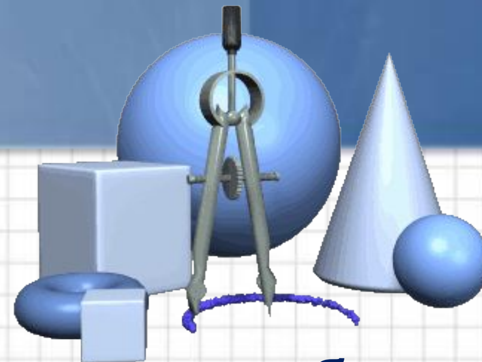
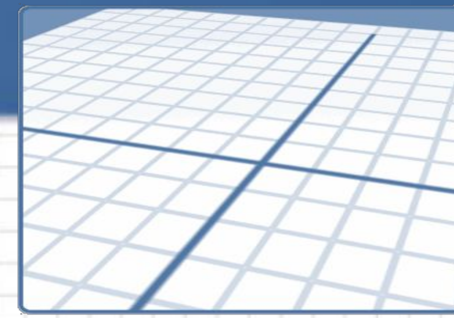




Методическая разработка урока геометрии в 11 классе по теме «Уравнение плоскости» (профильный уровень)

урок №1.

Автор разработки:

Малинская Елена Геннадьевна

учитель математики

МАОУ гимназии № 40 имени Ю. А. Гагарина

г. Калининград, 2015 г.

Этапы решения задач методом координат

- 1. Выбор системы координат в пространстве
- 2. Нахождение координат необходимых точек и векторов, или уравнения плоскостей, кривых и фигур
- 3. Решение примера, используя ключевые задачи или формулы данного метода
- 4. Переход от аналитических соотношений к метрическим.

Цели:

- ***Ввести понятия общего уравнения плоскости, матрицы и определителя.***
- ***Изучить алгоритм нахождения определителя квадратных матриц второго и третьего порядков.***
- ***Выработать умение записывать уравнение плоскости, проходящей через три различные точки.***

Общее уравнение плоскости

Если в пространстве фиксирована произвольная декартова система координат *Oxyz*, то всякое уравнение первой степени с тремя переменными *x y z* определяет относительно этой системы плоскость.

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad \textbf{(1)}$$

A; B; C; D – некоторые постоянные, причем из чисел *A; B; C* хотя бы одно отлично от нуля.

Общее уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости называется *полным*, если все коэффициенты *A; B; C; D* отличны от нуля.

В противном случае уравнение называется *неполным*.

Виды неполных уравнений

1) $D=0;\quad Ax+By+Cz=0$ Плоскость проходит через точку O.

2) $A=0;\quad By+Cz+D=0\quad // (OX)$

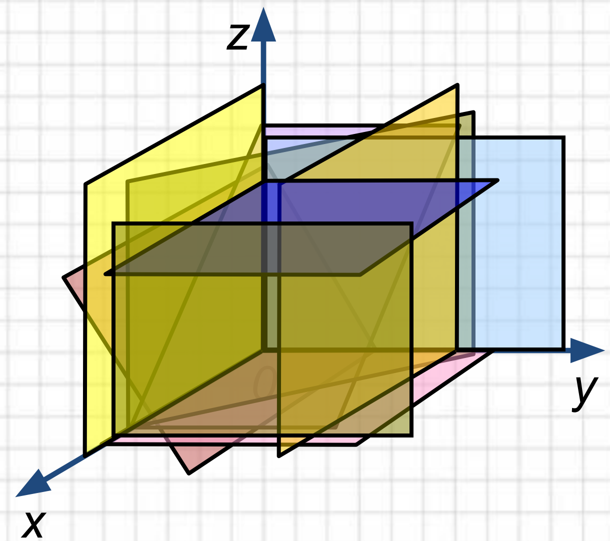
3) $B=0;\quad Ax+Cz+D=0\quad // (OY)$

4) $C=0;\quad Ax+By+D=0\quad // (OZ)$

5) $A=0; B=0\quad Cz+D=0\quad // (XOY)$

6) $B=0; C=0\quad Ax+D=0\quad // (YOZ)$

7) $A=0; C=0\quad By+D=0\quad // (XOZ)$



8) $B=0; C=0; D=0\quad Ax=0 \Rightarrow x=0\quad (YOZ)$

9) $A=0; C=0; D=0\quad By=0 \Rightarrow y=0\quad (XOZ)$

10) $A=0; B=0; D=0\quad Cz=0 \Rightarrow z=0\quad (XOY)$

Алгоритм составления уравнения плоскости, проходящей через три точки

$M(x_1,y_1,z_1),\ N(x_2,y_2,z_2),\ K(x_3,y_3,z_3)$

- **Подставить координаты точек в уравнение плоскости** $Ax + By + Cz + D = 0$

Получится система трех уравнений с четырьмя переменными

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$$

- **Решить систему уравнений и найти А; В; С**
- **Подставить найденные значения А, В и С в общее уравнение плоскости**

Замечание :

Если плоскость проходит через начало координат, положить D = 0, если не проходит, то D = 1

Упражнение №1

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки:

а) *A* (1,0,0), *B* (0,1,0) и *C* (0,0,1); б) *M*(3,-1,2), *N*(4,1,-1) и *K*(2,0,1).

