Погрешности измерений. Классификация погрешностей

- **Всякое измерение как в сфере научных исследований, так и в сфере производства может считаться законченным лишь в том случае, если оценена погрешность измерения.**
- **Оценка погрешности при научном исследовании показывает достоверность полученных результатов и позволяет объективно оценить правильность научных выводов.**

Процедура измерений состоит из следующих основных этапов:

- **Принятия модели объекта измерений;**
- **Проведение эксперимента для получения численного результата измерений;**
- **Выбор средства измерений**

Разного рода недостатки, присуще этим этапам, приводят к тому, что результат измерения отличается от истинного значения измеряемой величины.

Причины возникновения погрешности могут быть различными. Например, недостаточно разработанные теории физических явлений, положенных в основу измерений и т.д.

Погрешности измерения – весьма сложное понятие. Прежде чем анализировать погрешности, необходимо выяснить, к какому виду они относятся. Классификацию погрешностей производят с нескольких различных точек зрения.

С точки зрения отношения к измеряемой величине и к шкале измерительного прибора

Абсолютная погрешность

это разность между измеряемой величиной x и истинной величиной $x_и$

Относительная погрешность

это отношение абсолютной погрешности к истинному значению величины

Приведенная погрешность

это отношение абсолютной погрешности к Номинальному значению шкалы измерительного прибора

Абсолютная погрешность

$$\Delta = x - x_{и}$$

где x – измеряемая величина, $x_{и}$ – истинная величина.

Абсолютная погрешность имеет размерность измеряемой величины.

Абсолютная погрешность, взятая с обратным знаком, называется поправкой.

Относительная погрешность

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\Delta}/\ x_и$$

Относительная погрешность - безразмерная величина, обычно выражается в %

В большинстве случаев $\delta \ll 1$, поэтому для вычисления относительной погрешности можно пользоваться приближенной формулой:

$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\Delta}/\ \mathbf{x}$, где x – измеряемая величина

Приведенная погрешность

$\gamma = \Delta / x_N$ **100%**, где x_N – нормированное значение величины.

Например: $x_N = x_{max}$ – максимальное значение измеряемой величины.

В качестве истинного значения при многократных измерениях параметра выступает среднее арифметическое значение $X_{ср}$

$$x_и \approx X_{ср} = 1/n \sum_{i=1}^{n} x_i$$

С точки зрения вероятностного характера

Систематические

погрешности, которые вызываются постоянно действующими факторами

Случайные погрешности

вызываются изменяющимися причинами, неизвестными оператору

Промахи

разновидность случайных погрешностей, которая при нормально измерениях встречается весьма редко и определяется невнимательностью оператора

Систематические погрешности

- К систематическим относятся погрешности, закономерно связанные с принципом действия и конструкцией прибора, а так же с условиями в которых он находится.
- Систематические погрешности могут быть исключены или уменьшены в значительной степени устранением источников погрешностей или введением поправок.
- Систематические погрешности могут быть исключены путем нескольких проведенным образом измерений.
- Полностью исключить систематические погрешности невозможно, так как методы и средства, с помощью которых обнаруживаются и оцениваются систематические погрешности сами имеют свои погрешности. Поэтому всегда остается не исключенный остаток систематической погрешности.

Случайные погрешности

- **Иногда причины, вызывающие случайные погрешности, могут быть известны (например, наводки от внешних электромагнитных полей), но если эти причины сами по себе имеют случайный, хаотический характер, то и погрешности, вызванные ими, будут тоже случайными.**
- **Если причины появления случайных погрешностей известны, то для уменьшения этих погрешностей уменьшают влияние причин на результат измерений. Например, экранируют цепи.**
- **Если эти причины неизвестны, то влияние случайных погрешностей можно уменьшить путем проведения *многократных измерений* одного и того же значения измеряемой величины с дальнейшей статистической обработкой полученных результатов методами теории вероятности.**

С точки зрения внутренних источников возникновения

Методические

погрешности, которые вызваны либо ошибочно выбранным методом измерения, либо тем, что в выбранном методе сознательно пренебрегают рядом параметров

Приборные

погрешности связаны с конструктивным и недостатками и технологическим несовершенство м измерительного прибора

Дополнительные

погрешности, которые вызываются внешними воздействиями на измерительный прибор, отличными от тех, которые указываются в паспорте прибора

