Последовательности и прогрессии в жизни.

Автор: Каримова Лилия
учащаяся 10 класса
ГБОУ СОШ «Образовательный центр»
п.г.т. Рощинский м.р. Волжский
Самарской области
Научный руководитель: учитель математики высшей
квалификационной категории
Пятовская Людмила Петровна.

2011-2012 учебный год.

Оглавление

1.Введение

Проблема , изложенная в моем проекте, заключается в том, что для успешной сдачи ЕГЭ требуется умение решать задачи на последовательности и прогрессии (задание вида C_6). Но в курсе средней школы эта тема изучается только в 9 классе и немного в 10. По моему мнению, в процессе изучения материала недостаточное внимание уделяется задачам повышенной трудности, умение решать которые –необходимое условие для качественной подготовки к ЕГЭ.

Цель:

1)Узнать, как открыли прогрессии, кто из математиков занимался этим вопросом;

2)Узнать применение формул арифметической и геометрической прогрессии при решении задач древности;

3) Хорошо подготовиться к сдаче ЕГЭ, научившись решать задания вида C_6.

Задачи исследования:

1.Расширить свои знания в математике, связанные с понятием “последовательности и прогрессии”.

2.Повысить свою математическую культуру, используя понятие “последовательности и прогрессии ” при решении задач, представленных в части C_6 экзамена по математике за курс средней школы в форме ЕГЭ.

Объект и предмет исследования – «Числовые последовательности. Прогрессии», их свойства, история и возможности применения в различных областях науки и жизни человека. В этом проекте мы познакомимся с числовыми последовательностями, формулами арифметической и геометрической прогрессии, так же научимся решать задачи на эту тему.

Гипотеза:

1. Я считаю, что открытие прогрессий было неизбежно и способствовало развитию математики в целом.

2.Я считаю, что многие задачи древности могли решаться с помощью формул арифметической и геометрической прогрессии.

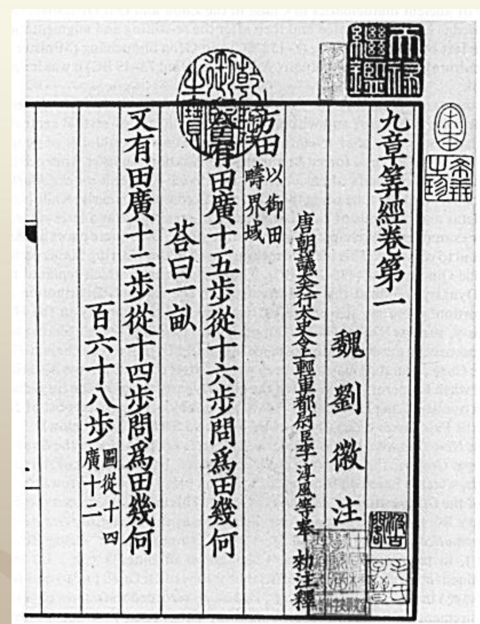
2.Историческая справка.

Термин «***Прогрессия***» от латинского слова «*движение вперед*» введен римским автором **Боэцием** (VI век.). В математике: это всякая последовательность чисел, построенная по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении.

Арифметическая и геометрическая прогрессии в древности.

Встречаются во II тысячелетии до н.э.:

Клинописные таблички Вавилонян, Египетские папирусы,



九章筭經卷第一

魏 劉徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑注釋

方田 以御田疇界域

有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

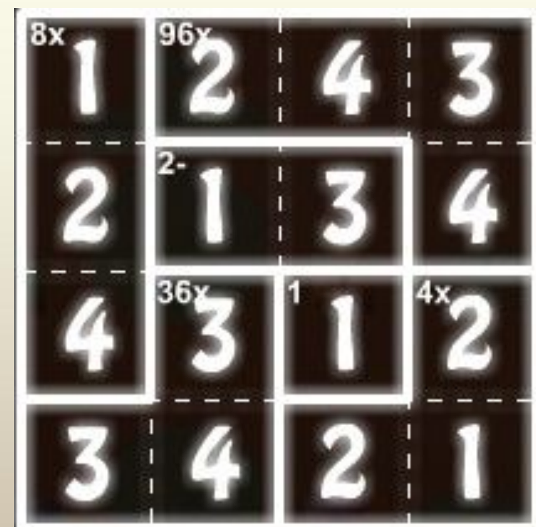
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

荅曰 百六十八步 圖從十四廣十二

«Математика в девяти книгах».

3.Понятие последовательности и прогрессии. Основные виды.