Решение:

Подставим координаты точек в уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

а) $\begin{cases} A+1=0 \\ B+1=0 \\ C+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3A-B+2C+1=0 \\ 4A+B-C+1=0 \\ 2A+C+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-0{,}2 \\ B=\ \ 0{,}8 \\ C=-0{,}6 \end{cases}$

Ответ: **а) x+y+z–1=0; б) x+4y+3z-5=0.**

Метод Гаусса

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

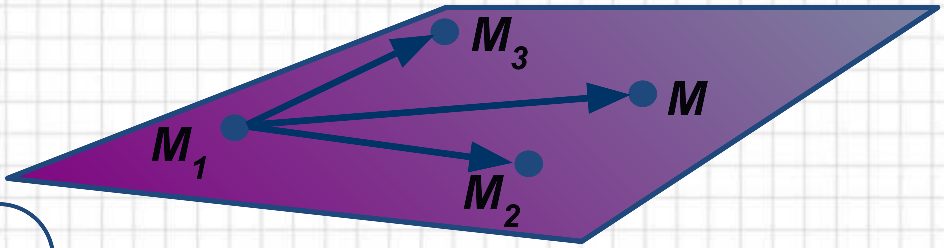
x_1, x_2, …, x_n – неизвестные.

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных.

b_i - свободные члены (или правые части)

Уравнение плоскости, проходящей через три точки (способ №2)

Пусть точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$ не лежат на одной прямой.



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

размера 3×3

Числа, составляющие матрицу, называются ***элементами*** матрицы. Если $m \neq n$, то матрица называется ***прямоугольной***. Если $m = n$, то матрица называется ***квадратной порядка n.***

Диагонали матрицы

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Матрица размера $m\times 1$ вида состоит из одного столбца и называется ***вектор-столбцом***, а матрица $A=[a_1 \;\; a_2 \ldots a_n]$ размера $1\times n$, состоящая из одной строки – ***вектор-строкой***.

В случае квадратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

элементы $a_{11}, \;\; a_{22}, \ldots a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***, а элементы $a_{n1}, \; a_{n-1\;2}, \ldots a_{1n}$ – ***побочную диагональ*** матрицы.

Определители

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.

Определителем n-го порядка матрицы A называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов, взятых точно по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы A. Знак каждого слагаемого определяется специальным правилом.

Определители n-го порядка содержат $n!$ членов.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \; –$$ ***определитель второго порядка***.

Пример:

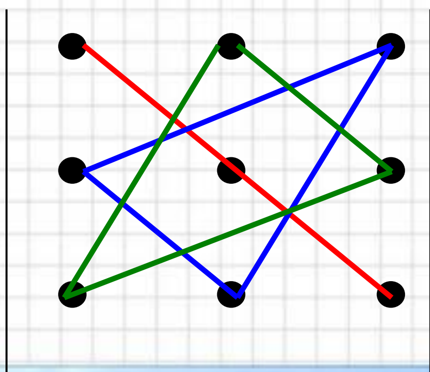
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-5) \cdot 3 = 14 - (-15) = 29.$$

определитель третьего порядка.

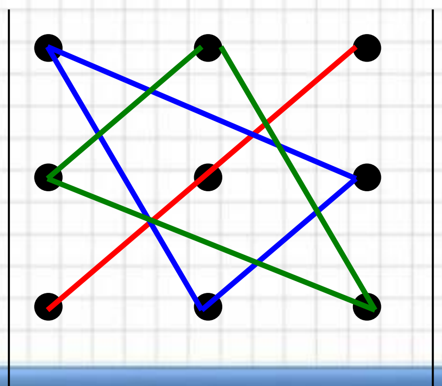
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

***Правило треугольника*:** три положительных члена определителя третьего порядка представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Три его отрицательных члена представляют собой произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

