РГСУ

8. Интегральное исчисление функций одной переменной

Орлик
Любовь Константиновна
Профессор кафедры информатики
и прикладной математики,
кандидат физ.-мат. наук, профессор

Учебные вопросы

8.1. Первообразная. Неопределенный интеграл

8.2. Методы интегрирования

8.3. Определенный интеграл

Учебный вопрос

8.1. Первообразная.Неопределенный инеграл

Ранее мы по данной функции вычисляли ее производную. Сегодня мы поставим обратную задачу: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x),$ производная которой равнялась бы заданной функции $f(x),$ т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x).$$

Примеры.

$$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow F_1(x) = \sin x;$$

$$(\sin x + 1)' = \cos x \Rightarrow F_2(x) = \sin x + 1;$$

Таким образом, $F(x)+C$ **- это совокупность всех первообразных от данной функции.**

<u>Определение 2.</u> Пусть $F(x)$ **- одна из первообразных для функции** $f(x)$.

Тогда выражение $F(x)+C$, **где** C **- произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом и обозначается** $\int f(x)\,dx$.

Здесь $f(x)$ **называется** **подынтегральной функцией**, **а** $f(x)\,dx$ - **подынтегральным выражением**.

Свойства

1) $$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

2) $$\int dF(x) = F(x) + C$$

3) $$\int \left(f(x) + \varphi(x) \right) dx =$$
$$= \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx$$

4) $$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

Таблица основных интегралов

1) $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

2) $$\int dx = x + C$$

3) $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Таблица основных интегралов

4) $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

5) $$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Таблица основных интегралов

6) $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

7) $$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

Таблица основных интегралов

8) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

9) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Таблица основных интегралов

10) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Докажем справедливость формулы 3)

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Если $x > 0,$ **то** $|\, x \,| = x$ **и** $\ln |\, x \,| = \ln x.$

$d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}.$ **Следовательно, для** $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln|x| + C.$$

Если $x < 0,$ **то** $|x| = -x$ **и** $\ln|x| = \ln(-x).$

$$d\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1)dx = \frac{dx}{x}.$$

Следовательно, для $x < 0$

$$\int\frac{dx}{x} = \ln(-x) + C = \ln\left|x\right| + C.$$

Примеры.

$$1)\quad \int\left(x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int x^2dx+$$

$$+\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-3}dx=$$

$$=\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=$$

$$=\frac{x^{3}}{3}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^{-2}}{2}+C=$$

$$=\frac{x^{3}}{3}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2x^{2}}+C.$$

2) $$\int \frac{x+1}{x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{dx}{x} = x + \ln|x| + C.$$

3) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$$

4) $\int 2^x \cdot 3^x \, dx = \int 6^x \, dx = \dfrac{6^x}{\ln 6} + C.$

5) $\int \dfrac{2^x + 3^x}{3^x} dx = \int \left(\dfrac{2^x}{3^x} + \dfrac{3^x}{3^x} \right) dx =$

$$= \int \left(\left(\frac{2}{3} \right)^x + 1 \right) dx = \int \left(\frac{2}{3} \right)^x dx + \int dx =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + x + C.$$

6) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

$$8)\ \int \frac{x+\sqrt{x}+1}{x^2}dx = \int \left(\frac{x}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{3}{2}} dx + \int x^{-2} dx =$$

$$= \ln|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C.$$

$$9)\qquad \int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$10) \quad \int \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx =$$

$$= -\mathrm{ctg}\,x - x + C.$$

<u>Теорема.</u> Любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную.

Действие отыскания неопределенного интеграла или, что то же самое, нахождение всех первообразных от данной функции, называется интегрированием этой функции.

Дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными операциями.

