

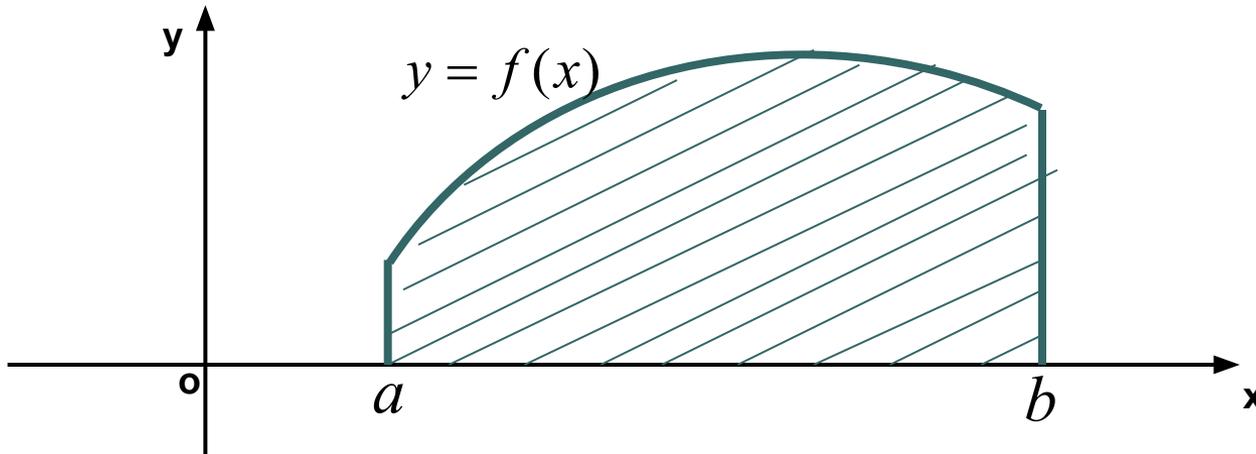


Интегральное исчисление

Определенный интеграл

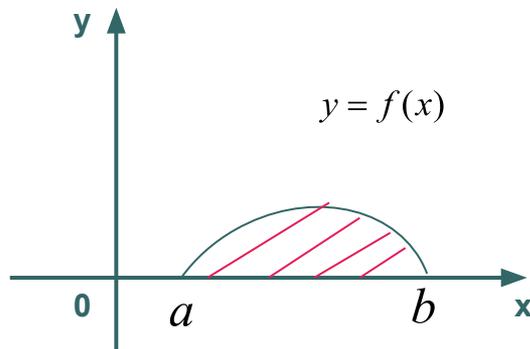
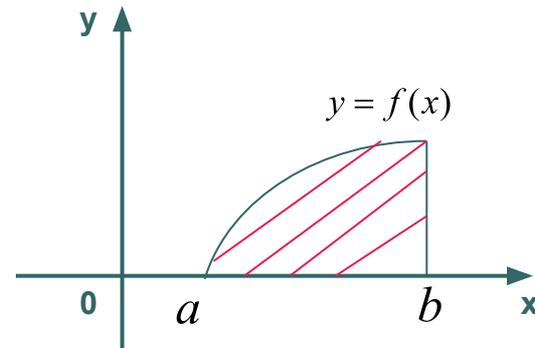
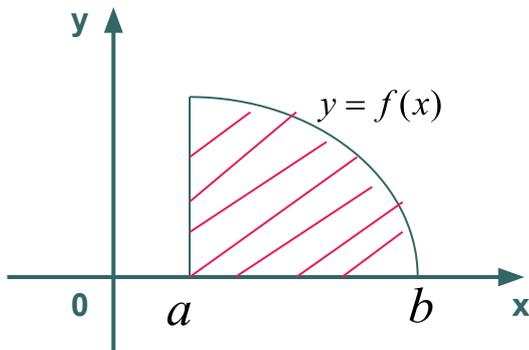
Определенный интеграл.

- ▣ **Определение.**
- ▣ **Криволинейной трапецией** называется фигура
- ▣ на плоскости, ограниченная **сверху** графиком
- ▣ функции $y = f(x)$, **снизу** отрезком $[a, b] \subset OX$,
- ▣ **с боков** вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.



