

Элементы линейной алгебры

Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется
прямоугольная таблица чисел,
состоящая из m строк и n столбцов.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Числа a_{ij} – элементы
матрицы:**

i – номер строки

j – номер столбца.

Обозначения матриц:
A, B, C ... или (a_{ij}) , (b_{ij}) , (c_{ij}) ...

Виды матриц. Квадратная матрица ($m=n$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц. Диагональная матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц. Единичная и нулевая матрицы

● Единичная

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

● Нулевая

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Виды матриц. Ступенчатая матрица, матрица-столбец и матрица-строка

● Ступенчатая

$$C = \begin{pmatrix} \underline{\otimes} & * & * & * & \boxtimes & * \\ 0 & 0 & \underline{\otimes} & * & \boxtimes & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxtimes & \underline{\otimes} \end{pmatrix}$$

● Матрица-столбец ($m \times 1$)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

● Матрица-строка ($1 \times n$)

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)$$

Равенство матриц

Две матрицы
 $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$
называются равными,
если

1) Размеры
матриц
совпадают

2)
Соответствующие
элементы матриц
равны:

$$a_{ij} = b_{ij},$$

$i=1, m; j=1, n.$

Сумма матриц

Суммой матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m \times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

Пример.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 3+5 \\ -1+2 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Разность матриц

Разностью матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m \times n$, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов матриц A и B

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

Пример.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 & 3-5 \\ -1-2 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Произведение матрицы на число

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ
называется матрица того же размера,
элементы которой равны λa_{ij} .

$$\lambda = 3; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot 3 = 3 \cdot A = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$
(размера $m \times p$) на матрицу $B=(b_{ij})$
(размера $p \times n$) называется матрица $C=(c_{ij})$
(размера $m \times n$), элементы которой
вычисляются по формулам:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \boxtimes + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Умножение матриц

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \boxtimes + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

$$\begin{pmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{i1} & a_{i2} & \boxtimes & a_{ip} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxtimes & \boxtimes & b_{1j} & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & b_{2j} & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & b_{pj} & \boxtimes \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & c_{ij} & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Матрица A^T называется **транспонированной** к матрице A , если в ней поменяли местами строки и столбцы.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы

Определитель – это число,
характеризующее квадратную
матрицу.

$$1. |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

$$2. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$3. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Определитель матрицы

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

$$A_{ij} = (-1)^S M_{ij}, \quad S = i + j$$

Теорема Лапласа. Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

$$|A| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

Обратная матрица

Пусть дана **невырожденная** ($\det A \neq 0$)
квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица A^{-1} называется **обратной**
к матрице **A**, если выполняются равенства

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

E – единичная матрица.

Обратная матрица

Теорема.

Всякая **невырожденная** матрица
имеет **единственную обратную матрицу**.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} ,

$|A|$ – определитель матрицы A .

Матричный вид системы

Обозначения:

● Матрица коэффициентов
при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

● Столбец свободных
членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

● Столбец неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Матричные уравнения

Матричная запись
системы:

$$A \cdot X = B$$

Пусть $m=n$
Пусть $\det A \neq 0$



A^{-1} — существует

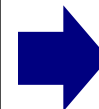
Тогда

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

E



$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$



$$X = A^{-1} \cdot B$$

Правило Крамера

Решение системы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \boxtimes, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A

Минор M_k матрицы A называется ее **базисным минором**, если он отличен от нуля, а все миноры матрицы A более высокого порядка $k+1, k+2, \dots, t$ равны нулю.

Рангом матрицы $r(A)$
называется порядок его базисного минора.

Элементарные преобразования матриц



Элементарные преобразования матриц

Теорема 1.

Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Теорема 2.

При элементарных преобразованиях **ранг** матрицы **не меняется**.

Ранг ступенчатой матрицы равен числу
(ненулевых) строк.

Метод Гаусса

Метод **последовательного исключения неизвестных** – наиболее **распространенный метод** решения систем линейных уравнений.

Суть метод Гаусса:

- а) из всех уравнений системы кроме первого исключается неизвестное x_1 ;
- б) из всех уравнений системы кроме первого и второго исключается неизвестное x_2 ;
- в) из всех уравнений системы кроме первого, второго и третьего исключается неизвестное x_3 и т.д.

Метод Гаусса

Возможен один из следующих случаев:

1) система **не имеет решений**
(система несовместна);

2) система имеет
единственное решение;

3) система имеет **бесчисленное
множество решений.**

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема.

Система линейных уравнений **совместна**
тогда и только тогда, когда

$$r(A) = r(\tilde{A})$$