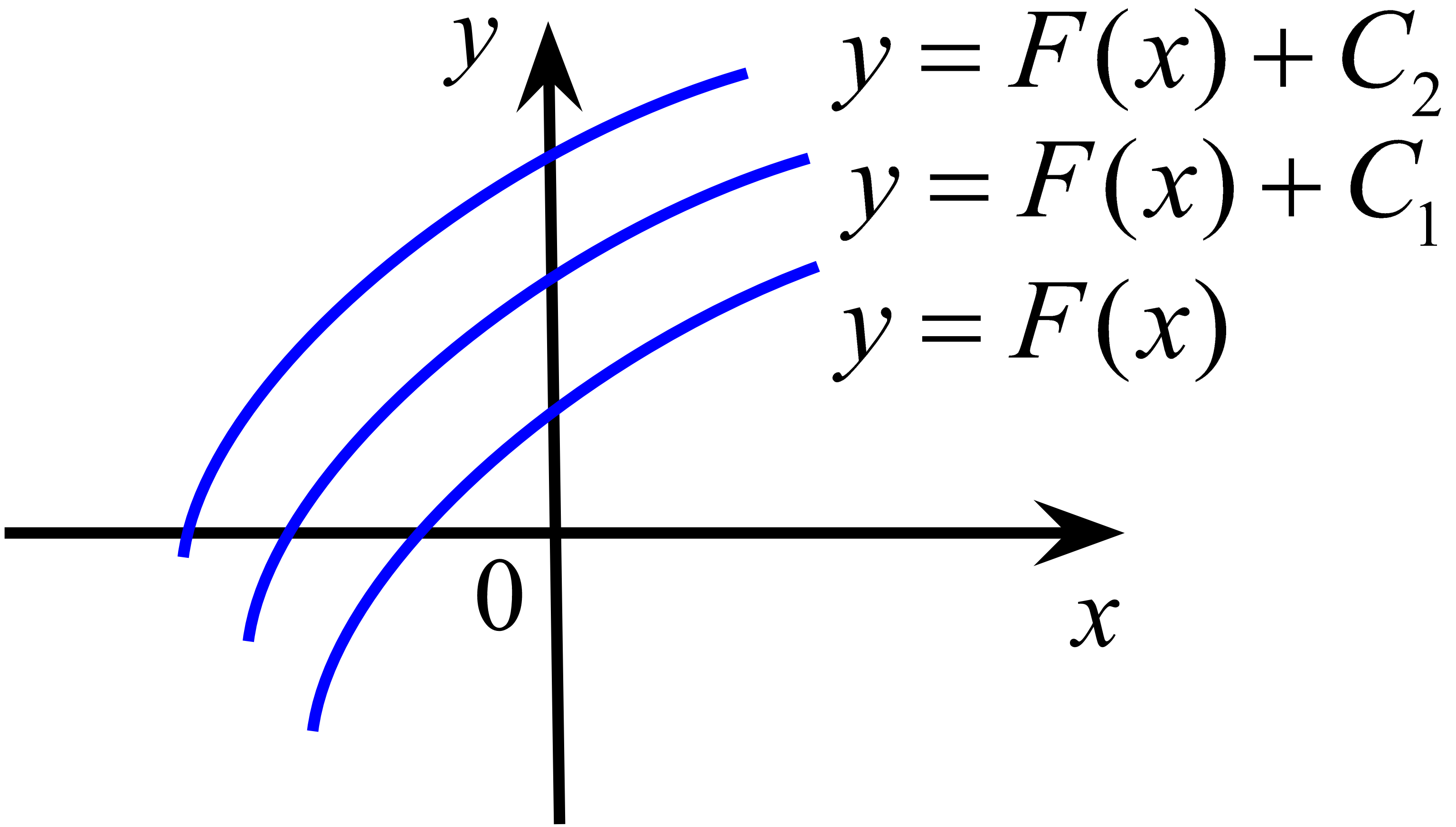
Геометрический смысл неопределенного интеграла

Назовем график первообразной функции от $f(x)$ интегральной кривой.

Таким образом, если $F'(x) = f(x)$,

то график функции $y = F(x)$ есть интегральная кривая.

Неопределенный интеграл геометрически представляется семейством всех интегральных кривых