Числовая последовательность - множество чисел, занумерованных с помощью натуральных чисел и расположенных в порядке возрастания их номеров, т.е. a_1, a_2, a_3, …, a_n, … или сокращенно (a_n). Числа, из которых составлена последовательность, называют членами.



Последовательность бывает: стационарная, устанавливающаяся, ограниченная, неограниченная, монотонная и другие.

Прогрессия.

Прогрессия - последовательность чисел, получаемых по некоторому правилу.

Арифметическая прогрессия.

Арифметическая прогрессия – это последовательность чисел, в которой каждый член получается из предыдущего путем прибавления к нему одного и того же числа, называемого разностью этой арифметической прогрессии.

Геометрическая прогрессия.

Геометрическая прогрессия - это последовательность чисел, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называемое знаменателем геометрической прогрессии.

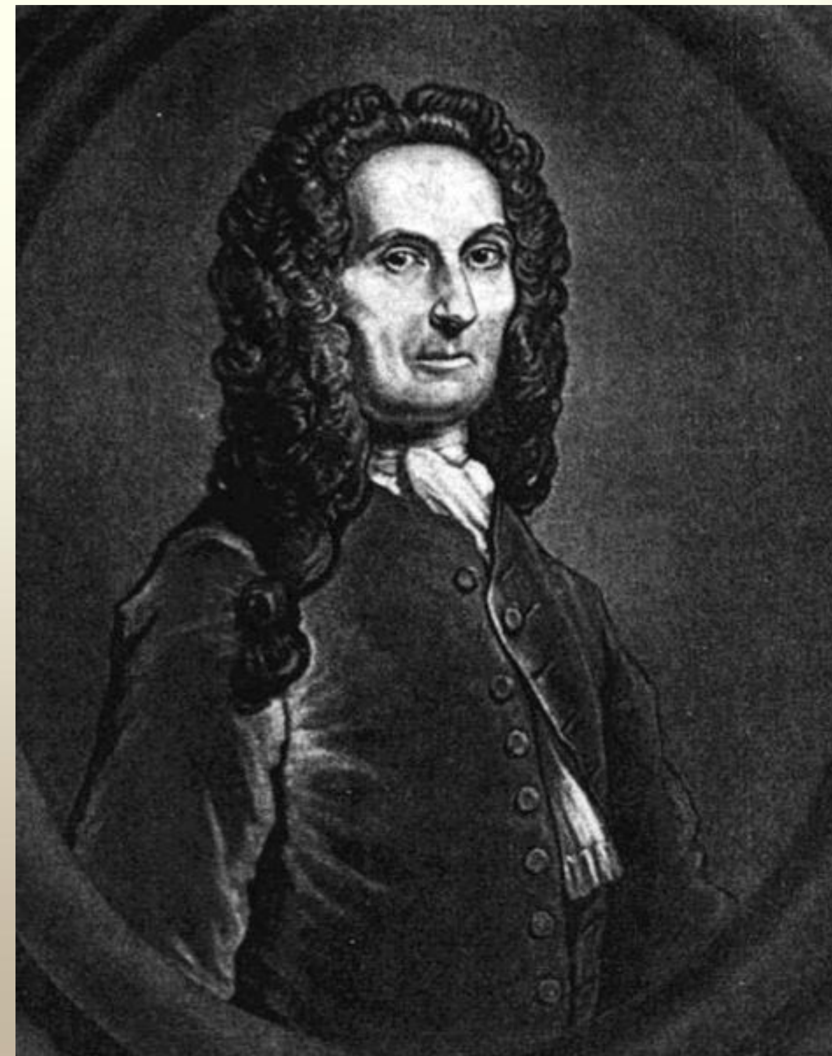
4.Решение задач древности и современного мира при помощи свойств и формул прогрессий.

Абрахам де Муавр –

английский математик, обнаружил, что продолжительность его сна увеличивается на 15 минут в день.

Составив арифметическую прогрессию, он определил дату, когда она достигла бы 24 часов. Это — 27 ноября 1754 года. В этот день он и умер.

Так с помощью арифметической прогрессии можно предугадать какой-либо результат развития природного явления.



Какую награду получил Полководец Теренций от скупого императора?

Много веков назад в Древнем Риме Полководец Теренций попросил у императора миллион динариев для обеспечения остатка своей жизни. И на эту просьбу Император ответил: “Ты войдешь в казначейство, возьмешь одну монету, равную 1 брассу в руки, вернешься сюда и положишь ее к моим ногам. На другой день вновь пойдешь в казначейство, возьмешь монету, равную 2 брассам, а на третий день, стоящую 4 брасса, и так далее. Будешь нести их до тех пор, пока не останется сил на последнюю монетку. Все эти монеты я отдам тебе, в качестве награды за работу”. И Теренций согласился. Прошло 18 дней. С каждым днем вес монет увеличивался, и получилось, что на 18-ый день было 131072 брасса весом 655 кг 360 г.