Вероятностный подход к описанию погрешностей

- **Полным описанием случайной величины, а следовательно и погрешности, является ее закон распределения, которым определяется характер появления различных результатов отдельных измерений.**
- **В практике электрических измерений встречаются различные законы распределения.**
- **Во многих случаях погрешность измерения образуется под действием большой совокупности различных, независимых друг от друга причин.**
- **На основании центральной предельной теоремы теории вероятности результатом действия этих причин будет погрешность. Распределенная по нормальному закону при условии, что ни одна из этих причин не является существенно преобладающей.**

Нормальный закон распределения погрешностей

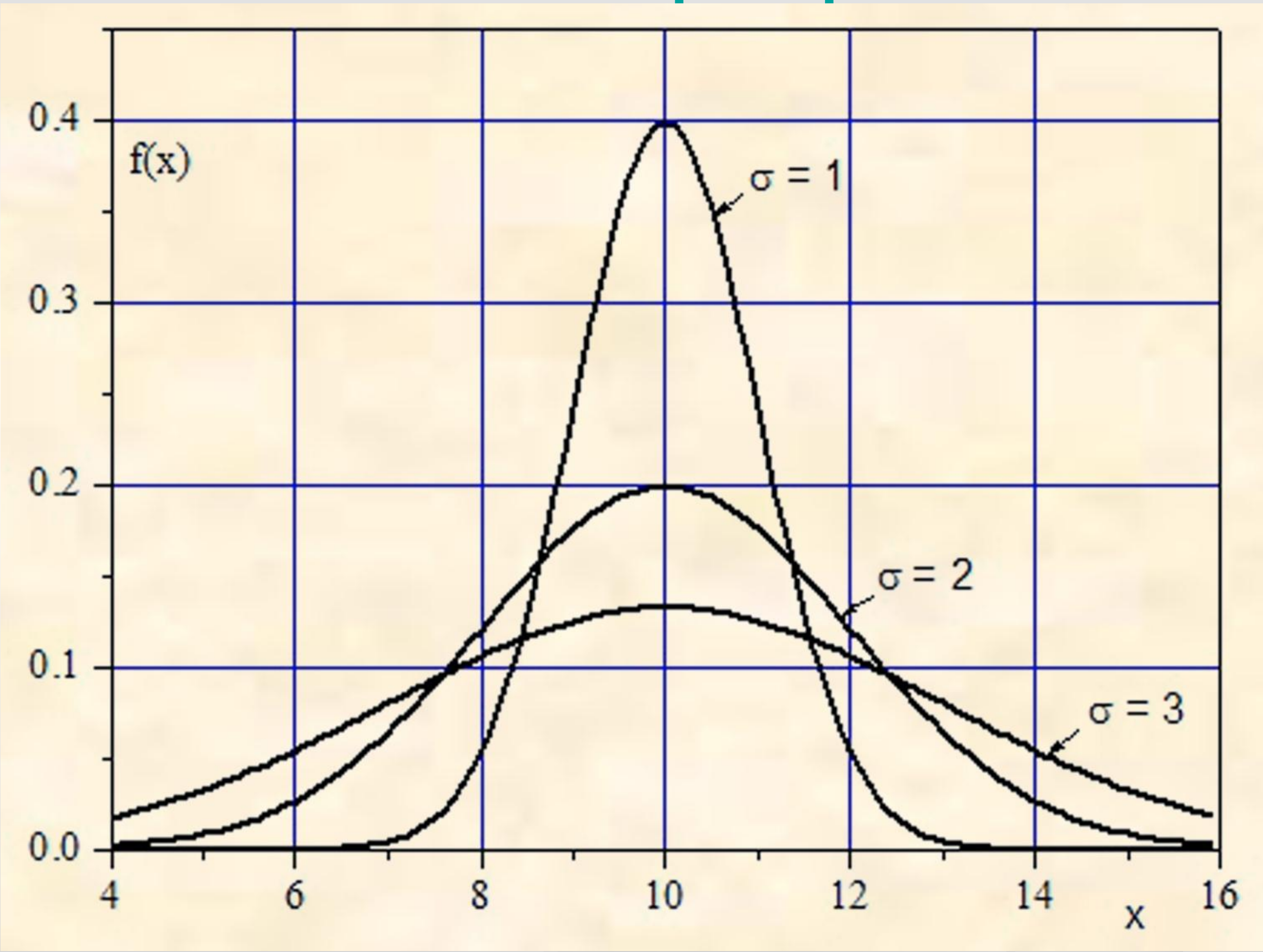
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

параметры – m = μ - математическое ожидание (генеральное среднее) и σ^2 - дисперсия ошибки измерения величины X.