<u>Пример.</u> $\int 2x\,dx = x^2 + C.$

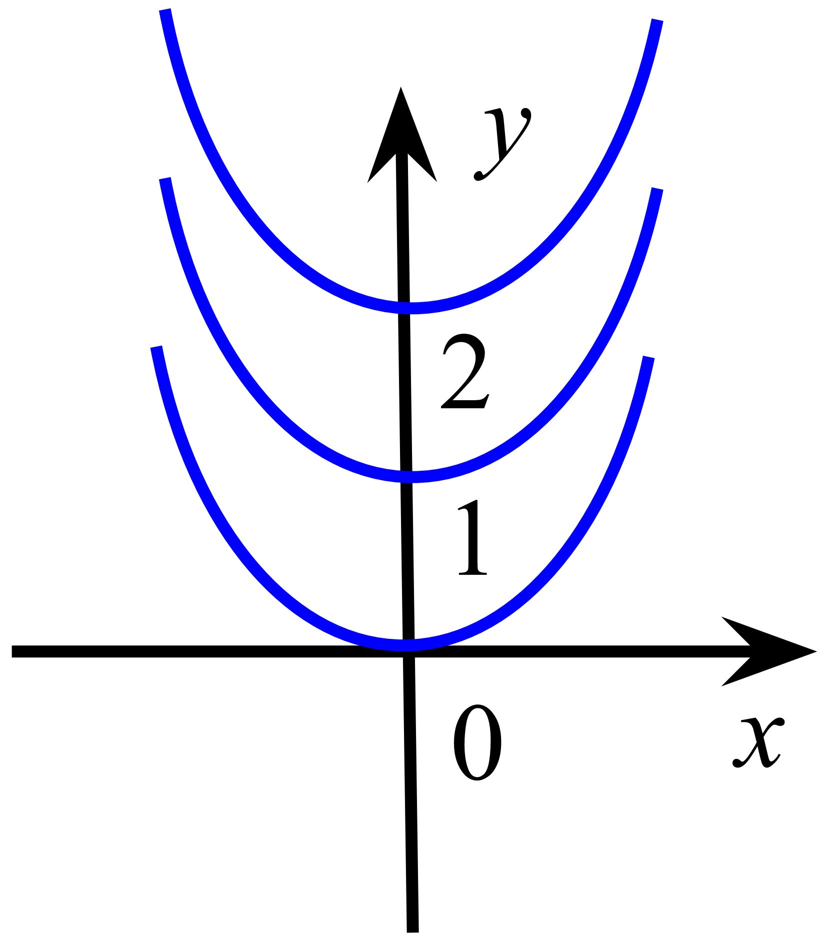
Построить интегральные кривые.

Пусть

$C = 0; \quad y = x^2.$

$C = 1; \quad y = x^2 + 1.$

$C = 2; \quad y = x^2 + 2.$



Интегралы, не берущиеся в элементарных функциях

В дифференциальном исчислении производная от любой элементарной функции есть функция элементарная. Другое дело операция, обратная дифференцированию, – интегрирование.

Можно привести примеры элементарных функций, первообразные от которых хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Так, например, по теореме существования для функций $e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{\cos x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}$ **существуют первообразные, но они не выражаются в элементарных функциях.**

Несмотря на это, все эти первообразные хорошо изучены и для них составлены таблицы, помогающие практически использовать эти функции.

Так, например, большое значение в приложениях играет первообразная $\Phi(x)$

от функции $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$,

удовлетворяющая дополнительному условию $\Phi(x) = 0.$

Эта функция встречается в теории вероятностей и называется интегралом вероятностей.

Если первообразная для некоторой функции не является элементарной функцией, то говорят, что интеграл не берется в элементарных функциях.

Учебный вопрос

8.2. Методы интегрирования

Тема: Замена переменной в неопределенном интеграле

Введем вместо x новую переменную t, связанную с x соотношением $x = \varphi(t)$.

Тогда

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Примеры.

1) $\int \sin ax\,dx =$

$ax = t;$

$d(ax) = dt;$

$a\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dt.$

$$= \int \sin t \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int \sin t \, dt =$$

$$= -\frac{1}{a} \cos t + C = -\frac{1}{a} \cos ax + C.$$

2) $\int \operatorname{tg} x \, dx.$

Имеем

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

Заметим, что

$$\sin x\,dx = -d(\cos x).$$

Здесь мы устно ввели под знак интеграла функцию $\sin x.$

3) $\int x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx.$

Замечая, что $x\,dx=\dfrac{1}{2}d\left(x^2+1\right),$
получаем

$$\int x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3/2}+C=\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3}+C.$$

4) Интегралы вида

$$\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx \, dx,$$

$$\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx.$$

Эти интегралы вычисляются методом разложения на основании тригонометрических тождеств.