Полководец просил у императора миллион динариев, т. е. 5000000 брассов. Значит, он получил меньше просимой суммы в 19 раз (5000000 : 262143 ≈ 19 раз).

Задача № R79 папируса Ринда.

Задача № R79 папируса Ринда говорит нам о том, что в Древнем Египте применялась в вычислениях геометрическая прогрессия. Впрочем, нам известно только то, что египтяне использовали для прогрессии числа «2» и «1/2», т.е. могли получать такие значения как:

1/2, 1/4, 1/8... и 2, 4, 8, 16...

Задача из современного мира.

В соревнованиях по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах - одно очко, за каждый последующий – на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

Решение:

Каждый промах является членом арифметической прогрессии (an).

Первый промах $a_1=1$, Следующий промах $a_1+0,5 = a_2$, значит , d=0,5.

Всего штрафных очков Sn=7. Всего выстрелов 25.

Sn= $\frac{2a_1 + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n$

Получаем, что $7=\frac{2 + 0,5(n-1)}{2}\cdot n$, и в результате получается, что n=4.

Значит, стрелок попал в цель 21 раз (25-4=21 раз).

Ответ: 21 раз.

5.Исследовательская задача.

Цель исследовательской работы: Выяснить применение формул геометрической прогрессии при решении задач современного мира.

Задачи исследования:

– Условие задачи,
– Решение задачи алгебраическим методом,
– Решение задачи с использованием формул геометрической прогрессии.

Задача: С какой скоростью распространяется важная и интересная информация в школе?

Условие задачи: В нашей школе 1000 учеников. Учитель в 8.30 сообщил четырем учащимся важную и интересную информацию. В свою очередь эти четыре ученика рассказали эту информацию четырем своим соседям и так далее. За какое время эта информация станет известна всем учащимся?

Решение задачи (способ I):

Время	Число людей, которым известна информация.
8.45	1+4=5
9.00	5+4•4=21
9.15	21+4•16=85
9.30	85+4•64=341
9.45	341+4•256=1365

Если в 9.45 новость станет известна 1365 учащимся, а значит и 1000 учащимся будет известна тем более!

Решение задачи (способ II):

Зная формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии, определим параметры задачи:

$b_1=1$, $q=4$, $S_n=1000$, $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

$1000=\frac{1\cdot(4^n-1)}{4-1}=\frac{4^n-1}{3}$,

решая это уравнение, получаем:

$3001=4^n$,

$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(4^6-1)}{4-1}=1365.$

Значит, в 9.45 важная информация станет известна 1365 учащимся, а значит и 1000 учащимся будет известна тем более!

Ответ: понадобится менее часа.

6.Способы решения задач, используемых в ЕГЭ по математике.

Задача:

Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3.

Решение:

Очевидно , $a_3 \geq 3$, причем , $a_3=3$ только если $a_1=1$ и $a_2=2$, то есть если десятичная дробь начинается: 0,123…(четвертая цифра не 0).

Заметим, что таким образом начинается, например число

$$m=10^{-1} + 2\cdot10^{-2} + 3\cdot10^{-3} + \ldots + n\cdot10^{-n} + \ldots$$

Найдем число *m* и проверим, удовлетворяет ли оно условиям задачи. Для этого запишем сумму подробнее:

$$m=10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots +10^{-n} + \ldots +10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n} + \ldots + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n} + \ldots + \ldots$$

В каждой строчке — сумма геометрической прогрессии со знаменателем 10^{-1} . Получаем:

$$m = 10^{-1}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + 10^{-2}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \ldots + 10^{-n}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \ldots = \frac{10}{9}(10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n} + \ldots) = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{10}{81}$$

Получается, что *m* — рациональное число, и оно представляется дробью со знаменателем 81, что меньше ста. Число *m* удовлетворяет условию задачи и для этого числа .

Ответ: $a_3 =3$.

Задача:

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2193.

А) может ли последовательность состоять из двух членов?

Б) может ли последовательность состоять из трех членов?

В) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение:

А) Если последовательность состоит из двух членов, а и 15а (в произвольном порядке), то а+15а=2193. Уравнение 16а=2193 не имеет решений в натуральных числах (а=137,0625). Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

Б) Последовательность может состоять из трех членов: 129, 1935, 129, т.к. 129•15=1935. Сумма всех членов этой последовательности соответствует условию т.е. $a_1 + a_2 + a_3 = 2193$.