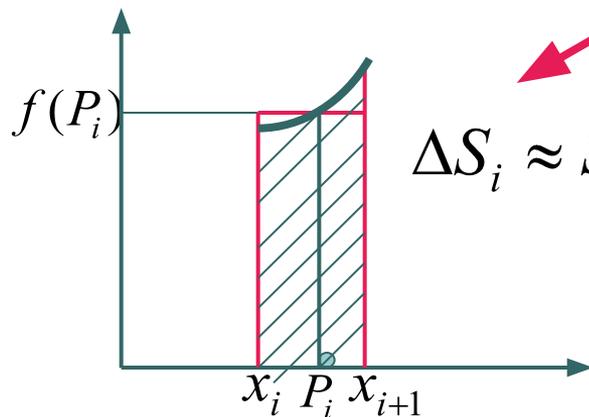
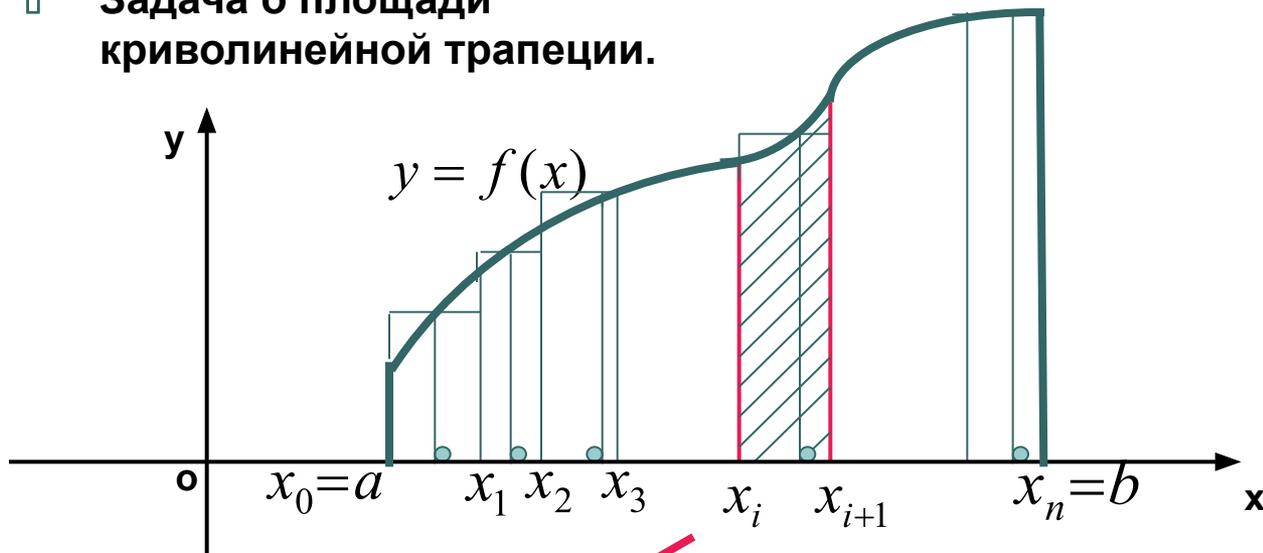
Определенный интеграл

- Частные случаи криволинейной трапеции.



Определенный интеграл.

- **Задача о площади криволинейной трапеции.**



$$\Delta S_i \approx S_{\square} = f(P_i)\Delta x_i$$

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta x_i$$



Определенный интеграл.

□ **Определение.**

- Выражение $\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta x_i$
- называется **интегральной суммой**.

- Рассматриваем всевозможные разбиения
- криволинейной трапеции на части такие,
- что $\lambda = \max(\Delta x_i) \rightarrow 0$
- Составляем интегральные суммы
- и переходим к пределу при $\lambda \rightarrow 0$

$$S_{\text{трапеции}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta x_i$$

Определенный интеграл.

- **Определение.**
- **Определенным интегралом**
- от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$
- называется предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i$$

- когда наибольший из участков разбиения $\lambda = \max(\Delta x_i)$
- стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i$$

- **Геометрический смысл.**

$$f(x) \geq 0 \text{ на } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = S_{\text{трапеции}}$$



Определенный интеграл.

- Когда существует предел?
- Когда предел не зависит от способа разбиений?

- **Теорема..**
- Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,
- то она **интегрируема**
 - (то есть существует предел интегральных сумм
 - и он не зависит от способа разбиений)



Определенный интеграл.