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2},$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2},$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{\cos(m+n)x + \cos(m+n)x}{2}.$$

5) $$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx =$$

$$x^3+1=t;$$

$$d\left(x^3+1\right)=dt;$$

$$3x^2\,dx=dt;$$

$$x^2\,dx=\frac{1}{3}dt.$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C.$$

Можно устно внести x^2 **под знак дифференциала:**

$$x^2dx=\frac{1}{3}d\left(x^3+1\right).$$

Тогда

$$\int\frac{x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3+1\right)}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C.$$

6) $\int \sin x \cos x \, dx.$

Рассмотрим три способа.

① $\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, d(\sin x) =$

$$= \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

② $\int \sin x \cos x \, dx = -\int \cos x \, d(\cos x) =$

$$= -\frac{\cos^2 x}{2} + C.$$

③ $$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \; dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x \; d(2x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{\sin^2 x}{2} + C\right)' = \sin x \cdot \cos x.$$

$$\left(-\frac{\cos^2 x}{2}+C\right)' = \sin x \cdot \cos x.$$

$$\left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C\right)' = +\frac{1}{4}\cdot 2\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cdot \cos x.$$

7) $$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

8) $$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx =$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)\,d(\sin x) =$$

$$= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x\,d(\sin x) =$$

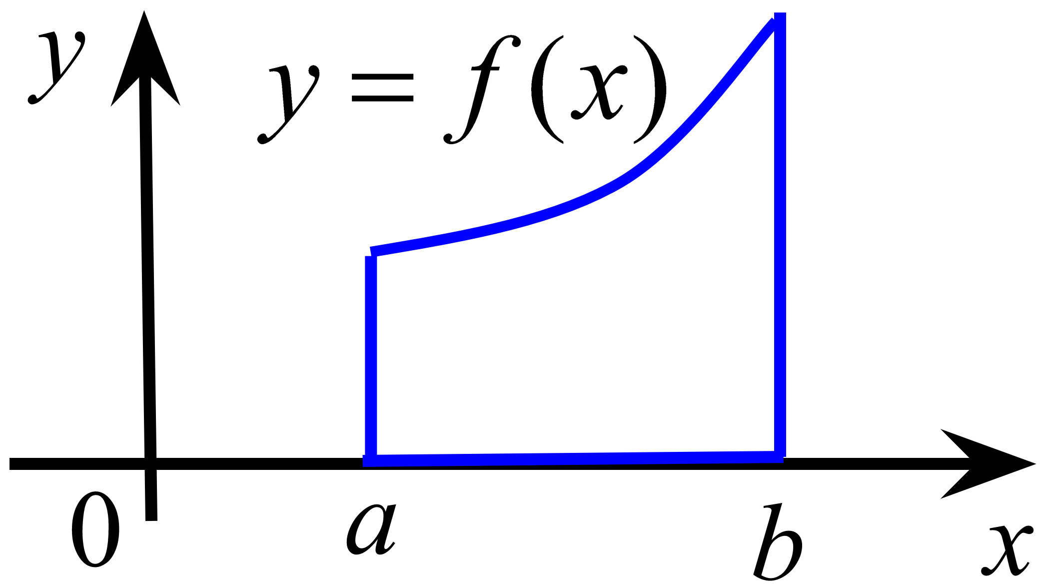
$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Учебный вопрос

8.3. Определенный интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции

Рассмотрим фигуру, ограниченную слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу отрезком оси Ox и сверху кривой $y = f(x)$.



Такая фигура называется криволинейной трапецией. Вычислим площадь этой фигуры.

1) Разобьем отрезок $[a,b]$ **на** n **малых отрезков с помощью точек деления**

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1}.$$

2) В каждом из отрезков возьмем произвольную точку c_i, где

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

3) Составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i.$

Назовем её **интегральной суммой**.

