Теория комплексных чисел

Показательная форма комплексного числа

Если комплексному числу $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

модуль которого равен 1, поставить в соответствие показательное выражение $e^{i\phi}$,то получим соотношение

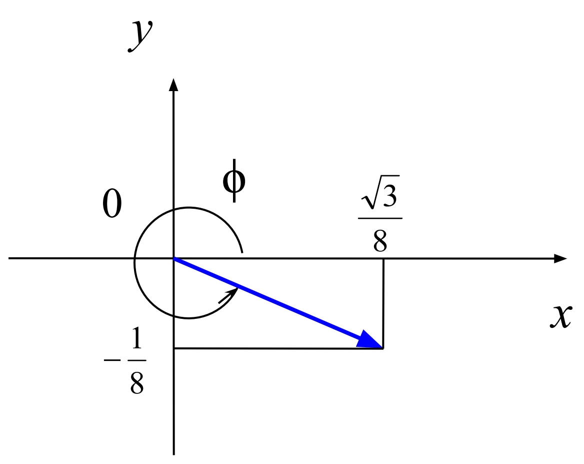
$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

которое называется формулой Эйлера

$\boxed{z = re^{i\varphi}}$ показательная форма

1. Записать число $z=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i$ в показательной форме:

$$r=|z|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{64}+\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}$$



$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{8}:\frac{1}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi&=\frac{b}{r}=-\frac{1}{8}:\frac{1}{4}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi=\frac{11\pi}{6}$$

$$\boxed{z=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i=\frac{1}{4}e^{\frac{11\pi}{6}i}}$$

2. Записать число $z = 2e^{-\frac{7\pi}{3}i}$ в алгебраической форме:

$$z = 2e^{-\frac{7\pi}{3}i} = 2\cdot\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)\right) = 2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{3} - i\sin\frac{7\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\cdot i$$

$$\boxed{z = 2e^{-\frac{7\pi}{3}i} = 1 - \sqrt{3}\cdot i}$$

Действия над комплексными числами в показательной форме

- Пусть

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = r^n e^{i\varphi n}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Доказательства

- Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ $z_2 = r_2 e^{\varphi_2}$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \, e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{i\varphi n}$$

3. Найти произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = \frac{3}{2} e^{\frac{\pi}{3} i} \quad u \quad z_2 = 2 e^{\frac{4\pi}{5} i}$$

$$z_1 z_2 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{5}\right) i} = 3 e^{\frac{17\pi}{15} i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{5}\right) i} = \frac{3}{4} e^{-\frac{7\pi}{15} i}$$

4. Представить в показательной форме комплексное число:

$$z = \frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}$$

- Пусть

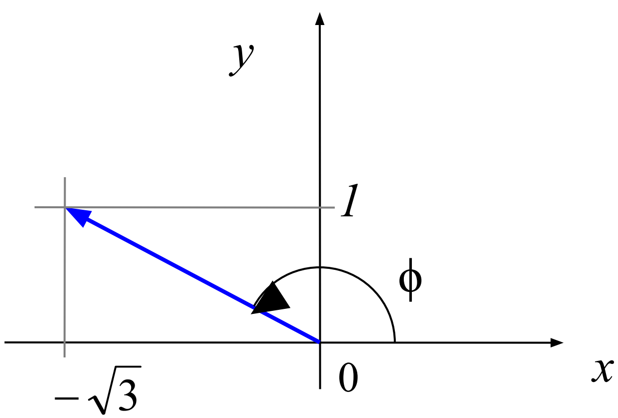
$$z_1 = -\sqrt{3} + i \qquad z_2 = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12} \qquad z_3 = 1 - i$$

Запишем каждое из чисел в показательной форме.

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = e^{-\frac{\pi}{12}i}$$

$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$r = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

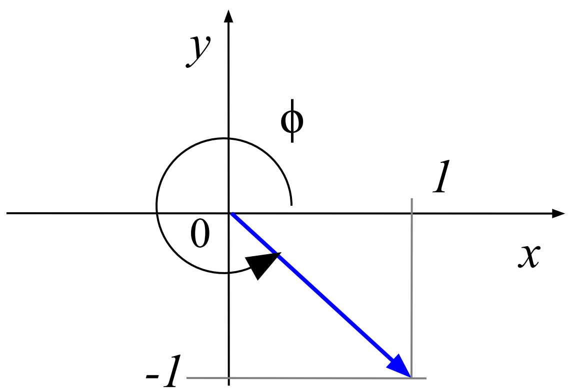


$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

$$z_1 = \sqrt{3} + i = 2 \cdot e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$z_3 = 1 - i$$