Знание этих значений и их мониторинг позволяет использовать статистические методы управления качеством изделий.

Нормальному закону распределения подчиняются ошибки измерения различных физических величин, размеры человеческого тела, отклонения действительных размеров деталей, обработанных на станке, от проектных размеров и т. д.

Оценить значение математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности можно по измеренным значениям некоторого ограниченного числа приборов.



Наиболее распространенным в практике измерения физических величин является **<u>нормальный</u>** или **<u>гауссов</u>** закон распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

С параметрами μ и б

- Выясним смысл численных параметров μ и σ, входящих в выражение нормального закона докажем, что величина μ есть не что иное, как математическое ожидание, а величина σ - среднее квадратичное отклонение величины X . Для этого вычислим основные числовые характеристики величины X - математическое ожидание и дисперсию.

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Замена переменной: $\dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}=t,$

$$M[X]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma\sqrt{2}t+m\right)e^{-t^2}dt=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}dt+\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt.$$

Первый из двух интегралов равен нулю;
Второй представляет собой известный интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

Следовательно, $M\left|X\right|=m$

Этот параметр, особенно в задачах стрельбы, часто называют центром рассеивания (сокращенно – ц. р.).

Математическое ожидание погрешности измерений есть не случайная величина, относительно которой рассеиваются другие значения погрешностей при повторных измерениях.

- # Вычислим дисперсию величины X :

$$D[X]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Делаем эту же замену переменной:

$$\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}=t,$$

$$D[X]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2}dt$$

Интегрируя по частям, получим:

$$D[X]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot 2te^{-t^2}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left\{-te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt\right\}$$

Первое слагаемое в фигурных скобках равно нулю (так как e^{-t^2} при $t\to\infty$ убывает быстрее, чем возрастает любая степень t), второе слагаемое равно $\sqrt{\pi}$, откуда:

$$D[X]=\sigma^2$$

Следовательно, параметр σ есть не что иное, как среднее квадратичное отклонение **величины** X .

Для этого закона:

$$ss\, M\{x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \mu\ ;SS$$

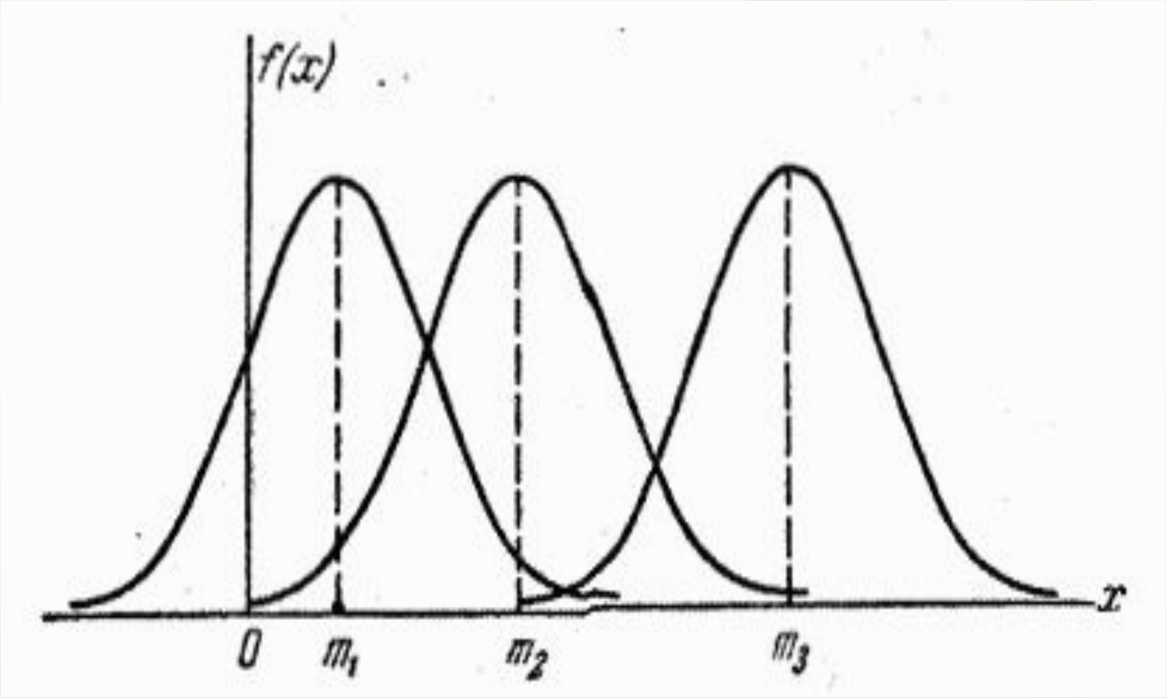
$$D\{x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \sigma^2\ ;$$

M{x} – математическое ожидание
D{x} - дисперсия

Смысл параметров σ и m нормального распределения.

