

Логарифмические уравнения

Уравнения, решаемые с использованием теорем о логарифмах

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$17.17 \quad \log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$$

$$\mathbf{a)} \quad \log_3((x-2)(x+2)) = \log_3(2x-1) \quad \text{ОДЗ:}$$

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x+2 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$$

$$(x-2)(x+2) = 2x-1$$

$$x^2 - 4 = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \text{ П.К.} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1-2 > 0 \\ -1+2 > 0 \\ 2 \cdot (-1) - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3-2 > 0 \\ 3+2 > 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 3 \quad \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$17.17 \text{ б) } \log_{11}(x+4) + \log_{11}(x-7) = \log_{11}(7-x)$$

$$\log_{11}((x+4)(x-7)) = \log_{11}(7-x) \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x+4 > 0 \\ x-7 > 0 \\ 7-x > 0 \end{cases}$$

$$(x+4)(x-7) = 7-x$$

$$x^2 - 3x - 28 = 7 - x$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$\begin{cases} -5 + 4 > 0 \\ -5 - 7 > 0 \\ 7 - (-5) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7 + 4 > 0 \\ 7 - 7 > 0 \\ 7 - 7 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 \text{ П.К.} \\ x = 7 \text{ П.К.} \end{cases}$$

Ответ корней нет

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

17.18

$$\log_{23} (2x - 1) - \log_{23} x = 0$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

a)

$$\log_{23} (2x - 1) = \log_{23} x$$

$$2x - 1 = x$$

$$x = 1$$

Разность двух выражений равна нулю, если они равны

Ответ : 1

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 1 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases}$$

17.18 б) $\log_{0,5}(4x-1) - \log_{0,5}(7x-3) = 1$

Преобразуем заданное уравнение к виду

$$\log_{0,5}(4x-1) = 1 + \log_{0,5}(7x-3)$$

$$\log_{0,5}(4x-1) = \log_{0,5} 0,5 + \log_{0,5}(7x-3)$$

$$\log_{0,5}(4x-1) = \log_{0,5} 0,5(7x-3)$$

$$4x-1 = 0,5(7x-3)$$

$$4x-1 = 3,5x-1,5$$

$$0,5x = -0,5$$

$$x = -1 \quad \text{п.к.}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 4x-1 > 0 \\ 7x-3 > 0 \end{cases}$$

$$1 = \log_{0,5} 0,5$$

$$\begin{cases} 4 \cdot (-1) - 1 > 0 \\ 7 \cdot (-1) - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Ответ корней нет

17.19 а)

$$\log_2(x-3)(x+5) + \log_2 \frac{x-3}{x+5} = 2$$

$$\log_2(x-3) \cancel{(x+5)} \left(\frac{x-3}{\cancel{x+5}} \right) = 2$$

$$\log_2(x-3)^2 = 2$$

$$2 \log_2 |x-3| = 2$$

$$\log_2 |x-3| = 1$$

$$|x-3| = 2$$

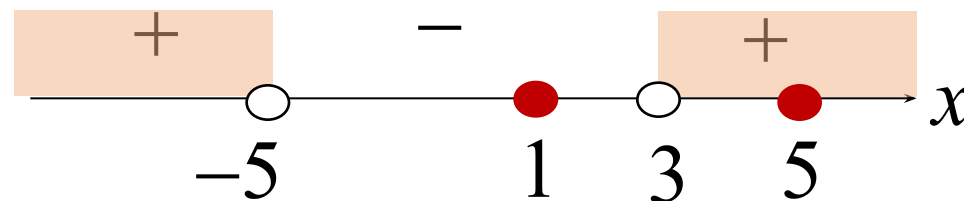
$$\begin{cases} x-3 = 2 \\ x-3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases} \text{ П.К.}$$

Ответ: 5

ОДЗ:
$$\begin{cases} (x-3)(x+5) > 0 \\ \frac{x-3}{x+5} > 0 \end{cases}$$

Решение двух неравенств одинаково (метод интервалов):



$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b^{2n} = 2n \cdot \log_a |b|$$

$$17.20 \quad \lg(x-1)^3 - 3\lg(x-3) = \lg 8$$

$$3\lg(x-1) - 3\lg(x-3) = \lg 8 \quad | :3$$

$$\lg(x-1) - \lg(x-3) = \frac{1}{3}\lg 8$$

$$\lg(x-1) - \lg(x-3) = \lg 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\lg(x-1) - \lg(x-3) = \lg 2$$

Преобразуем полученное уравнение к виду

$$\lg(x-1) = \lg 2 + \lg(x-3)$$

$$\lg(x-1) = \lg 2(x-3)$$

$$x-1 = 2x-6$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

$$\text{ОДЗ:} \quad \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5-1 > 0 \\ 5-3 > 0 \end{cases}$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$17.21 \quad \log_2(x^3 - 1) - \log_2(x^2 + x + 1) = 4$$

$$\text{a) } \log_2 \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = 4$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^3 - 1 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\log_2 \frac{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}{\cancel{x^2+x+1}} = 4$$

$$\begin{cases} 17^3 - 1 > 0 \\ 17^2 + 17 + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\log_2(x-1) = 4$$

$$x-1 = 2^4$$

$$x = 17$$

Ответ: 17

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$17.21 \text{ б) } \log_{0,5} (x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8) = -3 \quad \text{ОДЗ:}$$

$$x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 = (0,5)^{-3} \quad x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 > 0$$

$$x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 = 8$$

$$x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 16 = 0$$

Пусть $x^2 = t, t \geq 0$

$$t^3 - 6t^2 + 12t - 16 = 0$$

Для дальнейшего решения уравнения
воспользуемся схемой Горнера

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$t^3 - 6t^2 + 12t - 16 = 0$$

Пусть $x^2 = t, t \geq 0$

16 \square 1; 2; 4; 8; 16

$$p(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 16 \neq 0$$

$$p(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 16 \neq 0$$

$$p(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 - 16 = 0$$

	Пусть $x^2 = t$	Пусть $x^2 = t$	Пусть $x^2 = t$	Пусть
Пусть $x^2 = t$	Пусть $x^2 = t$	Пусть $x^2 = t$	Пусть $x^2 = t$	Пусть $x^2 = t$

$$(t - 4)(t^2 - 2t + 4) = 0$$

$$\begin{cases} t - 4 = 0 \\ t^2 - 2t + 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} t = 4 \\ D = 4 - 16 < 0 \end{cases}$$

$$t = 4 \quad x^2 = 4 \quad x = \pm 2$$

ОДЗ:

$$x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 > 0$$

$$2^6 - 6 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^2 - 8 > 0$$

$$(-2)^6 - 6 \cdot (-2)^4 + 12 \cdot (-2)^2 - 8 > 0$$

Ответ: ± 2