□ Свойства.

□ 1. Линейность.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$$

($C - const \neq 0$)


$$\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x)) dx =$$
$$= k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx$$

($k_1, k_2 = const \neq 0$)

Определенный интеграл.

□ **Доказательство свойства** (для суммы).

□ 1. Возьмем разбиение $[a, b]$ на n частей: $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

• и выберем в каждой части точку: P_1, P_2, \dots, P_n

□ 2. Составим интегральную сумму: $\sum_{i=1}^n (f(P_i) + g(P_i)) \Delta x_i$

□ 3.
$$\sum_{i=1}^n (f(P_i) + g(P_i)) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(P_i) \Delta x_i$$

□ 4. Рассматриваем всевозможные разбиения $[a, b]$ на части такие,

□ что все Δx_i уменьшаются, составляем интегральные суммы

□ и переходим к пределу при $\lambda = \max(\Delta x_i) \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(P_i) + g(P_i)) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(P_i) \Delta x_i$$

$$\text{то есть } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$



Определенный интеграл.

- ▣ **2. Перестановка пределов интегрирования.**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- ▣ **3. Аддитивность.**

- ▣ Пусть

$$[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$$

- ▣ тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Определенный интеграл.

▣ 4. О знаке интеграла.

$$a) f(x) \geq 0 \text{ на } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$b) f(x) \leq 0 \text{ на } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

$$c) f(x) \leq g(x) \text{ на } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Доказать свойства
самостоятельно

Определенный интеграл.

□ Теорема (об оценке).

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

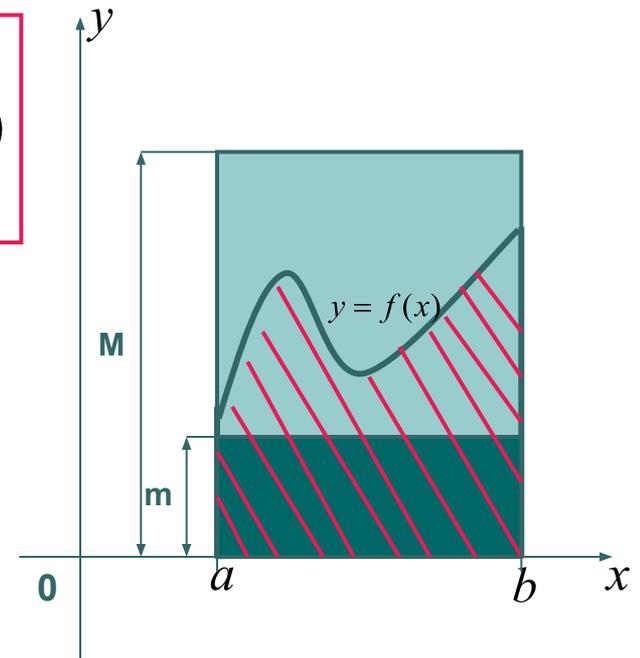


$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Геометрический смысл.

Если $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, то

$$S_m \leq S_{\text{трапеции}} \leq S_M$$





Определенный интеграл.

□ **Доказательство.**

□ 1. $f(x) - m \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\int_a^b (f(x) - m) dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx - m \int_a^b dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(b - a)$$

□ 2. Аналогично: $M - f(x) \geq 0 \Rightarrow M(b - a) \geq \int_a^b f(x) dx$



Определенный интеграл.

- ▣ **Определение.**
- ▣ Средним значением функции $f(x)$ на $[a, b]$

- ▣ называется число

$$f_{cp.} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

- ▣ **Теорема (о среднем).**

$f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$



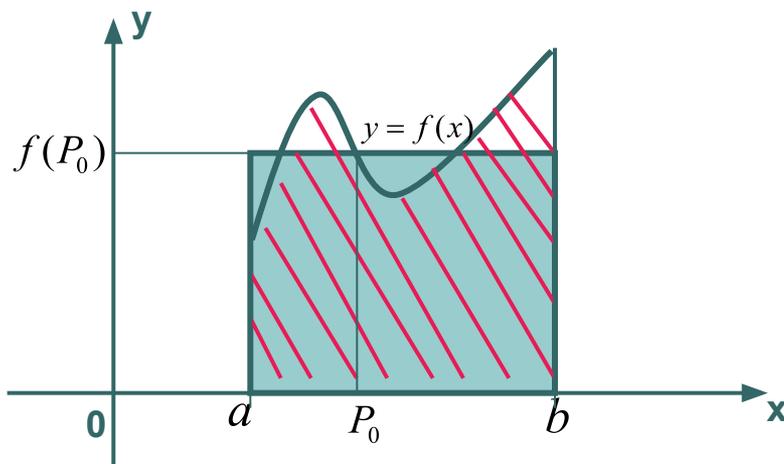
$$\exists P_0 \in [a, b] : f(P_0) = f_{cp.}$$

$$\left(\int_a^b f(x) dx = f(P_0)(b - a) \right)$$

Определенный интеграл.

