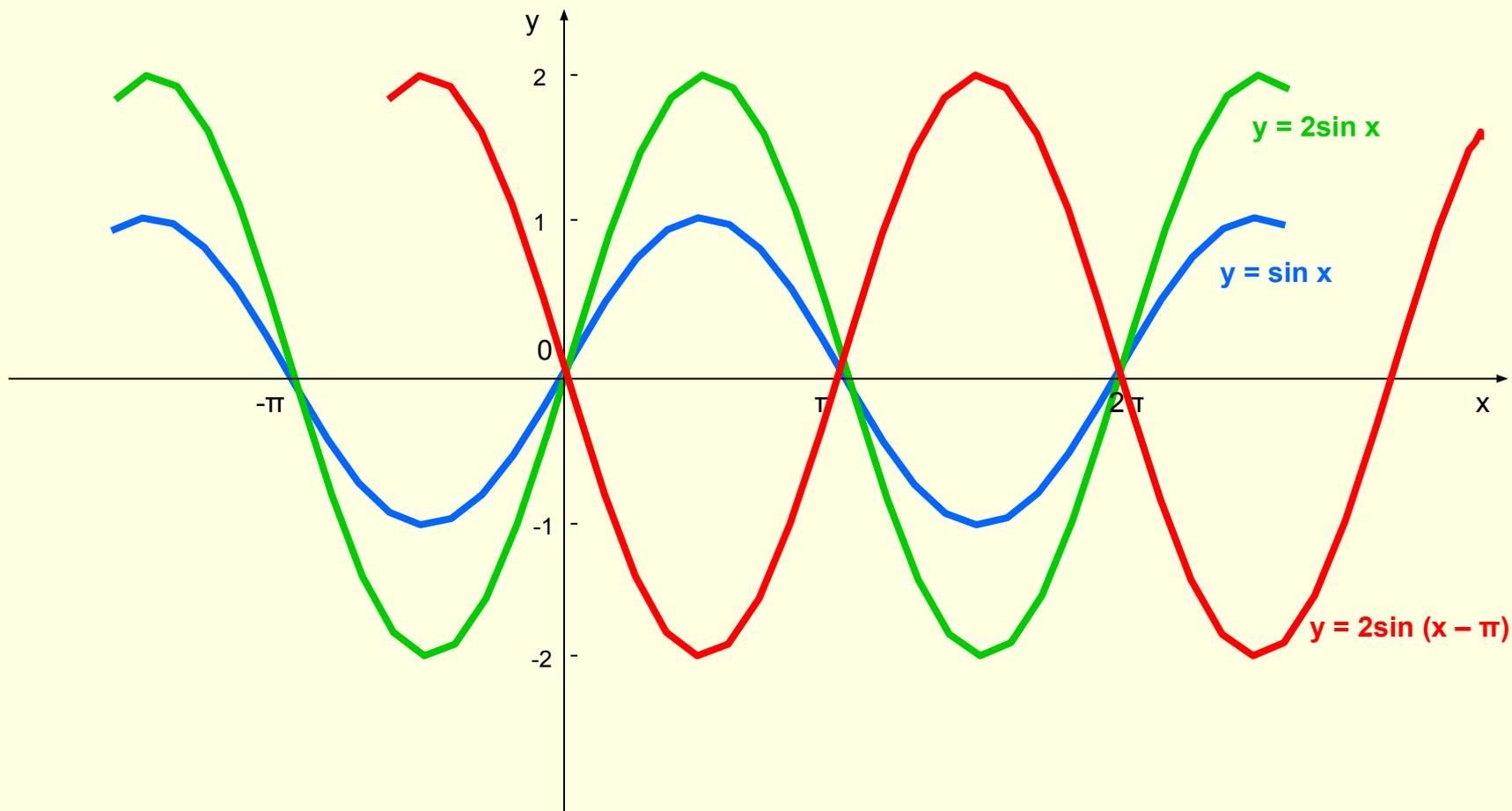
$y=x^2$ $\xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox \text{ на } 1,5 \text{ ед. влево}]{\text{параллельный перенос}}$ $y=(x+1,5)^2$ $\xrightarrow[\text{относительно оси } Ox]{\text{симметричное отражение}}$

$y=-(x+1,5)^2$ $\xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy \text{ на } 3 \text{ ед. вверх}]{\text{параллельный перенос}}$ $y=3-(x+1,5)^2$



2. $y = 2\sin(x - \pi)$

$y = \sin x$ $\xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy \text{ в } 2 \text{ раза}]{\text{растяжение}}$ $y = 2\sin x$ $\xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox \text{ на } \pi \text{ ед. вправо}]{\text{параллельный перенос}}$ $y = 2\sin(x - \pi)$



Задание 2

Определите, какие виды преобразований
были использованы

1. $y = 0,5(x-1)^3 + 3$

$$y=x^3 \xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox \text{ на } 1 \text{ ед. вправо}]{\text{параллельный перенос}} y=(x-1)^3 \xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy \text{ в } 0,5 \text{ раза}]{\text{сжатие}}$$

$$y=0,5(x-1)^3 \xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy \text{ на } 3 \text{ ед. вверх}]{\text{параллельный перенос}} y = 0,5(x-1)^3 + 3$$