В) Приведем пример последовательности из 275 членов: 1; $\underbrace{\underbrace{15;1}, ; \ldots, \ldots, \underbrace{15;1}}_{137\text{пар}}$

Сумма ее членов равна 1+ 16•137=2193.

<u>Оценка:</u> Допустим, что в последовательности более чем 275 членов. Разобьем первые 276 членов на 138 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвертый, пятый и шестой, и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 16 и поэтому не меньше 16. Значит сумма всех членов последовательности не меньше 16, чем 138•16=2208>2193. <u>Противоречие.</u>

Ответ: а) нет, б) да, в) 275.

Задача:

На доске написано более 42, но менее 56 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 4, среднее арифметическое всех положительных чисел равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных чисел равно -7.

А) сколько чисел написано на доске?

Б) каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

В) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

Решение:

Пусть написано *k* –положительных чисел, *l* -отрицательных и *m* нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $14k-7l+0m=4(k+l+m)$.

А) В левой части каждое слагаемое делится на 7, поэтому $k+l+m$ делится на 7. По условию $42<k+l+m<56$, поэтому $k+l+m=49$. Таким образом, написано 49 чисел.

Б) Приведем равенство $14k-7l=4(k+l+m)$ к виду $10k=11l+4m$. Так как $m\geq0$,то $10k\geq11l$, откуда $k>l$. Значит, положительных чисел больше, чем отрицательных.

В) <u>Оценка.</u> Подставим $k+l+m=49$ в правую часть равенства$14k-7l=4(k+l+m)$,получим $14-7l=196$, откуда $l=2k-28$. Так как $k+l\leq49$, получаем: $3k-28\leq49$, $3k\leq77$, $k\leq25$; то есть отрицательных чисел не более 22 $(2\bullet25-28=22)$.

Ответ: а) 49, б) положительных, в) 22.

Задача:

Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

Решение:

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, делится на 11. Запишем все цифры подряд: **9 876 543 210**. В написанном числе указанная разность сумм равна 5. Меняя местами, например, 5 и 8 (получим число **9 576 843 210**) , мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечетных и на четных местах, становится равной 11. Меняя местами, например, 4 и 1 (получим число **9 876 513 240**) , или 3 и 6 (получим число **9 873 546 21**0) , получаем числа, которые делятся на 11. Значит, найдутся хотя бы три десятизначных числа, которые делятся на 11 без остатка, т.е.

9 576 843 210, 9 876 513 240,

9 873 546 210. В задаче не требуется нахождение всех чисел, обладающих указанным свойством. **Ответ:** да.

7.Заключение.

Работа над проектом завершена. И я довольна результатом. Во-первых, узнала историю возникновения последовательностей, как решать задачи на эту тему, во-вторых, научилась решать эти задачи, в-третьих, думаю, что достигла своей цели и поставленных задач.

Математика развивает мышление человека, учит посредством логики находить разные пути решения. Так, научившись решать задачи на тему последовательности и прогрессии, я поняла, что использовать их можно не только для выполнения конкретных математических примеров, но и для решения различных задач в жизни и в быту.

Я думаю, что проект может принести пользу не только мне, но и тем учащимся, которые так же как и я, захотят ознакомиться с этой темой в процессе подготовки к итоговой аттестации по математике в форме ЕГЭ. Моя работа будет являться хорошим помощником им в этом.

8.Список используемой литературы.

1.Рудченко П.А., Яремчук Ф.П., “Алгебра и элементарные функции”, справочник; издание третье, переработанное и дополненное. Киев ,1987 год.

2. А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. Алгебра. 9 класс (в двух частях). Учебник для учащихся общеобразовательных школ. – М.: Мнемозина, 2009

3. Перельман Я.И. Живая математика. – Д.: ВАП,1994

4.Нагибин Федор Федорович, Канин Евгений Степанович – математическая шкатулка.

5. С.М. Никольский, М.К. Потапов. Алгебра. Пособие для самообразования. Москва «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1984.

6. И.Ф. Шарыгин. Факультативный курс по математике. Решение задач. Учебное пособие для 10 класса средней школы. Москва. «Просвещение».1989 год.

7.Перельман Я.И. “Занимательная алгебра”. – Д.:ВАП, 1994.

8. Интернет – ресурсы: http://domznaniy.com/mathematics/a_a7_0/a_a7_0_all.pdf .