□ Геометрический смысл.

$$\int_a^b f(x) dx = f(P_0)(b - a)$$



Если $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, то

$$S_{\text{трапеции}} = S_{P_0}$$

Определенный интеграл.

□ **Доказательство.**

□ 1. Из непрерывности $f(x) \implies m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

□ где $m = \min_{[a, b]} f(x)$, $M = \max_{[a, b]} f(x)$

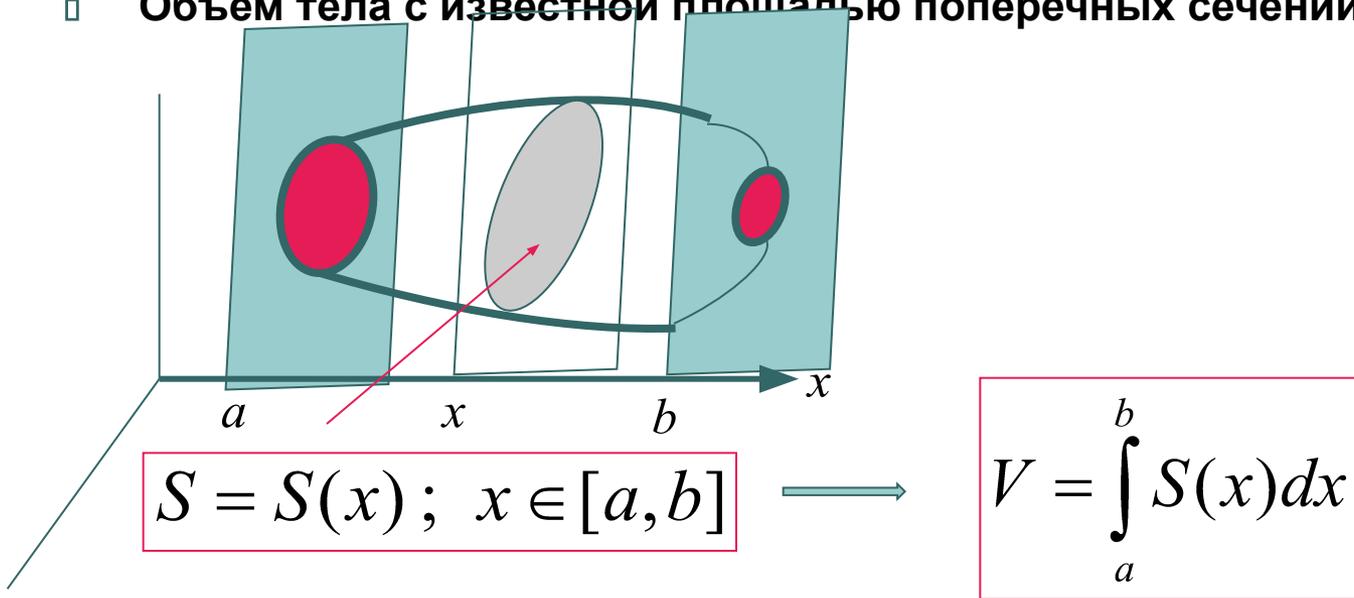
□ 2. Из теоремы об оценке $\implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$
$$m \leq f_{cp.} \leq M$$

□ 3. Из непрерывности $f(x) \implies \exists P_0 \in [a, b] : f(P_0) = f_{cp.}$

Определенный интеграл.