2. $y = -\cos(x+\pi)$

$$y=\cos x \xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox \text{ на } \pi \text{ ед. влево}]{\text{параллельный перенос}} y = \cos(x+\pi) \xrightarrow[\text{относительно оси } Ox]{\text{симметричное отражение}}$$

$$y = -\cos(x+\pi)$$

Задание 3

Определите, какой формулой задана функция

1. $y = x^3$ $\xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox \text{ на 2 ед. вправо}]{\text{параллельный перенос}}$ $y = (x-2)^3$

$\xrightarrow[\text{относительно оси } Ox]{\text{симметричное отражение}}$ $y = -(x-2)^3$ $\xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy \text{ на 4 ед. вниз}]{\text{параллельный перенос}}$

$y = -(x-2)^3 - 4$

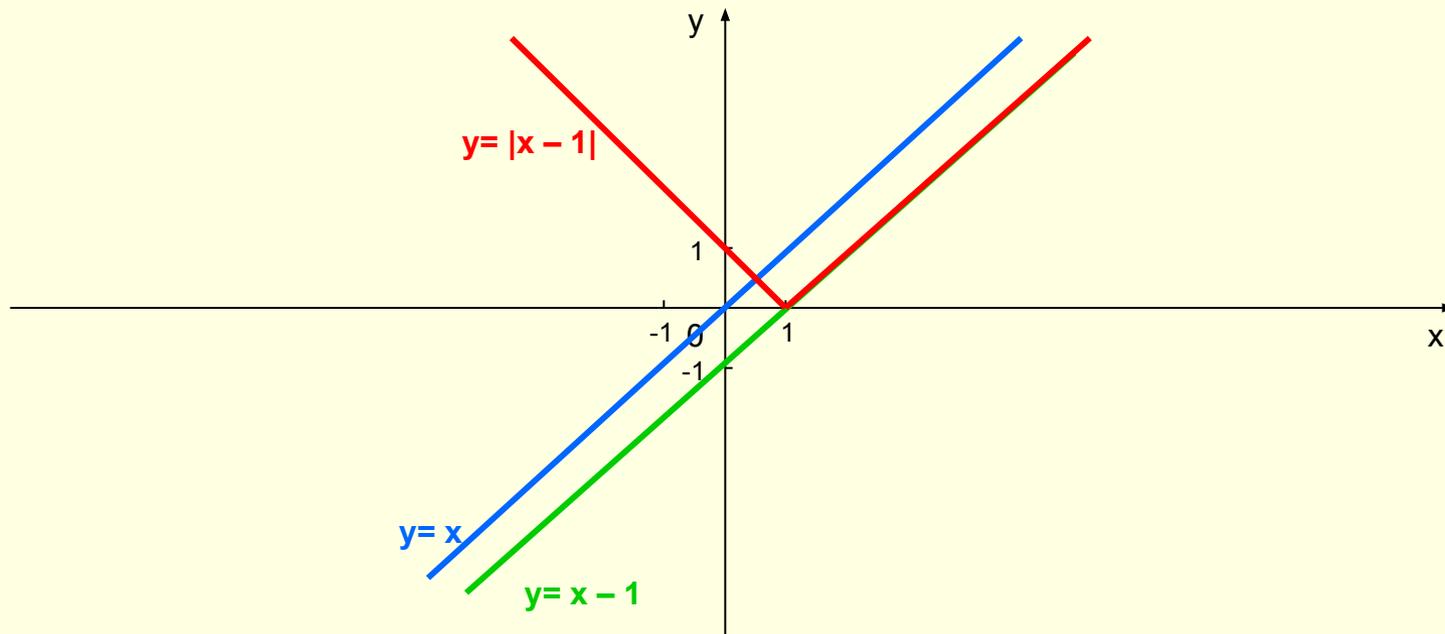
2. $y = x$ $\xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy \text{ на 1 ед. вниз}]{\text{параллельный перенос}}$ $y = x-1$

$\xrightarrow[\text{части графика, расположенной ниже оси } Ox]{\text{симметричное отражение относительно оси } Ox}$ $y = |x-1|$

Построение графика функции $y = |x - 1|$

2. $y = x$ $\xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy \text{ на } 1 \text{ ед. вниз}]{\text{параллельный перенос}}$ $y = x - 1$

$\xrightarrow[\text{части графика, расположенной ниже оси } Ox]{\text{симметричное отражение относительно оси } Ox}$ $y = |x - 1|$



Информационные ресурсы

- Звавич Л.И., Рязановский А.Р. Справочное пособие Алгебра в таблицах, 7-11 класс – М.: Дрофа, 2015
- Ковалёва Г.И. Уроки математики в 10 классе. Поурочные планы. Часть I – М.: Учитель, 2016
- Колмогоров А.Н. и др. Учебник для 10-11 классов Алгебра и начала анализа – М.: Просвещение, 2012
- Макарычев Ю.Н., под редакцией Теляковского С.А. Учебник для 9 класса Алгебра – М.: Просвещение, 2015
- Макарычев Ю.Н., под редакцией Теляковского С.А. Учебник для 7 класса Алгебра – М.: Просвещение, 2016
- Мордкович А.Г. /под редакцией/ Задачник для 10-11 классов Алгебра и начала анализа – М.: Мнемозина, 2016