- Из распределения Гаусса, f(x), видно, что центром симметрии распределения является центр рассеивания m.
- При изменении знака разности (x - m) на обратный выражение для f(x) не меняется.
- При изменении центра рассеивания, кривая распределения смещается вдоль оси абсцисс, не изменяя своей формы.
- Центр рассеивания характеризует положение распределения на оси абсцисс.

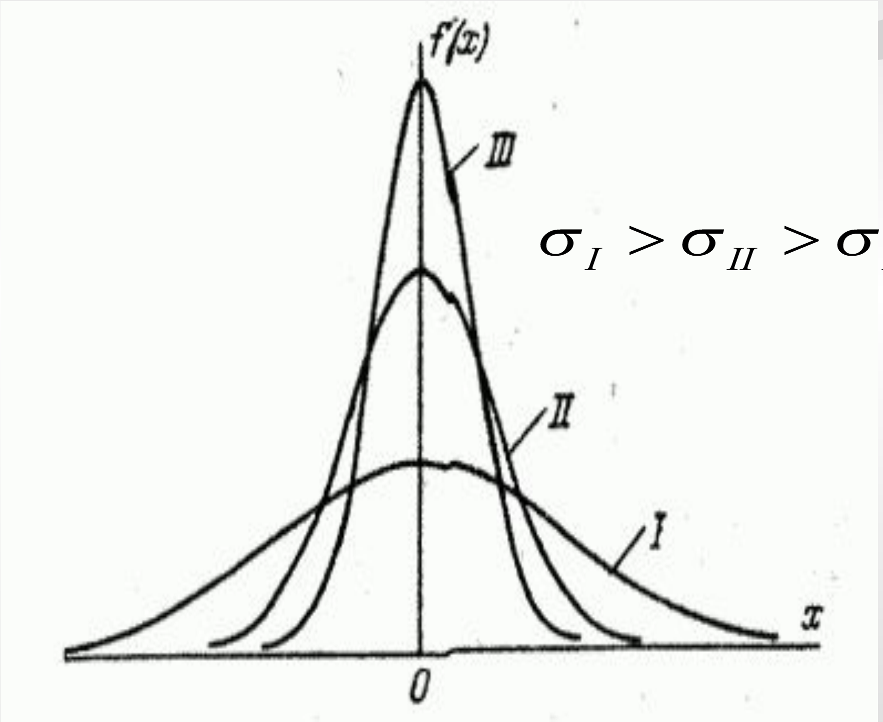
На рисунке показаны три нормальные кривые (I, II, III) при
$m = 0$; из них кривая I соответствует самому большому, а кривая III – самому малому значению .
Изменение параметра σ равносильно изменению масштаба кривой распределения – увеличению масштаба по одной оси и такому же уменьшению по другой.



- Размерность центра рассеивания – та же, что размерность случайной величины X.

- Параметр σ характеризует не положение, а самую форму кривой распределения.
- Это есть характеристика рассеивания. Наибольшая ордината кривой распределения обратно пропорциональна σ ; при увеличении σ максимальная ордината уменьшается.
- Так как площадь кривой распределения всегда должна оставаться равной единице, то при увеличении кривая распределения становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс; напротив, при уменьшении σ кривая распределения вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков, и становится более иглообразной.

- Размерность параметра σ, естественно, совпадает с размерностью случайной величины X.



$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$$

- В некоторых курсах теории вероятностей в качестве характеристики рассеивания для нормального закона вместо среднего квадратичного отклонения применяется так называемая мера точности. Мерой точности называется величина, обратно пропорциональная среднему квадратичному отклонению *h* :

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

- Размерность меры точности обратная размерности случайной величины.
- Термин «мера точности» заимствован из теории ошибок измерений: чем точнее измерение (σ- малая величина) , тем больше мера точности. Пользуясь мерой точности *h*, можно записать нормальный закон в виде:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-m)^2}$$