4) Назовем **определенным интегралом**

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

и обозначим

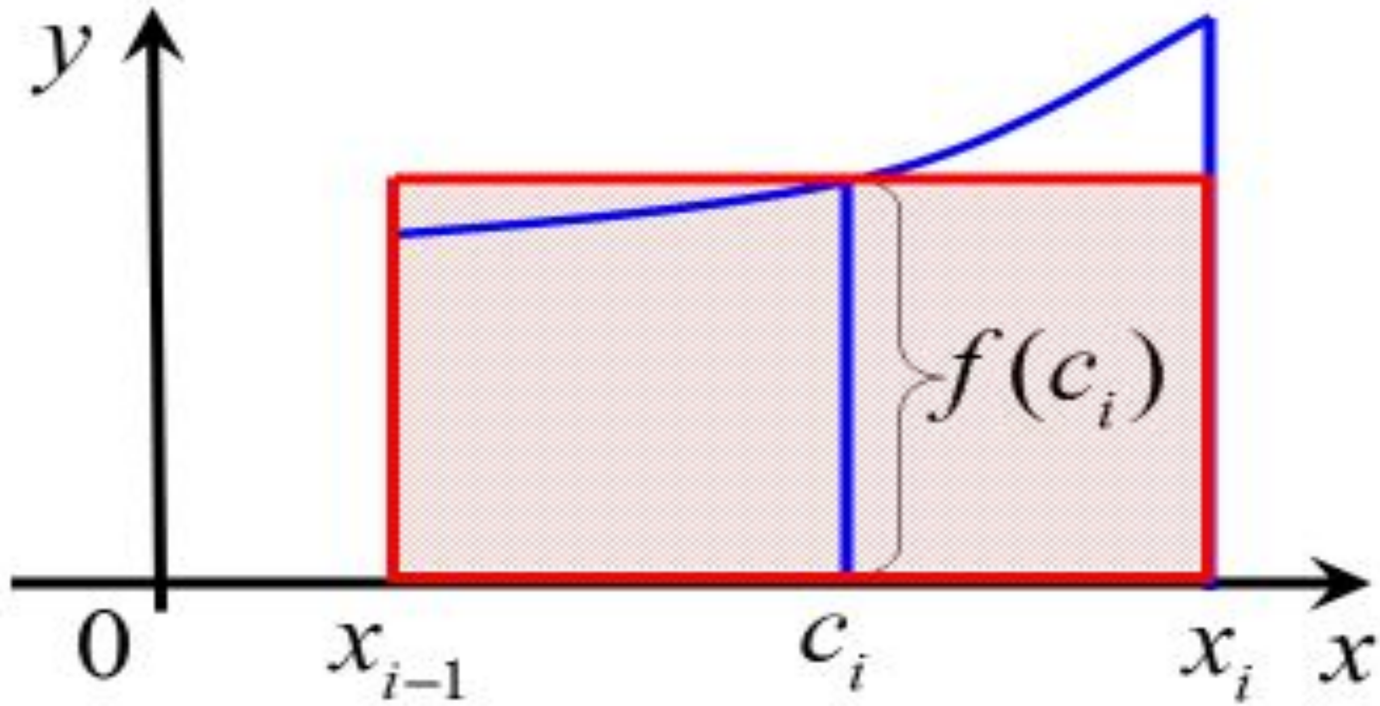
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

Числа a и b называют верхним и нижним пределами интегрирования.

$f(x)$ **- подынтегральная функция.**

$f(x)\,dx$ **- подынтегральное выражение.**

Произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ **численно равно площади прямоугольника с основанием** $[x_{i-1}, x_i]$ **и высотой** $f(c_i)$.



y
f(c_i)
0
x_{i-1}
c_i
x_i
x

Геометрический смысл определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{\text{криволинейной трапеции}}.$$

(предполагается, что $f(x) \geq 0$ **).**

Свойства определенного интеграла

1) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2) $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