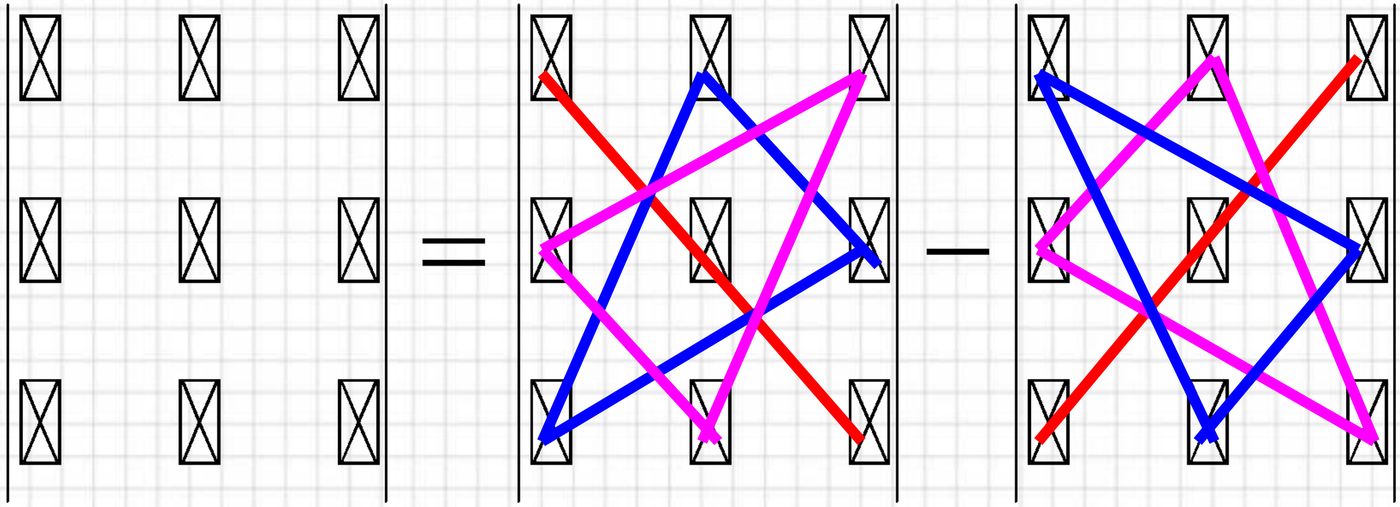
«+»



«-»



Правило треугольников:



Вычислить определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - (-3)\cdot 2 = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = 5$$

Упражнение №2

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки:

а) ***A*** **(1,0,0),** ***B*** **(0,1,0) и** ***C*** **(0,0,1); б)** ***M*****(3,-1,2),** ***N*****(4,1,-1) и** ***K*****(2,0,1).**

Решение:

Подставим координаты точек в уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

а)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 1-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

б)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & 1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 1-2 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

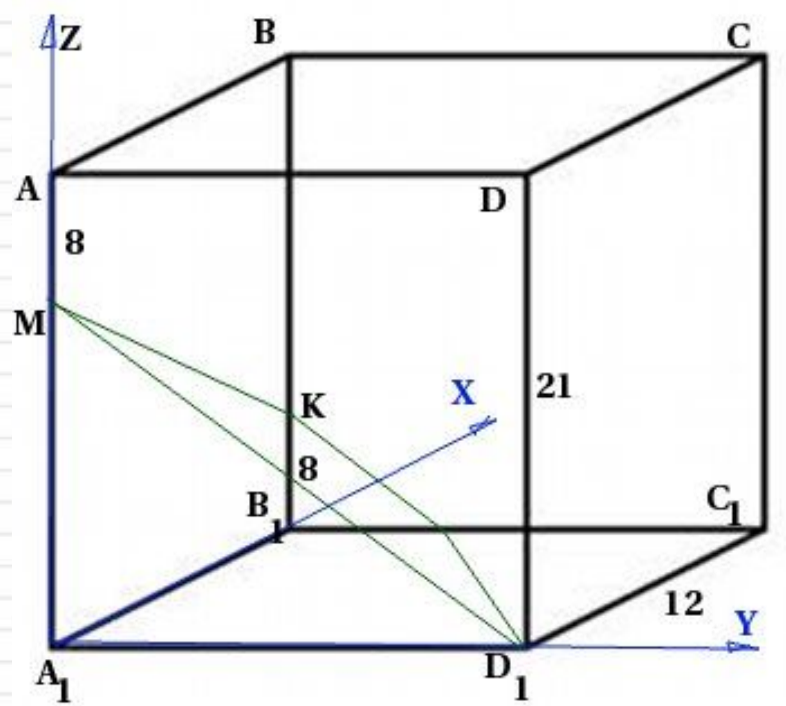
Ответ: а) $x+y+z-1=0$; б) $x+4y+3z-5=0$.

Домашнее задание

- Повторить координаты основных пространственных фигур
- Выучить теоретический материал по данной теме
- Решить задачи № 3(б) (приложение № 1)
- Создать в программе
- « Microsoft Publisher» буклет- справочник по данной теме (необязательное задание)

Домашнее задание (дополнительно)

- В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, AM = 8, на ребре BB_1 взята точка К так, что $B_1K=8$.
- Написать уравнение плоскости D_1MK.



Ответ: **$5x + 13y + 12z - 156 = 0$**