

Методы решения иррациональных уравнений

Контингент: 10 класс физико-математического профиля.



Цель урока:

- **Обобщение и систематизация способов решения иррациональных уравнений.**
- **Решение более сложных типов иррациональных уравнений .**
- **Развивать умение обобщать, правильно отбирать способы решения иррациональных уравнений.**
- **Развивать самостоятельность, воспитывать грамотность речи.**



Устная работа

- Можно ли, не решая уравнений, сделать вывод о неразрешимости предложенных уравнений:

$$\sqrt{7-x} = -8+x;$$

$$\sqrt{x-3} = -\sqrt{x^2-1}$$

$$\sqrt{3-x} = 5 - \sqrt{x-9}$$

$$\sqrt{5x+7} + \sqrt{3-4x-x^2} + 2 = 0$$



Методы решения иррациональных уравнений

- **Введение новой переменной**
- **Исследование ОДЗ**
- **Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель.**
- **Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной.**
- **Выделение полного квадрата**



Методы решения иррациональных уравнений

- **Использование ограниченности выражений, входящих в уравнение**
- **Использование свойств монотонности функций**
- **Использование векторов**
- **Функционально - графический метод**
- **Метод равносильных преобразований**
- **Метод возведения обеих частей**



Введение новой переменной

- ~~Решите~~ Решите уравнение. _____

$$x^2 + 3x - 18 + 4 \cdot \sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$$

Пусть $x^2 + 3x - 6 = t$, t – неотрицательное число, тогда имеем $t - 12 + 4\sqrt{t} = 0$.

Отсюда, $t_1 = 4$, $t_2 = 36$.

Проверкой убеждаемся, что $t = 36$ – посторонний корень.

Выполняем обратную подстановку

$$x^2 + 3x - 6 = 4$$

Отсюда, $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.



Исследование ОДЗ

- Решить уравнение

$$3 \cdot \sqrt{3x+1} - 4 \cdot \sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x-1} = -(2 + \sqrt{1-x})$$

Решение.

Замечаем, что ОДЗ уравнения состоит из одной точки $x=1$.

Проверкой убеждаемся, что $x=1$ – решение уравнения.



Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель

- Решить уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$.

Решение. Умножим обе части уравнения на $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8})$

Получим, $x+3 - x-8 = 5 \cdot (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8})$.

$$\text{Имеем, } \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} = -1, \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5. \end{cases}$$

Отсюда, $2 \cdot \sqrt{x+3} = 4, \quad x = 1$.

Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ является корнем данного уравнения.



Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной

- Решить уравнение $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.

Решение. Положим $u = \sqrt[3]{x-2}$, $v = \sqrt{x+1}$.

Тогда $u+v=3$. Так как $u^3=x-2$, $v^2=x+1$, то $v^2 - u^3 = 3$.

Итак, в новых переменных имеем

$$\begin{cases} v + u = 3, \\ v^2 - u^3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u, \\ u^3 - u^2 + 6u - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2, \\ u = 1. \end{cases}$$

Значит, $x=3$.



Выделение полного квадрата

● Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} + 2 \cdot \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2 \cdot \sqrt{x+1} = 2.$$

Заметим, что $x+2 + 2 \cdot \sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + 1)^2$

$$x+2 - 2 \cdot \sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 1)^2.$$

Следовательно, имеем уравнение

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+1} + 1 + \sqrt{x+1} - 1 = 2, \\ \sqrt{x+1} - 1 \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+1} + 1 + \sqrt{x+1} - 1 = 2, \\ \sqrt{x+1} - 1 < 0, \end{array} \right.$$

Ответ: $-1 \leq x \leq 0$. ИЛИ

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+1} - 1 < 0, \\ \sqrt{x+1} + 1 + 1 - \sqrt{x+1} = 2. \end{array} \right.$$

Решением первой системы будет $x=0$, решением второй системы – все числа, удовлетворяющие неравенству $-1 \leq x < 0$.