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$



$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

$$\underline{z = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4} i}}$$

$$z=\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}=\frac{2e^{\frac{5\pi}{6}i}\cdot e^{-\frac{\pi}{12}i}}{\sqrt{2}\,e^{\frac{7\pi}{4}i}}=$$

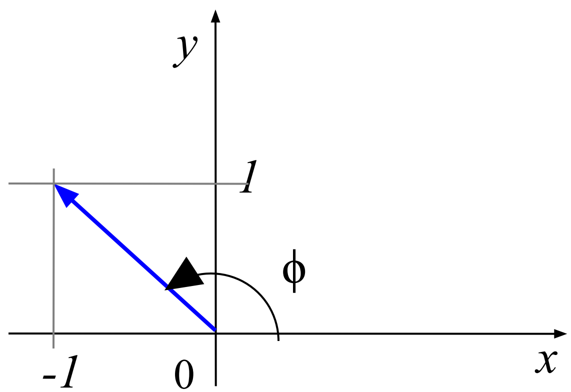
$$=\sqrt{2}\,e^{\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}-\frac{7\pi}{4}\right)i}=\sqrt{2}\,e^{\frac{-12\pi}{12}i}=\sqrt{2}\,e^{-\pi i}\overset{\text{или}}{=}\sqrt{2}\,e^{\pi i}$$

5. Представить в показательной форме комплексное число:

$$z = \left(-1 + i\right)^5$$

Пусть $z_1 = -1 + i$

$$r = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4} i}$$

$$z=\left(-1+i\right)^5=\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5 e^{\frac{3\pi}{4}\cdot 5i}=4\sqrt{2}\,e^{\frac{15\pi}{4}i}$$

6. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ в показательной форме.

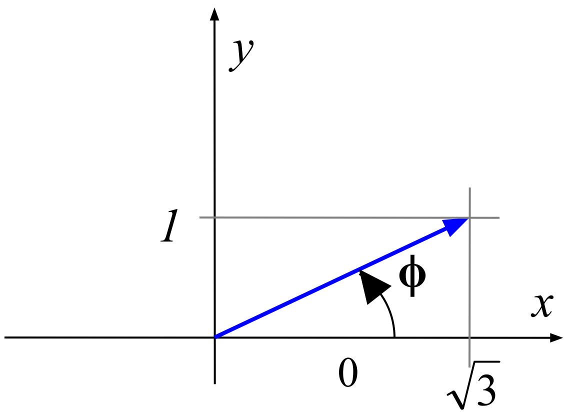
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}},\ k = 0,1,\dots,n-1$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$$

Пусть $\quad z=\sqrt{3}+i$

Запишем данное число в показательной форме:

$$r=|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2$$



$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$$

$$z=\sqrt{3}+i=2\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2e^{\frac{\pi}{6}i}}=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}i}=\sqrt[4]{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)i},\quad k=0,1,2,3$$

$$k=0:\quad u_0=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\pi}{24}i}$$

$$k=1:\quad u_1=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{13\pi}{24}i}$$

$$k=2:\quad u_2=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{25\pi}{24}i}$$

$$k=3:\quad u_3=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{37\pi}{24}i}$$

Пусть $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

тогда $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$$\left.\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}}$$

Формулами пользуются, в частности, для выражения степеней cosφ и sinφ и их произведений через cos и sin кратных дуг.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

5. Показать, что $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\varphi\right)$

$$\cos^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2\varphi i} + 2 + e^{-2\varphi i}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right) + 2 + \left(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos 2\varphi + 2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\varphi\right)$$

6. Показать, что $\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi=-\frac{1}{8}\cos4\varphi+\frac{1}{8}$

$$\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi=\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{2i\varphi}+2e^{i\varphi}e^{-i\varphi}+e^{-2i\varphi}}{4}\cdot\frac{e^{2i\varphi}-2e^{i\varphi}e^{-i\varphi}+e^{-2i\varphi}}{4i^2}=$$

$$=-\frac{1}{16}\left(e^{2i\varphi}+2+e^{-2i\varphi}\right)\left(e^{2i\varphi}-2+e^{-2i\varphi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{16}\left(\left(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}\right)^2-2^2\right)=-\frac{1}{16}\left(e^{4i\varphi}+2+e^{-4i\varphi}-4\right)=$$

$$=-\frac{1}{16}\left(e^{4i\varphi}-2+e^{-4i\varphi}\right)=-\frac{1}{16}\left(\left(\cos4\varphi+i\sin4\varphi\right)-2+\left(\cos4\varphi-i\sin4\varphi\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{16}\left(2\cos4\varphi-2\right)=-\frac{1}{8}\cos4\varphi+\frac{1}{8}$$

7. Записать число e^{x+yi} в тригонометрической форме.

$$e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$$

комплексная степень числа *e*

Для степени е с комплексным показателем сохраняются все свойства степеней с действительными показателями.