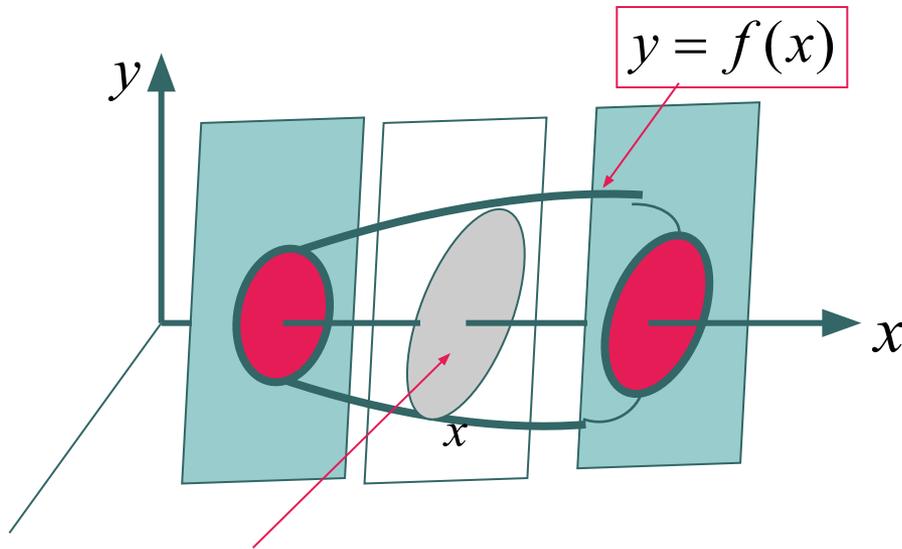
- Объем тела с известной площадью поперечных сечений.



- Доказать самостоятельно.

Определенный интеграл.

□ Следствие: объем тела вращения.



$$S = \pi r^2 = \pi (f(x))^2 ; x \in [a, b]$$



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

□ Рассмотрим $\int_a^t f(x)dx = \Phi(t)$, где $t \in [a, b]$

□ (t – переменная).

□ **Теорема (Барроу).**

□ Если $f(x)$ - непрерывная на $[a, b]$

□ то $\Phi(t) \equiv \int_a^t f(x)dx$ - дифференцируемая

□ и $\left(\int_a^t f(x)dx \right)' = f(t)$

Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

□ **Следствие.**

□ $\Phi(t) \equiv \int_a^t f(x)dx$ - первообразная для $f(t)$

□ **Доказательство теоремы Барроу.**

□ 1. Возьмем $t, t_1 \in [a, b]: t_1 = t + \Delta t$

□ 2. Тогда $\Delta\Phi = \Phi(t_1) - \Phi(t) = \int_t^{t_1} f(x)dx$

□ $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t_1} f(x)dx = f(P_0)$ где $P_0 \in [t, t_1]$

□ 4. $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow P_0 \rightarrow t \Rightarrow \Phi'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = f(t)$



Связь определенного и неопределенного интегралов

Формула Ньютона - Лейбница.

Пусть $f(x)$ - непрерывная на $[a, b]$
 $F(x)$ - первообразная для $f(x)$

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \longleftarrow F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

Первое доказательство.

- 1. Возьмем разбиение $[a, b]$: $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
-
- 2. $F(b) - F(a) \equiv$
 $\equiv (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_1) - F(x_0)) =$
 $= \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$
- 3. По теореме Лагранжа $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(P_i)\Delta x_i = f(P_i)\Delta x_i$
 $\implies F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta x_i$
- 4. Рассматриваем всевозможные разбиения $[a, b]$ на части такие, что все Δx_i
- уменьшаются, составляем интегральные суммы и переходим к пределу при $\lambda = \max(\Delta x_i) \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (F(b) - F(a)) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta x_i \implies F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$



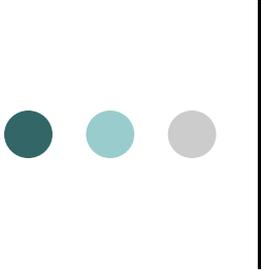
Второе доказательство.

- Пусть $F(x)$ - какая-либо первообразная для $f(x)$.
- Тогда $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - также первообразная для $f(x)$

$$\implies \Phi(x) = F(x) + C$$

$$\text{При } x=a \implies \begin{cases} \Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \\ 0 = F(a) + C \end{cases} \implies C = -F(a)$$

$$\text{При } x=b \implies \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$



Формула Ньютона-Лейбница.

▣ **Примеры.**

▣ 1.
$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3\frac{3}{4}$$

▣ 2. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

• Пример:
$$\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x d e^x = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$$