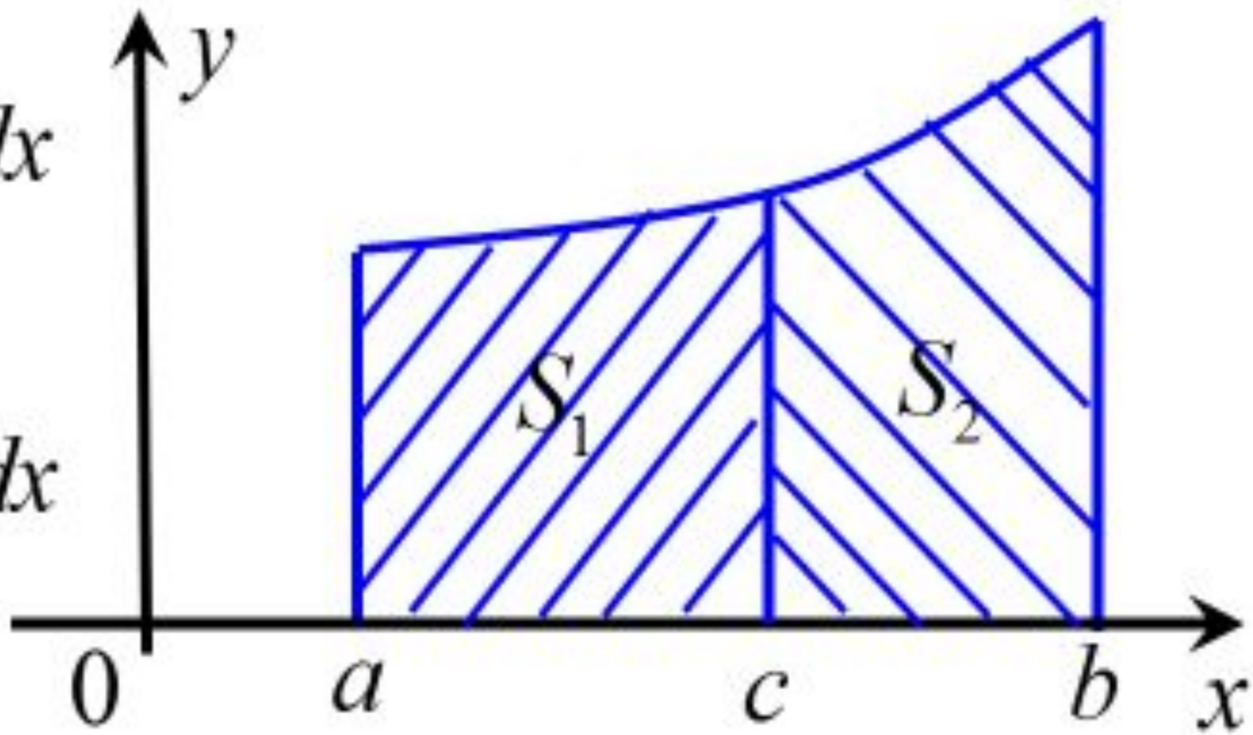
3) $$\int_a^b \big(f(x)+\varphi(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Свойства определенного интеграла

$$4)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

$$S_1 = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$S_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$



Свойства определенного интеграла

5) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Теорема о среднем значении

Если $f(x)$ - непрерывная на $[a,b]$ функция, то существует такая точка $c \in (a,b)$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Г. Лейбниц (1646-1716) – великий немецкий математик.

И. Ньютон (1642-1727) – великий английский математик

Примеры

1) $\int_1^2 e^x\,dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e = e(e-1).$

2) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{0,5} =$

$$= \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Предполагается, что $f(x)$ **- непрерывная функция.**

Замена переменной в определенном интеграле

$$1)\ \int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}.$$

Замена:

$$x+1=t^2 \Rightarrow x=t^2-1,\ dx=2t\,dt.$$

Новые пределы интегрирования:

$$x=3 \Rightarrow t=2, \qquad x=8 \Rightarrow t=3.$$

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}} = 2\int_2^3 \left(t^2-1\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\frac{3^3}{3} - 3\right) - 2\left(\frac{2^3}{3} - 2\right) =$$

$$= 2\cdot 6 - 2\cdot\left(\frac{8}{3} - 2\right) = 12 - \frac{4}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

2) $\int_{0}^{4} \sqrt{4-x^2}\,dx.$

$$x = 2\sin t,$$

$$dx = 2\cos t\,dt.$$

Если $x = 0,$ **то** $t = 0;$

Если $x = 4,$ **то** $\sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$

$$\int_0^4 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рекомендуемая литература

Кузнецов, Б.Т. Математика : учебник / Б.Т. Кузнецов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Юнити-Дана, 2015. - 719 с. : ил., табл., граф. - (Высшее профессиональное образование: Экономика и управление). - Библиогр. в кн. - ISBN 5-238-00754-X ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/

Автор: Углирж Ю. Г., Назв.: Математика: учебное пособие, Место изд.: Омск, Изд.: Омский государственный университет путей сообщения, Год издания: 2013г. // http://biblioclub.ru/

Автор: Ильин, В. А., Куркина, А. В., Назв.: Высшая математика : учеб. для студ. вузов, Место изд.: М., Изд.: Проспект, Год издания: 2014г.