Использование ограниченности выражений, входящих в уравнение

● Решить уравнение $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[4]{x^4 + 1} = 2 - x^2$.

Так как $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ и $\sqrt[4]{x^4 + 1} \geq 1$ для любых значений x ,

то левая часть уравнения не меньше двух для $x \in \mathbb{R}$

Правая часть $2 - x^2 \leq 2$ для $x \in \mathbb{R}$.

Поэтому уравнение может иметь корнями только те значения x , при которых

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[4]{x^4 + 1} = 2, \\ 2 - x^2 = 2. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдем $x=0$.

Это значение удовлетворяет и первому уравнению системы. Итак, $x=0$ – корень уравнения.



Использование свойств монотонности функций

- Решить уравнение $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{29-x}$.

Если функция $u(x)$ монотонная, то уравнение $u(x) = A$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение. Отсюда следует, что уравнение $u(x) = v(x)$, где $u(x)$ - возрастающая, а $v(x)$ - убывающая функции, либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Подбором находим, что $x=2$ и оно единственно.



Использование векторов

● **Решите уравнение** $x \cdot \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$.
ОДЗ: $-1 \leq x \leq 3$.

Пусть вектор $\vec{a} = \{x; 1\}$, $\vec{b} = \{\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x}\}$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}.$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{1+x+3-x} = 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$$

Получили $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Отсюда, $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

Возведем обе части в квадрат. Решив уравнение, получим

$$x = 1; x = 1 \pm \sqrt{2}$$



Самостоятельная работа с последующей проверкой

ВАРИАНТ 1

$$\sqrt{|x^2 + 5x + 4| - 9} = |x + 7| - 1,$$

$$(x + 2)\sqrt{x^2 - x - 20} = 6x + 12,$$

$$\sqrt[3]{5 + x} - \frac{63}{13}\sqrt[3]{5 - x} = \sqrt[6]{25 - x^2}.$$

ВАРИАНТ 2

$$\sqrt[3]{4x^2 - 1} = 10\sqrt{x - 1},$$

$$\sqrt[5]{x - 1} + \sqrt{x + 2} = 3,$$

$$\sqrt[6]{x}\sqrt{x^7} - 25 \cdot \sqrt[4]{x\sqrt{x}} = 54.$$



Домашнее задание

- Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9. \end{cases}$$

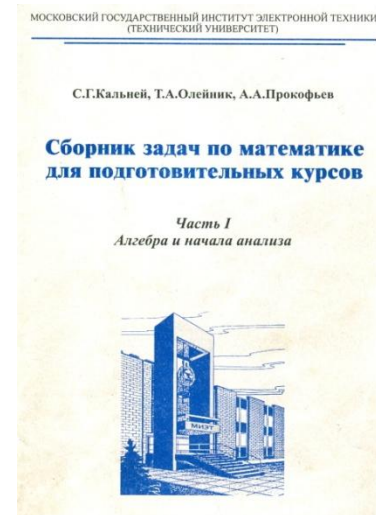
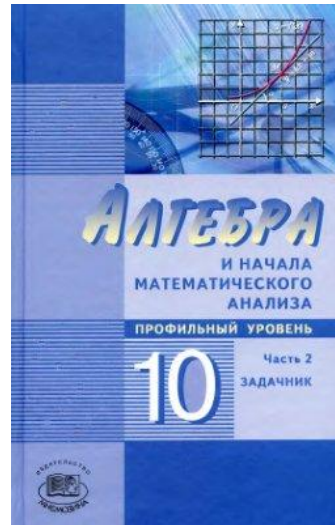
Решите уравнения:

$$\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

$$\sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4.$$



Источники



<http://rudocs.exdat.com/docs/index-18133.html>

<http://dist-tutor.info/mod/lesson/view.php>

<http://ru.wikibooks.org/wiki/>